

مطالعه حالت شوک روی درخت کیلی به وسیله روش بازه پُر

لاله فرهنگ متین

دانشگاه الزهراء، گروه فیزیک، تهران

(دریافت مقاله: ۸۶/۳/۱۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۷/۲/۷)

چکیده

عمومی‌ترین مدل پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی، با برهم‌کنش نزدیکترین همسایگی ارائه می‌شود و حالت شوک روی درخت کیلی تعریف می‌گردد. با فرض این‌که هر جایگاه بانزدیکترین همسایگیهایش حق برهم‌کنش دارد، حالت شوک مطالعه می‌گردد. این مدل توسط روش بازه-پُر به‌طور دقیق حل خواهد شد. معادله تحول زمانی آن بسته است و نتایج حاصل از بررسی این مدل در حالت پایا به صورت شبکه کاملاً پر خواهد بود. همچنین این مدل در حالت دینامیکی نیز بررسی خواهد شد و طیف هامیلتونی متناظرش گسسته خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: درخت کیلی، پخش و برهم‌کنش، روش بازه-پُر، حالت شوک

۱. مقدمه

به تازگی در توجه زیادی به حالت شوک در مدل‌های پخش و برهم‌کنش یک بعدی معطوف شده است [۱-۷]. نتایج دقیق حاصل از بررسی حالت شوک در مدل‌های پخش و برهم‌کنش یک بعدی و همچنین نتایج حاصل از شبیه‌سازی و محاسبات عددی مربوطه، در مقاله [۶] یافت می‌شود. در مقاله [۸]، عمومی‌ترین مدل پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی با برهم‌کنش نزدیکترین همسایگی معرفی و به‌طور دقیق با روش بازه خالی حل شده است و حلهای پایا و دینامیکی آن مورد بحث قرار گرفته است.

در این مقاله در ابتدا سیستمهای تصادفی و سیستمهای پخش و برهم‌کنش و سپس حالت شوک معرفی می‌شوند و در ادامه، حالت شوک روی درخت کیلی با برهم‌کنش نزدیکترین همسایگی مطالعه می‌گردد و در آخر، این مدل توسط روش بازه-پُر در حالت پایا و دینامیکی حل می‌شود.

۲. سیستمهای تصادفی

اگر یک سکه را بیاندازیم ممکن است شیر یا خط بیاید. معین کردن حالت سکه قبل از انداختن سکه با داشتن شرایط اولیه دقیق امکان‌پذیر است، اما تعیین شرایط اولیه سکه عملاً کار آسانی نیست. قبل از انداختن سکه می‌توان راجع به احتمال آمدن شیر یا خط صحبت کرد. مثلاً اگر سکه سالم و متقارن باشد احتمال آمدن شیر $\frac{1}{2}$ و احتمال آمدن خط نیز $\frac{1}{2}$ است. به چنین سیستمهایی که تحولشان تصادفی است و با احتمال توصیف می‌شود، سیستمهای تصادفی می‌گوییم. منظور از تحول سیستم، تغییر حالت آن با گذشت زمان است. تحول سیستم می‌تواند زمان پیوسته یا زمان گسسته باشد. مثلاً برای سکه، هر بار انداختن سکه را می‌توانیم یک پله زمانی در نظر بگیریم و تحول آن را به صورت زمان گسسته توصیف کنیم. سکه یک سیستم تصادفی دو حالتی است (شیر و خط). یک شبکه در نظر بگیریم. هر جایگاه می‌تواند پر یا خالی باشد. پُر و خالی بودن

- ۵- اشتقاق به راست (Branching to the right) $\omega_{۳۳}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۶- اشتقاق به چپ (Branching to the left) $\omega_{۳۲}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۷- خلق در راست $\omega_{۲۱}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۸- خلق در چپ $\omega_{۳۱}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۹- فنا در راست $\omega_{۱۲}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۱۰- فنا در چپ $\omega_{۱۳}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۱۱- خلق $\omega_{۴۱}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۱۲- فنا $\omega_{۱۴}:۰۰ \rightarrow ۰۰$

۵. شوک

۵.۱. بردار احتمال شبکه L جایگاهی

۵.۱.۱. بردار احتمال

یک شبکه L جایگاهی در نظر می‌گیریم، هر جایگاه یا خالی است و یا حداکثر با یک ذره پر است. همه ذرات در شبکه همونوع هستند و آنها را A می‌نامیم. $|0\rangle$ به حالت خالی و $|1\rangle$ به حالت پر یک جایگاه نسبت داده می‌شود. $|0\rangle$ و $|1\rangle$ پایه فیزیکی فضای برداری جایگاه مورد نظر را تشکیل می‌دهند:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اگر احتمال حضور ذره در جایگاه i ام ρ_i باشد، حالت جایگاه i ام که با u_i نشان داده می‌شود، به صورت زیر است:

$$u_i = \rho_i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \rho_i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_i \\ \rho_i \end{pmatrix}$$

شبکه مورد نظر، یک سیستم 2^L حالتی است که حالت‌هایش با $E_i (i = 1, 2, \dots, 2^L)$ نشان داده می‌شود. در حالت کلی بردار احتمال سیستم ترکیبی خطی از E_i ها است.

$$|P\rangle = \sum_{i=1}^{2^L} P^i E_i,$$

P^i ها اعداد حقیقی نامنفی هستند و در کلی‌ترین حالت تنها قیدی که بین آنها وجود دارد، این است که:

$$\sum_{i=1}^{2^L} P^i = 1$$

۵.۲. حالت‌های برنولی و شوک در شبکه L جایگاهی

فرض کنید P^i ها به گونه‌ای باشند که بردار احتمال سیستم،

هر جایگاه، دو حالتی است که هر جایگاه می‌تواند به خود بگیرد. تاس نیز یک سیستم تصادفی شش حالتی است. یک سیستم تصادفی N حالتی در هر زمان با احتمال $P_i(t)$ در حالت i ام اش است. توجه داریم که همواره:

$$\sum_{i=1}^N P_i(t) = 1.$$

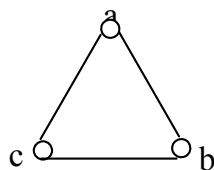
۳. سیستمهای پخش و برهم‌کنش

یک دسته از سیستمهای تصادفی، سیستمهای پخش و برهم‌کنش هستند. در این سیستمها تعدادی ذره از یک یا چند نوع، روی یک شبکه یا پیوستار حرکت می‌کنند و پخش می‌شوند و به دلیل برهم‌کنش با یکدیگر تعدادشان ممکن است تغییر کند. علاوه بر برهم‌کنش دو جایگاهی که می‌تواند منجر به تغییر تعداد ذرات شود، ورود و خروج ذره از مرزهای سیستم هم می‌تواند تعداد ذرات را تغییر دهد.

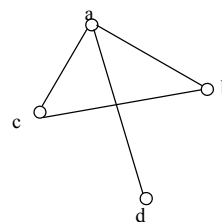
۴. شبکه دو جایگاهی

ساده‌ترین مثال، شبکه دو جایگاهی است، با این فرض که هر جایگاه یا خالی است یا حداکثر با یک ذره پر است. این که فقط یک ذره جایگاه را اشغال می‌کند، موسوم به فرآیند طرد است. اگر تنها پر و خالی بودن جایگاه مورد نظر باشد برای هر جایگاه ۲ حالت وجود دارد، اما اگر نوع ذره اشغال کننده هم مهم باشد، در این صورت بسته به نوع ذره درون جایگاه حالت‌های متفاوتی خواهیم داشت. با فرض ۲ حالتی بودن هر جایگاه، شبکه ما یک سیستم ۴ حالتی خواهد بود. این ۴ حالت با فرآیندهای گذار که تعداد آنها در کلی‌ترین حالت ۱۲ فرآیند است، به یکدیگر تبدیل می‌شوند. فرآیندهای ذکر شده و نرخهای مربوطه ω_{ij} عبارتند از:

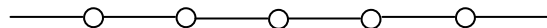
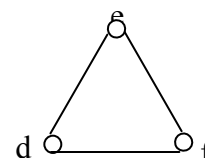
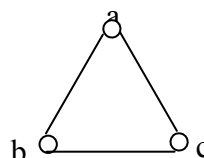
- ۱- پخش به راست (Diffusion to the right) $\omega_{۲۳}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۲- پخش به چپ (Diffusion to the left) $\omega_{۳۲}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۳- انعقاد به راست (Coalescence to the right) $\omega_{۲۴}:۰۰ \rightarrow ۰۰$
- ۴- انعقاد به چپ (Coalescence to the left) $\omega_{۳۴}:۰۰ \rightarrow ۰۰$



شکل ۲. مدار بسته به طول ۳.



شکل ۱. گراف

شکل ۴. نمایشی از درخت کیلی با $\xi = 2$ ، شبکه یک بعدی.

شکل ۳. گراف ناهمبند.

جایگاهها ρ_i باشد، بردار احتمال سیستم را که به حالت شوک موسوم است با e_m نشان می‌دهیم.

$$e_m(\rho_1, \rho_2) = u^{\otimes m} \otimes v^{\otimes(L-m)},$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 - \rho_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 - \rho_2 \\ \rho_2 \end{pmatrix}.$$

۶. حالت شوک روی درخت کیلی

گراف از مجموعه‌ای از رأسها و یالها تشکیل می‌شود، V معرف رأس و E معرف یال است. به‌طور مثال، شکل ۱ یک گراف است: که a, b, c و d رأسها هستند و ab, ac, cb و ad یالها هستند.

منظور از مدار در شکل ۲ مشخص می‌شود: که به آن مدار بسته به طول ۳ گفته می‌شود. چنانچه در یک گراف، بین هر دو رأس حداقل یک مسیر داشته باشیم، آن گراف را همبند می‌گویند مانند شکل ۲. اما در شکل ۳ هر دو گراف به‌طور مستقل همبند هستند، اما از آنجا که بین رأسهای c و d مسیری وجود ندارد، در کل تشکیل یک گراف همبند نمی‌دهند و به آن ناهمبند می‌گویند. درخت به‌عنوان گرافی همبند، که فاقد دور است تعریف می‌شود. در این بخش مدل‌های پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی بررسی خواهد شد. درخت کیلی با عدد ξ از یک گره اصلی شروع می‌شود که ξ همسایه به آن وصل هستند، هر همسایه خودش ξ همسایه دارد و در درخت کیلی مدار بسته‌ای وجود ندارد (شکل ۴).

حاصل ضرب تانسوری بردار احتمال تک تک جایگاهها باشد. این حالت، حالت خاصی است که در آن قیدهای بیشتری بین P^i ها برقرار است، به طوری که $|P\rangle$ حاصل ضرب تانسوری L بردار دو بعدی است. اگر احتمال حضور ذره در جایگاه i ام ρ_i باشد، حالت مورد نظر به شکل زیر است:

$$|P\rangle = \bigotimes_{i=1}^L u_i,$$

در این صورت:

$$\langle n_i \rangle = \rho_i,$$

و توابع N نقطه‌ای حاصل ضرب N تابع تک نقطه‌ای خواهند بود، یعنی حضور ذره در هر جایگاه مستقل از جایگاههای دیگر است و به عبارتی همبستگی n_i ها صفر هستند.

$$\langle n_i n_j \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle = \rho_i \rho_j,$$

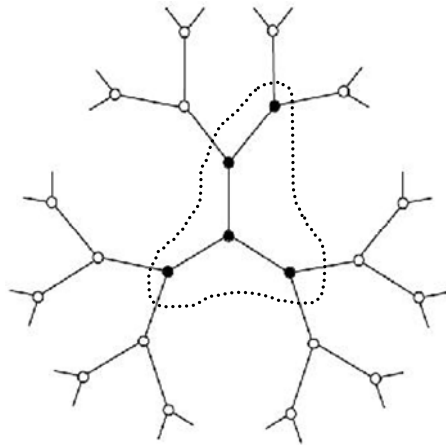
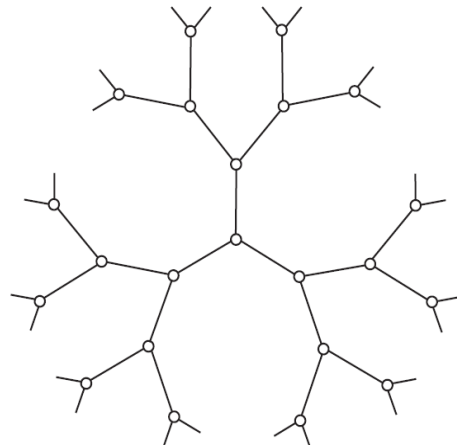
$$\langle n_i n_j n_k \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle \langle n_k \rangle = \rho_i \rho_j \rho_k.$$

⋮

در این وضعیت اگر احتمال حضور ذره در همه جایگاهها برابر با مقدار ρ باشد، بردار احتمال سیستم را حالت برنولی می‌گوییم و آن را با $|P\rangle_B$ نشان می‌دهیم.


$$P_n^e(t) = P_1^e(t) [b(t)]^{n-1}.$$

اگر احتمال حضور ذره در m جایگاه اول ρ_1 و در بقیه

شکل ۶. درخت کیلی با $\xi = 3$ و $n = 5$ شکل ۵. نمایشی از درخت کیلی با $\xi = 3$.

نخواهند داشت، برای مثال برهم‌کنشی به صورت $\bullet\bullet \rightarrow \circ\circ$ ، سبب می‌شود داخل خوشه n تایی از جایگاههای پُر به هم متصل، جایگاههای خالی ایجاد شود که دیگر تعریف اصلی شوک را نقض می‌کند و این آرایشهای خاص بر حسب P_n ها قابل بیان نمی‌باشند. از میان دوازده برهم‌کنشی که به عنوان برهم‌کنشهای مجاز بین دو جایگاه مجاور به هم، معرفی شد، ده برهم‌کنش به شرح زیر غیر مجازند:

برهم‌کنشهای $\bullet\bullet \rightarrow \bullet\bullet$ و $\circ\circ \rightarrow \bullet\bullet$ غیرمجازند، زیرا

آریشی مانند  یا به طور کلی آرایش $(\bullet\bullet \dots \bullet)$ به

آریش  یا به طور کلی $(\bullet\bullet \dots \bullet\bullet)$ تبدیل

می‌گردد. این برهم‌کنشها سبب شده‌اند شبکه پیوسته‌ای که شامل n جایگاه متصل به هم و پُر بود به دو قسمت بشکند و دیگر مفهوم شوک برقرار نمی‌باشد، زیرا شوک در شبکه‌ای قابل تعریف بود که یک ناحیه با یک چگالی ρ_1 پُر باشد و بقیه شبکه با چگالی ρ_2 خالی باشد. در نتیجه دیگر معادله مادر بسته نمی‌ماند و بر حسب P_n ها قابل بیان نمی‌باشد. برای نوشتن معادله تحول زمانی $P_n(t)$ باید برهم‌کنشهایی را انتخاب کنیم که یک مجموعه کاملاً پُر را به یک مجموعه پُر بزرگتر یا کوچکتر تبدیل کند.

همچنین برهم‌کنشهای $\bullet\bullet \rightarrow \bullet\bullet$ ، $\bullet\bullet \rightarrow \circ\circ$ و $\circ\circ \rightarrow \bullet\bullet$ غیر

و درخت کیلی با $\xi = 3$ ، به صورت زیر است (شکل ۵): دو جایگاه روی درخت کیلی هرگاه توسط یک رابط به یکدیگر وصل شوند، همسایه نامیده می‌شوند، در اینجا پُر(خالی) با \bullet (\circ) نشان داده می‌شود.

درخت کیلی با عدد $\xi \geq 3$ را در نظر بگیرید. به هر گره روی درخت کیلی یک جایگاه نسبت داده می‌شود. چنانچه خوشه n تایی از جایگاههای متصل به هم، روی درخت کیلی، با احتمال $\rho = 1$ پُر باشند و بقیه جایگاههای روی درخت کیلی خالی باشند، آنگاه به این آرایش خاص روی درخت کیلی، حالت شوک می‌گویند (شکل ۶).

به طور کلی تغییرات ناپیوسته چگالی، به طور مرسوم حالت شوک نامیده می‌شود. برای مثال برای $\xi = 3$ ، تابع احتمال وابسته به زمان $P_n(t)$ ، معرف احتمال آن است که یک مجموعه n تایی متصل به هم در زمان t روی درخت کیلی پُر و بقیه شبکه خالی باشد.

در اینجا تحول زمانی تابع احتمال وابسته به زمان $P_n(t)$ بررسی خواهد شد. به عبارت دیگر شوک همانند خوشه در درخت کیلی است و بررسی تحول خوشه در درخت کیلی مورد نظر است. در ابتدا باید معادله تحول زمانی مربوط به چنین آریشی نوشته شود. معادله تحول به شرط آن که کلیه جملات این معادله را بتوان بر حسب P_n ها بیان نمود، بسته خواهد بود.

تعدادی از برهم‌کنشها، معادله تحول زمانی را بسته نگه

$$\frac{dP_n}{dt} = -r_n R_n P(\text{○} \text{---} \text{●} \text{---} \text{○}) + r_{n-1} R_{n-1} P(\text{○} \text{---} \text{●} \text{---} \text{○}) \quad (۱)$$

R_n ، تعداد همسایگیهای متصل به شبکه n تایی متصل به هم کاملاً پُر می باشد. R_{n-1} ، تعداد همسایگیهای متصل به شبکه $(n-1)$ تایی متصل به هم کاملاً پُر می باشد. در نتیجه معادله تحول زمانی $P_n(t)$ به شکل بسته در می آید:

$$\frac{dP_n}{dt} = -r_n R_n P_n(t) + r_{n-1} R_{n-1} P_{n-1}(t). \quad (۲)$$

۷. حل معادله تحول تابع احتمال $P_n(t)$

۷.۱. جواب حالت ایستا

ابتدا حل ایستای معادله تحول زمانی $P_n(t)$ بررسی خواهد شد، به طوری که:

$$\frac{dP_n^s}{dt} = 0$$

در نتیجه:

$$-R_n P_n^s + R_{n-1} P_{n-1}^s = 0, \quad n > 1 \quad (۳)$$

جواب معادله فوق $n > 1$ ، $P_n^s = \frac{C}{R_n}$ می باشد، زیرا این پاسخ در معادله (۳) صدق می کند. برای تعیین ثابت C ، معادله مربوط به $n=1$ بررسی می شود. برای نوشتن معادله تحول $n=1$ ، ابتدا باید چشمه و چاههای مربوطه معرفی گردد. شکل ۷ حالت $n=1$ و $\xi=3$ را نشان می دهد. تنها جمله موجود، چاه می باشد:

$$P(\text{○} \text{---} \text{●} \text{---} \text{○}), \quad \text{چاه}$$

در نتیجه:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -r_1 R_1 \{ P(\text{○} \text{---} \text{●} \text{---} \text{○}) \},$$

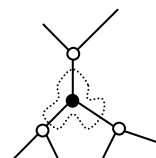
که این معادله دارای فرم بسته زیر می باشد:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -r_1 \xi P_1,$$

حل ایستای این معادله، $P_1 = 0$ است. از مقایسه پاسخ حالت $n=1$ و $n > 1$ ، نتیجه می شود که $C=0$ است و:

$$P_n^s = 0,$$

تنها جواب قابل قبول برای چنین شبکه ای در حالت ایستا $P_n^s = 0$ است، که این نتیجه با توجه به شرطی که روی نرخها



شکل ۷. درخت کیلی با $\xi=3$ و $n=1$.

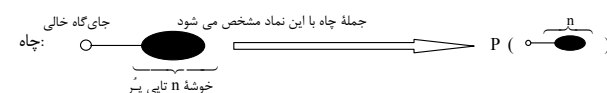
قابل قبول هستند، زیرا مجموعه n تایی متصل به هم و پُر $(\dots \circ \circ \circ)$ را به آرایشهای به ترتیب، به صورت $(\dots \circ \circ \circ)$ یا $(\dots \circ \circ \circ)$ تبدیل می کنند که باز مشکل فوق تکرار می شود. برهم کنشهای $\circ \circ \rightarrow \circ \circ$ و $\circ \circ \rightarrow \circ \circ$ ، غیر قابل قبول هستند، زیرا آرایش $(\dots \circ \circ \circ)$ را به آرایش $(\dots \circ \circ \circ)$ تبدیل می کند و همچنین برهم کنشهای $\circ \circ \rightarrow \circ \circ$ و $\circ \circ \rightarrow \circ \circ$ غیرمجازند زیرا

برای مثال آرایش یک پارچه به آرایش دو پارچه تبدیل می شود.

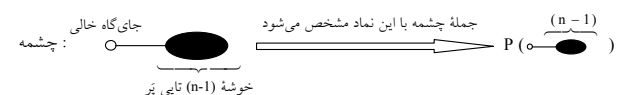
و در آخر، برهم کنش $\circ \circ \rightarrow \circ \circ$ غیر قابل قبول است. زیرا به طور مثال آرایش $(\dots \circ \circ \circ \dots \circ \circ \circ \circ)$ را به آرایش $(\dots \circ \circ \circ \dots \circ \circ \circ \circ)$ تبدیل می کند. و با توجه به توضیحات فوق تنها برهم کنش مجاز به شرح زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \circ \circ \rightarrow \circ \circ \quad r_1, \\ \circ \circ \rightarrow \circ \circ \quad r_1. \end{aligned}$$

برای نوشتن معادله تحول زمانی، نیاز است جملات چشمه و چاه مشخص شود.



معرف احتمال آن است که یک جایگاه خالی به مجموعه n تایی کاملاً پُر وصل باشد.



معرف احتمال آن است که یک جایگاه خالی به مجموعه $(n-1)$ تایی کاملاً پُر وصل باشد. در نتیجه معادله تحول زمانی خوشه روی درخت کیلی، به صورت زیر است:

جواب حدسی در معادله فوق به دست خواهد آمد:

$$B = \frac{P_1 \xi}{\xi - 2}, \quad \xi \geq 3$$

در نتیجه پاسخ کلی برای $n=2$ به فرم زیر است:

$$P_r^\xi(t) = P_r^{\xi_1} e^{-r_1 R_1 t} + P_r^{\xi_2} \frac{\xi}{\xi - 2} e^{-r_2 R_2 t}.$$

بدین ترتیب می توان برای محاسبه ξ_k و P_k ، این فرآیند را ادامه داد. چنانچه جواب عمومی معادله (۲) به شرح زیر باشد:

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^n A_{n,k} e^{-r_k R_k t} \quad (4)$$

با جایگذاری معادله (۴) در معادله تحول (۲) به دست می آید:

$$\begin{cases} A_{n,k} = \frac{R_{n-1}}{R_n - R_k} A_{n-1,k}, & k \neq n \\ A_{k,k} = P_k^\xi, & k = n \end{cases} \quad (5)$$

ابتدا به چند جمله ای P_r و P_r توجه می شود:

$$P_r(t) = \sum_k A_{r,k} e^{-r_k R_k t},$$

$$P_r(t) = A_{r,1} e^{-r_1 R_1 t} + A_{r,2} e^{-r_2 R_2 t},$$

$$P_r(t) = P_1^\xi \frac{\xi}{\xi - 2} e^{-r_1 R_1 t} + A_{r,2} e^{-r_2 R_2 t}.$$

با توجه به پاسخی که در محاسبه قبل برای $P_r(t)$ ارائه شد و مقایسه با پاسخ فوق نتیجه می شود:

$$A_{r,2} = P_1^\xi.$$

همچنین P_r به صورت زیر است:

$$P_r = A_{r,1} e^{-r_1 R_1 t} + A_{r,2} e^{-r_2 R_2 t} + A_{r,3} e^{-r_3 R_3 t},$$

$$A_{r,2} = \frac{R_r}{R_r - R_2} A_{r,2} = \frac{R_r}{R_r - R_2} P_1^\xi,$$

$$A_{r,1} = \frac{R_r}{R_r - R_1} A_{r,1} = \frac{R_r}{R_r - R_1} \cdot \frac{R_1}{R_r - R_1} P_1^\xi.$$

پاسخ کلی برای P_n به شرح زیر است:

$$P_n(t) = \sum_k A_{n,k} e^{-r_k R_k t}$$

$$= A_{n,1} e^{-r_1 R_1 t} + A_{n,2} e^{-r_2 R_2 t} + \dots + P_n^\xi e^{-r_n R_n t},$$

به طوری که:

$$A_{r,1} = \frac{R_{n-1}}{R_n - R_k} \times \frac{R_{n-2}}{R_{n-1} - R_k} \times \dots \times \frac{R_k}{R_{k+1} - R_k} \times P_k,$$

بود، قابل قبول است و احتمال پُر بودن هر مجموعه n تایی صفر است و کل شبکه پر می باشد زیرا در برهم کنش مورد قبول، ذره خلق می گردد.

۲.۷. جواب حالت دینامیکی

برای بررسی حالت دینامیکی معادله (۲)، پاسخی به صورت زیر که وابستگی زمانی آن به صورت نمایی باشد، حدس زده می شود:

$$P_n^\xi(t) = P_n^\xi e^{\xi t}.$$

با جایگذاری در معادله تحول (۲):

$$\{r_1 [n(\xi - 2) + 2] + \xi\} P_n^\xi - \{r_1 [(n-1)(\xi - 2) + 2]\} P_{n-1}^\xi = 0.$$

به دست خواهد آمد.

به عنوان مثال برای $n=1$

$$\frac{d P_1}{dt} = -r_1 \xi P_1.$$

چنانچه $P_1 \neq 0$ فرض شود و جواب حدسی $P_1^\xi(t) = P_1^\xi e^{\xi t}$

باشد، $\xi = -r_1$ خواهد بود. حال $n=2$ بررسی می شود، با فرض اینکه $P_1 \neq 0$ و $P_2 = 0$:

$$\frac{d P_2(t)}{dt} = -r_2 R_2 P_2(t),$$

در اینجا $\xi = -r_2 R_2$ به دست خواهد آمد. اما چنانچه فرض شود: $P_2 \rightarrow 0$ و $P_1 \neq 0$ می باشد، آنگاه معادله تحول مربوطه به فرم زیر است:

$$\frac{d P_2(t)}{dt} = -r_2 R_2 P_2(t) + r_1 R_1 P_1(t).$$

پاسخ کلی برای $P_2^\xi(t)$ دارای دو جزء است، جواب خاص و جواب همگن. برای بخش همگن معادله مربوطه به شرح زیر است:

$$\frac{d P_2(t)}{dt} + r_1 R_1 P_2(t) = 0,$$

که پاسخ آن $P_2(t) = P_2^\xi e^{-r_1 R_1 t}$ است. اما برای محاسبه جواب خاص، باید معادله زیر حل شود:

$$\frac{d P_2}{dt} + r_1 R_1 P_2 = r_1 R_1 P_1 e^{-r_1 R_1 t}.$$

جواب حدسی برای چندین معادله ای $P_2^\xi(t) = P_2^\xi e^{-r_1 R_1 t} + B e^{-r_2 R_2 t}$ می باشد، با جایگذاری این

در نتیجه دو دسته معادله حاصل می‌شود:

$$\frac{d P_1^{\varepsilon}(t)}{dt} = 0. \quad (6)$$

$$(n-1) \frac{d}{dt} b(t) = [-r_1 R_n b(t) + r_1 R_{n-1}], \quad (7)$$

پاسخ معادله (۶): $P_1^{\varepsilon}(t) = P_1^{\varepsilon}(0)$ است و پاسخ معادله (۷):

$$P_n^{\varepsilon}(t) = P_1^{\varepsilon}(0) \left[b_0 e^{-r_1 R_n t} \right] + \frac{P_1^{\varepsilon}(0) R_{n-1}}{R_1},$$

است که $r_1 R_n$ همان ε_n است که در بخش دینامیکی به دست آمد. در $t \rightarrow \infty$ ، پاسخ دینامیکی تبدیل به حالت ایستا می‌شود.

۸. نتیجه‌گیری

حالت شوک روی درخت کیلی ارائه گردید. معادله تحول زمانی تابع احتمال وابسته به زمان $P_n(t)$ (معرف احتمال آن است که یک مجموعه n تایی متصل به هم در زمان t روی درخت کیلی پُر و بقیه شبکه خالی باشد)، توسط روش بازه-پُر به طور دقیق حل و بررسی شد و معادله تحول برای این سیستم به فرم بسته درآمد و همچنین به طور دقیق حالت پایای چنین مدلی بررسی شد و نتیجه حاصل این است که در آرایش حالت پایا، احتمال پر بودن هر مجموعه n تایی محدود، صفر است در نتیجه کل شبکه پر می‌باشد. و بعد از بررسی حالت دینامیکی آن طیف هامیلتونی این سیستم محاسبه گردید و طیف گسسته هامیلتونی به دست آمد.

قدردانی

نویسنده مقاله از راهنماییها و زحمات اساتید ارجمند آقایان دکتر آقا محمدی به عنوان استاد راهنما و دکتر خرمی به عنوان استاد مشاور در دوره دکتری، کمال تشکر را دارد.

که به صورت ساده‌تر شده زیر می‌توان $A_{n,k}$ را نمایش داد:

$$A_{n,k} = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{R_{n-(i-1)}}{R_{(n-i)} - R_k} \right] \times P_k.$$

با جایگذاری R_n (تعداد همسایگی در یک مجموعه n تایی)، به دست خواهد آمد:

$$A_{n,k} = \left[\prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{(n-i-1)(\xi-2)+2}{(n-i-k)(\xi-2)} \right] \times P_k.$$

با استفاده از رابطه $n \Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{\Gamma\left(n-i-\frac{2}{\xi-2}\right)}{\Gamma\left(n-i-1-\frac{2}{\xi-2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(n-i-k)}{\Gamma(n-i-k+1)} \cdot P_k \\ &= \frac{\Gamma\left(n+\frac{2}{\xi-2}\right)}{\Gamma(n-k+1) \Gamma\left(k+\frac{2}{\xi-2}\right)} \cdot P_k \end{aligned}$$

از طرف دیگر جواب حدسی و خاص دیگری نیز برای حل دینامیکی معادله تحول زمانی $P_n(t)$ می‌توان ارائه داد، که این پاسخ حالت خاصی از پاسخ عمومی است، که برای $P_n(t)$ در روابط فوق معرفی گردید.

$$P_n^{\varepsilon}(t) = P_1^{\varepsilon}(t) [b(t)]^{n-1}.$$

خاصیتی که این جواب خاص دارد این است که در $t=0$ احتمال پیدا کردن شوک به سائز مجموعه n تایی بستگی دارد. با جایگذاری این پاسخ خاص در معادله تحول، معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} b^{n-1}(t) \frac{d P_1^{\varepsilon}(t)}{dt} + P_1^{\varepsilon}(t) (n-1) b^{n-2}(t) \frac{d}{dt} b(t) \\ = -r_1 R_n P_1^{\varepsilon}(t) b^{n-1}(t) + r_1 R_{n-1} P_1^{\varepsilon}(t) b^{n-2}(t). \end{aligned}$$

مراجع

1. B Derrida, L Lebowitz, and E R Speer, *J. Stat. Phys.* **89** (1997) 135.
2. V Popkov, and G M Schütz; *J. Stat. Phys.* **112** (2003) 523.
3. V Belitsky. and G M Schütz; *Electronic Journal of Probability* **7** (2002)1.
4. K Krebs, F H Jafarpour, and G M schütz; *New Journal of Physics*, **5** (2003) 1451.
5. C Pigorsch and G M Schütz; *J. Phys.* **A33** (2000) 7919.
6. F H Jafarpour; *Physics Letters A* **326** (2004) 14-19.
7. M Arabalsamani and A Aghammohamadi; *Phys. Rev. E* **74** (2006).
8. L F Matin, A Aghammohamadi and M Khorrami; *Eur. Phys. J. B* **56** (2007) 243-246.