

محاسبه ضریب عبور تشدید تونل زنی از چند لایه های GaAlAs/GaAs

لیلا مقدسی، عبدالله مرتضی علی و رضا ثابت داریانی
گروه فیزیک دانشگاه الزهرا (س)

(دریافت مقاله: ۸۲/۱/۱۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۸/۱۴)

چکیده

در این مقاله نظریه تشدید تونلی در چند لایه های $Al_xGa_{1-x}As / GaAs$ ، بررسی شده است. طیف انرژیهای تشدید و وابستگی آن به ساختمان سد از روی منحنیهای عبور سد، برحسب انرژی و مشخصه جریان-ولتاژ در دمای مشخص و سطوح فرمی معین، آنالیز شده است. فرمالیزم حاضر بر اساس تقریب جرم موثر است و نتایج بر اساس محاسبات عددی مستقیم به دست آمده است. تا به حال توسط دیگران این محاسبات برای حالت ۳ سد انجام شده است و در این مقاله برای ۴ سد و ۵ سد پتانسیل، منحنی ضریب عبور را بر حسب انرژی در ولتاژهای بایاس مختلف و دماهای متفاوت و همچنین در انرژیهای پایین بررسی کرده ایم.

واژه‌های کلیدی: ضریب عبور، چاه کوانتومی چند تایی، نیمه رسانای فرانازک، سدپتانسیل، ساختار تونل زنی

۱. مقدمه

امروزه تکنیکهای جدید رشد، نظیر برآرایی باریکه مولکولی^۱ و نشست بخار شیمیایی فلزآلی^۲، این امکان را فراهم می سازد که بتوان ساختارهای نیمه رسانای فرانازک با کیفیت بالا را تهیه کرد. اصطلاح فرانازک به ضخامت‌های فیلمی گفته می شود که قابل مقایسه با شعاع بور اکسایتون باشد. به فیلمهای نیمه رسانای با ضخامت کمتر از 100 \AA ، سیستمهای شبه دو بعدی محدود شده کوانتومی گفته می شود. یک رده از چنین سیستمهای شبه دوبعدی رشد داده شده به طریق مصنوعی، ساختارهای چاه کوانتومی است. تک چاه کوانتومی شامل لایه فرانازک نیمه رسانای با گاف کوچک است که بین لایه‌های نیمه رسانای گاف بزرگتر، محدود شده باشد [۱]. نمونه‌ای که بررسی می کنیم، لایه نازک $GaAs$ با انرژی $1/5 \text{ eV}$ است که بین لایه‌های آلیاژ سه تایی $Al_xGa_{1-x}As$ قرار می گیرد. x کسر مولی

آلومینیوم است و در محدوده $0 < x < 1$ قرار دارد. $AlAs$ خالص نیمه رسانای با گاف غیرمستقیم است، ولی برای $x < 0.45$ ، $Al_xGa_{1-x}As$ دارای گاف مستقیم است، که بسته به غلظت Al قدری از 2 eV کمتر می باشد. وقتی رشد لایه‌های $GaAs - Al_xGa_{1-x}As$ ادامه یابد به طوری که لایه‌های زیادی نمونه $GaAs$ را در برگردد و از یکدیگر توسط لایه‌های نازک $Al_xGa_{1-x}As$ فاصله گرفته باشند، چاه کوانتومی چند تایی (MQW) حاصل می شود. نوعاً ساختار می تواند شامل تناوبهای صدتایی از لایه‌های $GaAs$ نازک به ضخامت 100 \AA باشد که توسط لایه‌های $AlGaAs$ با پهنای قدری بیشتر از 150 \AA از هم فاصله دارند [۲].

رده مهم دیگری از ساختارهای فیلم نازک، فراشبکه‌ها هستند که ضخامت‌های $GaAs$ و $AlGaAs$ هر دو فوق نازک‌اند. مثلاً تناوبهای صدتایی چاههای $GaAs$ به ضخامت 250 \AA بین سدهای $AlGaAs$ به ضخامت 50 \AA می باشد. در فراشبکه‌ها توابع موج الکترونی از چاههای مجاور، روی هم می افتند تا خواص

۱. Molecular Beam Epitaxy (MBE)

۲. Metal Organic Chemical Vapor Deposition (MOCVD)

به لایه دیگر و $\eta = \frac{\sqrt{m^*(GaAs)}}{h^2}$ و $E_t = \frac{h^2 k_t^2}{\sqrt{m^*(GaAs)}}$ انرژی
 قطع در یک لایه $GaAs$ است. با به کارگیری معادله (۳) و اعمال
 شرط زیر

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} \left[\frac{\psi'(\zeta)}{\gamma(\zeta)} \right]' d\zeta = 0 \quad (4)$$

شرط فوق مستلزم این است که $\psi(z)$ و $\frac{\psi'(z)}{\gamma(z)}$ هر جایی
 شامل فصل مشترکها، پیوسته باشند.

برای مطالعه حالت‌های پراکنده و برای حل اتوماتیک انطباق
 در فصل مشترکها و ساده سازی محاسبات عددی، بردارهای
 $\Gamma(z)$ را ایجاد می کنیم.

$$\Gamma(z) = \begin{bmatrix} \psi(z) \\ \frac{\psi'(z)}{\gamma(z)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

که مولفه‌های آن پیوسته هستند و جفت معادلات زیر را ارضا
 می کنند:

$$\Gamma_{\psi}'(z) = \gamma(z) \Gamma_{\psi}(z) \quad (6)$$

$$\Gamma_{\psi}'(z) = -\eta \left[E - \frac{Et}{\gamma(z)} - U(z) \right] \Gamma_{\psi}(z)$$

سازگار با معادله (۳). به سادگی مشخص می شود که $\Gamma(Z)$ بر
 حسب S مشخص می شود:

$$\Gamma(z) = S(z, z') \Gamma(z') \quad (7)$$

$$S(z, z') = \begin{pmatrix} \Gamma_{\psi}^{(1)}(z) & \Gamma_{\psi}^{(2)}(z') \\ \Gamma_{\psi}^{(1)}(z) & \Gamma_{\psi}^{(2)}(z') \end{pmatrix} \quad \text{که در آن}$$

جایی که $\Gamma^{(1)}$ و $\Gamma^{(2)}$ حلهای ویژه از معادله (۶) و واجد
 شرایط ابتدایی زیر می باشد:

$$\Gamma^{(1)}(z') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \Gamma^{(2)}(z') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

باید به نکات زیر توجه داشت:

۱- براساس معادله (۷)، وقتی $z = z'$ باشد، $S(z, z')$ به
 ماتریس واحد می رسد.

۲- از آنجا که دترمینان $S(z, z')$ ، رنسکین معادله (۳) می باشد،

ساختاری متفاوتی را نسبت به چاههای کوانتومی چند تایی
 به وجود آورند.

چاههای کوانتومی، ساختارهایی را که دارای سدهای نازکی
 هستند به نحوی که توابع موج الکترونی از چاههای مجاور
 روی هم بیفتند را فرا شبکه می خوانند. سدهای نازک تونل زنی
 ذرات از یک چاه به چاه دیگر با عبور از سد را امکان پذیر
 می سازند. این امر اثرات جدیدی را فراهم می سازد که به ابزاری
 جدید و خواص ترا برد (انتقالی) جالب توجهی می انجامد و به
 پدیده تشدید تونلی منجر می گردد.

۲. نظریه تونل زنی چند لایه ای (فرمالیزم عمومی)

خواص بعضی از سیستمهای چند سدی با به کار گیری یک
 فرمالیزم انتقال با حل معادله شرودینگر یک بعدی با شرایط
 موج پراکنده محاسبه می شود، سپس محاسبه عبور سد و از آن
 شار ذره و نهایتاً برای به دست آوردن جریان، روی توزیع فرمی
 - دیراک ابتدایی و انتهایی میانگین گیری می شود. به طور ویژه
 دو اتصال با یک ناحیه ($0 < z < L$) جدا شده اند را در نظر بگیرید
 که ضخامت موثر و ارتفاع سد ولتاژ بایاس شده در آن موثر
 است که این ناحیه سد به وسیله یک انرژی پتانسیل یک بعدی
 توصیف می شود، بنابراین برای یک الکترون داریم:

$$U(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ u_L(z) & 0 \leq z \leq L \\ -eV_a & z > L \end{cases} \quad (1)$$

که در آن u_L ارتفاع سد در پهنای L می باشد و لبه باند در
 اتصال چپ در انرژی صفر قرار دارد، مشروط بر اینکه ضخامت
 هر لایه در چند لایه در مقایسه با ابعاد شبکه کوچک
 باشد، حرکت طولی ممکن است از حرکت عمودی جدا بشود.
 نتیجتاً یک الکترون با جرم موثر m^* به وسیله تابع موج جدا
 پذیر تشریح می شود.

$$\varphi(r, z) = A e^{i \bar{k}_t \cdot \bar{r}} \varphi(z) \quad (2)$$

$$\left[\frac{\psi'}{\gamma(z)} \right]' + \eta \left[E - \frac{Et}{\gamma(z)} - U(z) \right] \psi = 0 \quad (3)$$

در رابطه بالا $\gamma(z) = \frac{m^*(z)}{m^*(GaAs)}$ بیانگر تغییر جرم از لایه ای

(۱۵)

$$T(E, E_t) = Tr(r(E, E_t)) = Tr(e^{i\alpha} r(E, E_t)) = \frac{k \cdot |M_{22}|^2}{|M_{21}|^2 K}$$

$$R(E, E_t) =$$

$$R(r(E, E_t)) = R(r(E + eV_a, E_t)) = \frac{|M_{12}|^2}{|M_{22}|^2} \quad (16)$$

قابل توجه است که شرایط (۱۲) با یکدیگر یا معادله (۱۵) و (۱۶) نتیجه می‌دهند که: $R+T=1$ که به معنای این است که، تعداد ذرات بقاء دارد. همچنین وقتی معادله (۱۱) بسط داده شود به دست می‌آید:

$$M_{22} = \left(S_{11} + K \cdot \frac{S_{22}}{K} \right) + i \left(\frac{S_{21}}{K} - \frac{K}{S_{12}} \right) \quad (17)$$

معادله (۱۵) را با جملات S جایگذاری می‌کنیم:

$$T(E, E_t) = \frac{4K \cdot /K}{\left(S_{11} + K \cdot \frac{S_{22}}{K} \right)^2 + \left(K \cdot S_{12} - S_{21}/K \right)^2} \quad (18)$$

یا از معادله (۷) به‌طور مستقیم در عباراتی از مولفه‌های Γ نتیجه می‌دهد:

(۱۹)

$$T(E, E_t) =$$

$$\frac{4K \cdot /K}{\left[\Gamma_{\uparrow}^{(r)}(L) + K \cdot \Gamma_{\uparrow}^{(l)}(L)/K \right]^2 + \left[K \cdot \Gamma_{\uparrow}^{(r)}(L) - \Gamma_{\uparrow}^{(l)}(L)/K \right]^2}$$

این عبارت برای ضریب عبور، کار گذشته را در دو منظور مهم

اصلاح می‌کند: یکی اینکه فاکتور $\left(\frac{K}{K}\right)$ که سابقاً در بعضی

مشتقات گم شده بود، حالا ظاهر شده است و T اکنون به هر دو

متغیر مستقل E و E_t ، به جای اختلاف آنها $(E - E_t)$

بستگی دارد. دانسته جریان J ممکن است به‌صورت میانگین

حاصلضرب T با سرعت گروه $V(k) = \frac{\hbar^{-1} E_k}{h}$ محاسبه شود:

$$J = \frac{2e}{(2\pi)^3} \quad (20)$$

$$\int dk V(k) T(E, E_t) [f(E) - f(E + eV_a)],$$

به‌طوری که $f(E) \approx 1 + \exp\left(-\frac{E - E_f}{K_B \theta}\right)$ توزیع تقریبی فرمی-

بنابراین $\det S(z, z') = 1$ شرط ضروری برای بقای ذره است.

۳- $S(L, 0)$ ماتریس عبور طرح شده برای چند لایه‌ها می‌باشد. خارج از چند لایه تابع موج داده شده به‌وسیله رابطه زیر داده می‌شود:

$$\psi(z) = \begin{cases} A_+ e^{ikz} + A_- e^{-ikz} \\ B_+ e^{ik(z-L)} + B_- e^{ik(z-L)} \end{cases} \quad (9)$$

که در آن $k_+ = \frac{\sqrt{2m^*(E + eV_a)}}{\hbar}$ و $k_- = \frac{\sqrt{2m^*E}}{\hbar}$ بردارهای موج

را در نواحی مربوط به خودشان معرفی می‌کند. وقتی این حلها به $\Gamma(z)$ منطبق بشوند (در $z=L$ و $z=0$)، دامنه‌ها در معادله (۹) به صورت زیر مرتبط می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} \quad (10)$$

طوری که M حاصل ضرب ماتریسهای زیر است

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i/k \\ 1 \\ 1 \\ i/k \end{pmatrix} \quad S(L, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix} \quad (11)$$

به سادگی مشخص می‌شود که M نشانه‌هایی از ماتریس پراکندگی دارد:

$$M_{22} = M_{11}^* \quad M_{21} = M_{12}^* \quad \det M = \frac{k_-}{k_+} \quad (12)$$

ضریب عبور T و ضریب انعکاس R ، به‌صورت نسبت‌های جریانهای ذره به‌صورت زیر معین شده‌اند.

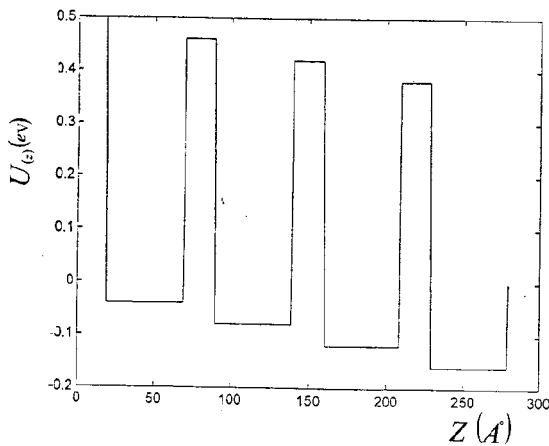
برای انتقال چپ به راست، جایی که $B_- = 0$

$$Tr(r) = \frac{|B_+|^2 k}{|A_+|^2 k} \quad \text{و} \quad R(r) = \frac{|A_-|^2}{|A_+|^2} \quad (13)$$

برای عبور راست به چپ، جایی که $A_+ = 0$

$$Tr(r) = \frac{|A_-|^2 K}{|B_-|^2 K} \quad \text{و} \quad R(r) = \frac{|B_+|^2}{|B_-|^2} \quad (14)$$

در واقع با به‌کار بردن معادلات (۱۰) و (۱۱) می‌توان نشان داد که:



شکل ۱. شماتیک ۴ سد پتانسیل ($n=4$) در ولتاژ بایاس $V_a = 0.16V$ برای حالت ۵ سد به همین ترتیب می‌توان نوشت و ۱۰ ضابطه به دست می‌آید. شکل ۱ شماتیک ۴ سد پله‌ای ($n=4$) تخت توسط برنامه Matlab برای ولتاژ بایاس $V_a = 0.16V$ رسم شده است.

منحنیهای ضریب عبور برحسب انرژی با استفاده از دستورهای مربوط به exp ماتریسی نرم افزار Matlab به دست آمدند. همانطور که از تونل زنی نتیجه می‌شود، تعداد و موقعیت قله‌ها $T_n(E)$ شامل اطلاعات مستقیم درباره انرژی و پاشی ساختارهای اتصال چند لایه می‌باشد [۴]. شکل‌های ۲-الف، ۲-ب و ۲-ج منحنیهای ضریب عبور بر حسب انرژی برای حالت چهار سد ($n=4$) در ولتاژهای بایاس متفاوت به ترتیب $V_a = 0V$ ، $V_a = 0.6V$ ، $V_a = 0.4V$ را نشان می‌دهد.

همچنین در شکل‌های ۳-الف، ۳-ب و ۳-ج منحنیهای ضریب عبور بر حسب انرژی برای حالت پنج سد ($n=5$) در همان ولتاژهای بایاس به دست آمده است. با بررسی دقیق این شکل‌ها می‌توان به نتایجی رسید که در زیر بیان خواهد شد، این نتایج با محاسبات و شکل‌های برای حالت‌های تک سد ($n=1$)، دو سد ($n=2$) و سه سد ($n=3$) که در مقالات [۵-۸] آمده است، کاملاً توافق و سازگاری دارد. این نتایج عبارتند از:

۱- در شکل ۲-الف دو دسته قله سه تایی مشاهده می‌شود و در شکل ۳-الف دو دسته قله چهار تایی مشاهده می‌شود. این نشان می‌دهد در ۶ سد ($n=6$)، انتظار داریم دو دسته قله پنج تایی مشاهده شود. پس تعداد قله‌ها به ساختار چند لایه‌ای مرتبط است و با افزایش تعداد سدها (n) به صورت دو دسته با

دیراک، در دمای قابل اندازه گیری θ و انرژی فرمی E_f و ثابت بولتزمن K_B می‌باشد. چگالی جریانهای عرضی باتوجه به اینکه سد پتانسیل در جهت Z است؛ لذا J_z خواهد بود، که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$J_z = \frac{2em^*}{(\pi)^2 h^3} \int dE_l \int dE_t T(E, E_t) [f(E) - f(E + eV_a)] \quad (21)$$

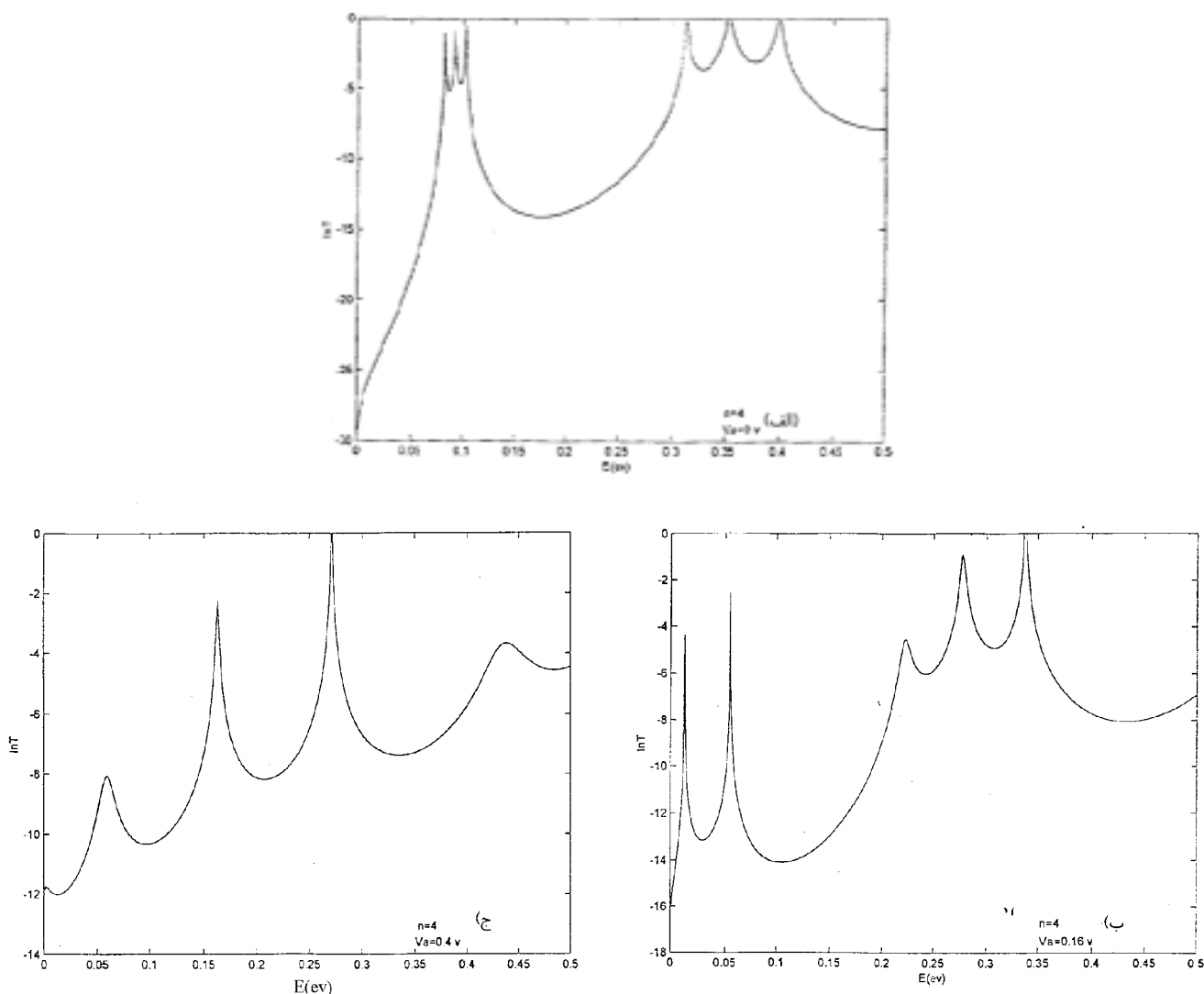
۳. به کار گیری برای چند لایه های $GaAlAs / GaAs$

نتایج عددی حاصل از منحنی ضریب عبور بر حسب انرژی در ولتاژهای بایاس مختلف و دماهای متفاوت [۳] و همچنین در انرژیهای پایین در ادامه ارائه شده است. منحنیهای $\ln T$ بر حسب E ، بیانگر تاثیرات جداگانه از تغییرات تعداد سدها (n)، ولتاژ بایاس V_a (بین مدل‌های پتانسیل پله ای و شیبدار خطی) و E_t انرژی قطع، می‌باشد.

جهت کلیه محاسبات برای $Al_xGa_{1-x}As$ پهنای هر سد پتانسیل 20\AA و ارتفاع آن $0.5eV$ و برای $GaAs$ پهنای هر چاه پتانسیل 50\AA در نظر گرفته شد. جرم موثر الکترونها m^* برابر است با: $m^*(x) = (0.67 + 0.834x)m$ که در آن $x = 0.5$ [9] و m جرم الکترون آزاد می‌باشد. برای همگی منحنیها، بجز در حالت دماهای متفاوت، مقدار انرژی قطع در $(\theta = 4K)$ برابر $E_t \approx K_B \theta = 0.345 \times 10^{-3} eV$ انتخاب گردید.

بنابراین برای ۴ سد $U(z)$ خواهد شد:

$$U(z) = \begin{cases} +0.5 & 0 < z < 20 \\ -\frac{V_a}{4} & 20 < z < 70 \\ 0.5 - \frac{V_a}{4} & 70 < z < 90 \\ -\frac{V_a}{2} & 90 < z < 140 \\ 0.5 - \frac{V_a}{2} & 140 < z < 160 \\ -\frac{3V_a}{4} & 160 < z < 210 \\ 0.5 - \frac{3V_a}{4} & 210 < z < 230 \\ -V_a & 230 < z < 280 \end{cases}$$



شکل ۲. دیاگرام ضریب عبور بر حسب انرژی برای $n=4$ در بایاسهای متفاوت. الف) $V_a = 0V$ ، ب) $V_a = 0.16V$ و ج) $V_a = 0.4V$.

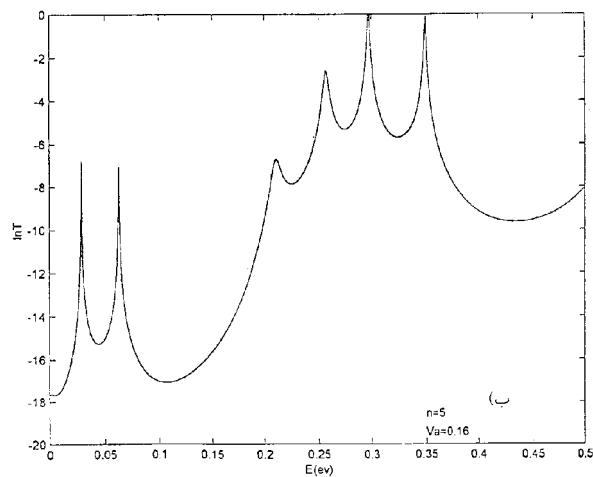
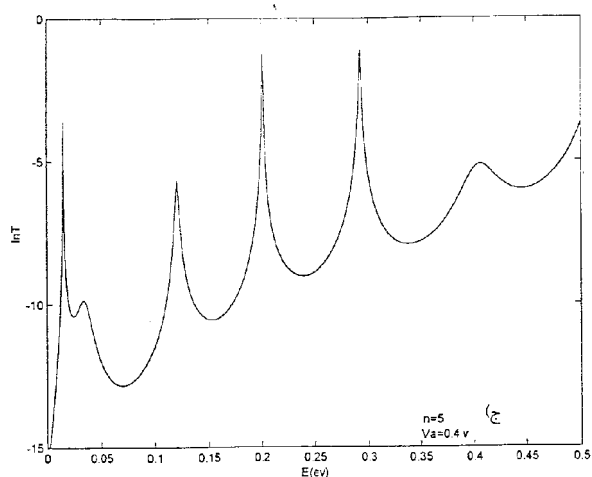
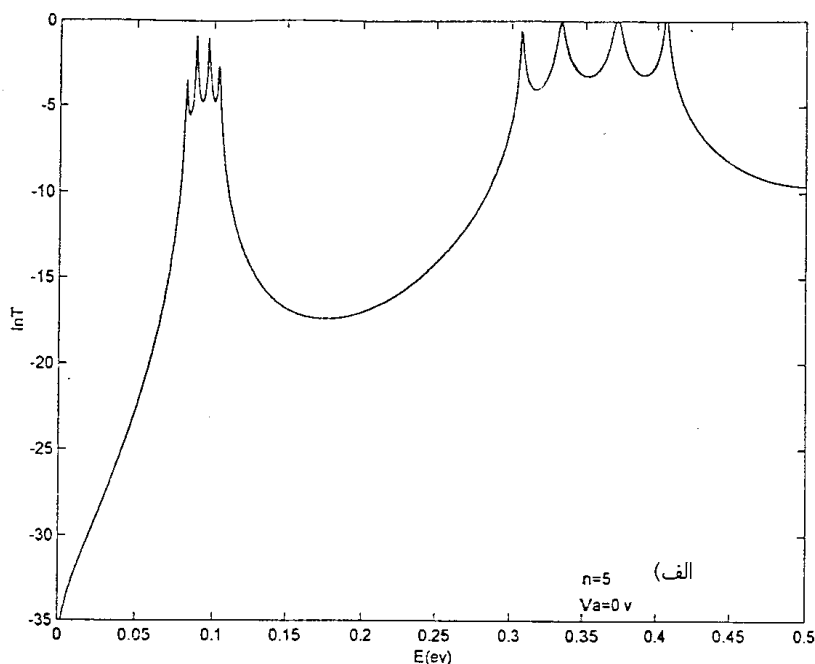
طرف انرژیهای پایینتر حرکت می‌نماید و مقدار ضریب عبور کاهش می‌یابد. توجه نمایید در بایاس $V_a = 0.4V$ ، قله‌های پایینی از دامنه انرژی مثبت خارج گردیده است.

عبارت معادله (۲۱) برای J پیشنهاد می‌کند که J به V_a و ضریب عبور T در مقادیر پایین انرژی و توزیع فرمی-دیراک بستگی دارد. در حقیقت برای داشتن مقاومت منفی $\frac{dT}{dV_a}$ ، باید به‌طور قابل توجهی T با V_a تغییر کند. رشته منحنیهای شکل ۴، رفتار را در حالت سد $n=4$ نمایش می‌دهد. با مقایسه منحنیهای این شکل به مسئله مقاومت منفی در چند،

$(n-1)$ تعداد قله افزایش می‌یابد. به این ترتیب هر چه تعداد سدها بالاتر، برود، کاربرد چند لایه‌ای در آشکارسازی مفیدتر می‌باشد.

۲- نکته حائز اهمیت در شکل‌های ۲ و ۳ این است که دسته قله سمت چپ (در انرژیهای پایینتر) به‌طور قابل توجهی تیزتر از دسته قله سمت راست می‌باشد، که نمایانگر این است که شاهد باندهای قویتر و آشکارسازی دقیقتر می‌باشیم.

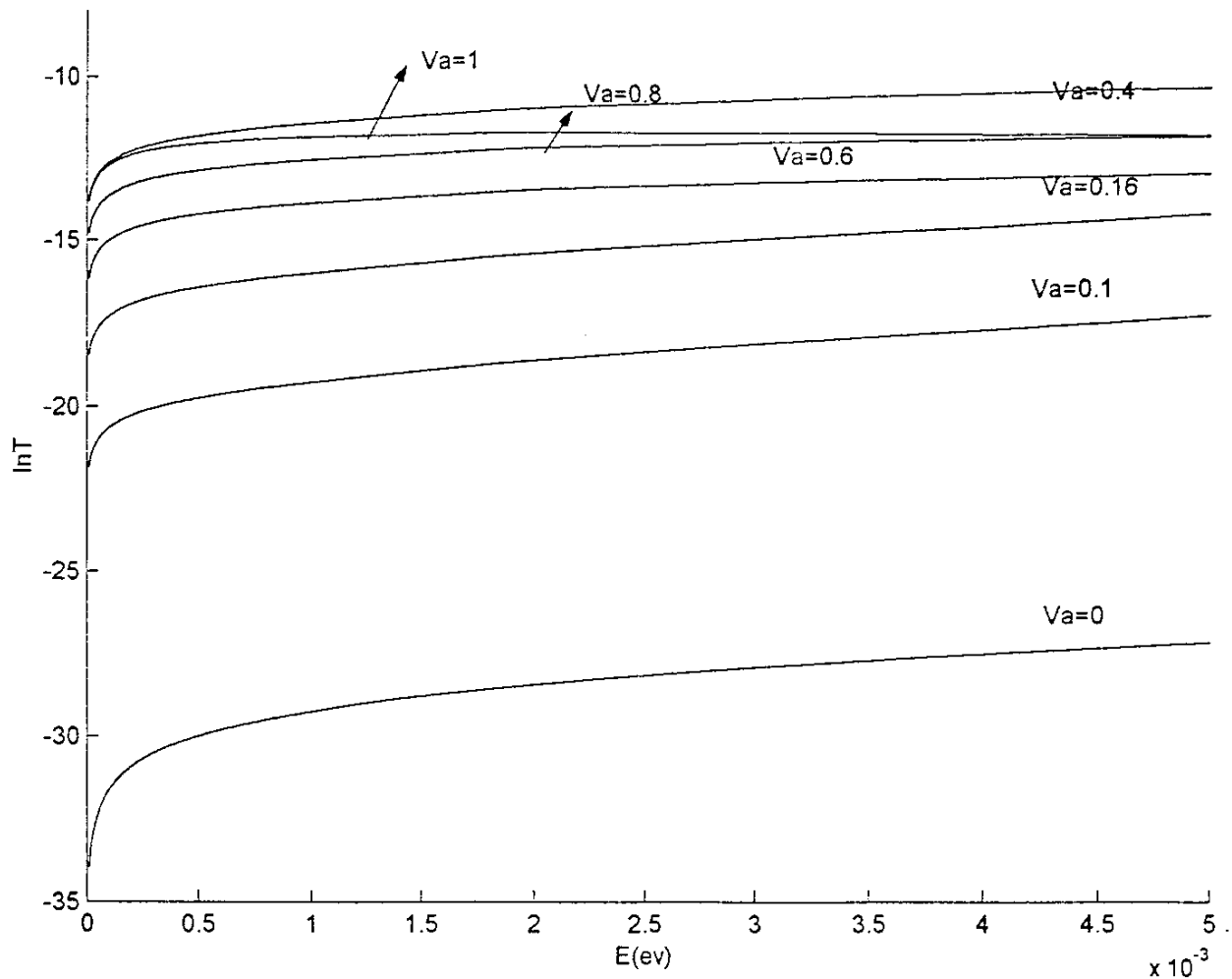
۳- در بایاس صفر ($V_a = 0$)، ضریب عبور به ماکزیمم مطلق می‌رسد. همانگونه که V_a افزایش می‌یابد، وضعیت قله‌ها به



شکل ۳. دیاگرام ضریب عبور بر حسب انرژی برای $n=5$ در بایاسهای متفاوت. الف) $v_a = 0V$ ، ب) $v_a = 0.16V$ ، ج) $v_a = 0.4V$.

شکل ۵ منحنی تغییرات ضریب عبور بر حسب انرژی در بایاس صفر برای انرژیهای قطع E_t متفاوت را نشان می دهد. همان طور که در شکل دیده می شود، با افزایش دما با توجه به رابطه E_t بر اساس $k_B\theta$ منحنی به سمت انرژیهای پایینتر جابه جا می گردد. به عبارت دیگر با بالا بردن دما انتظار جریان تونلی بالاتری داریم ولیکن ساختار تونل زنی بدون تغییر می ماند.

لایه ای پی می بریم همچنان که v_a افزایش پیدا می کند، منحنی به آرامی بالا می رود. ولی در $v_a = 0.16V$ ، منحنی ناگهان پایین می آید و در $v_a = 0.4V$ بالا می آید، یعنی با افزایش ولتاژ، جریان کمتری می گیریم. این شیب منفی در معادله $J - v_a$ را نشان می دهد و با بالا بردن ولتاژ بایاس دوباره منحنی به بالا می رود.

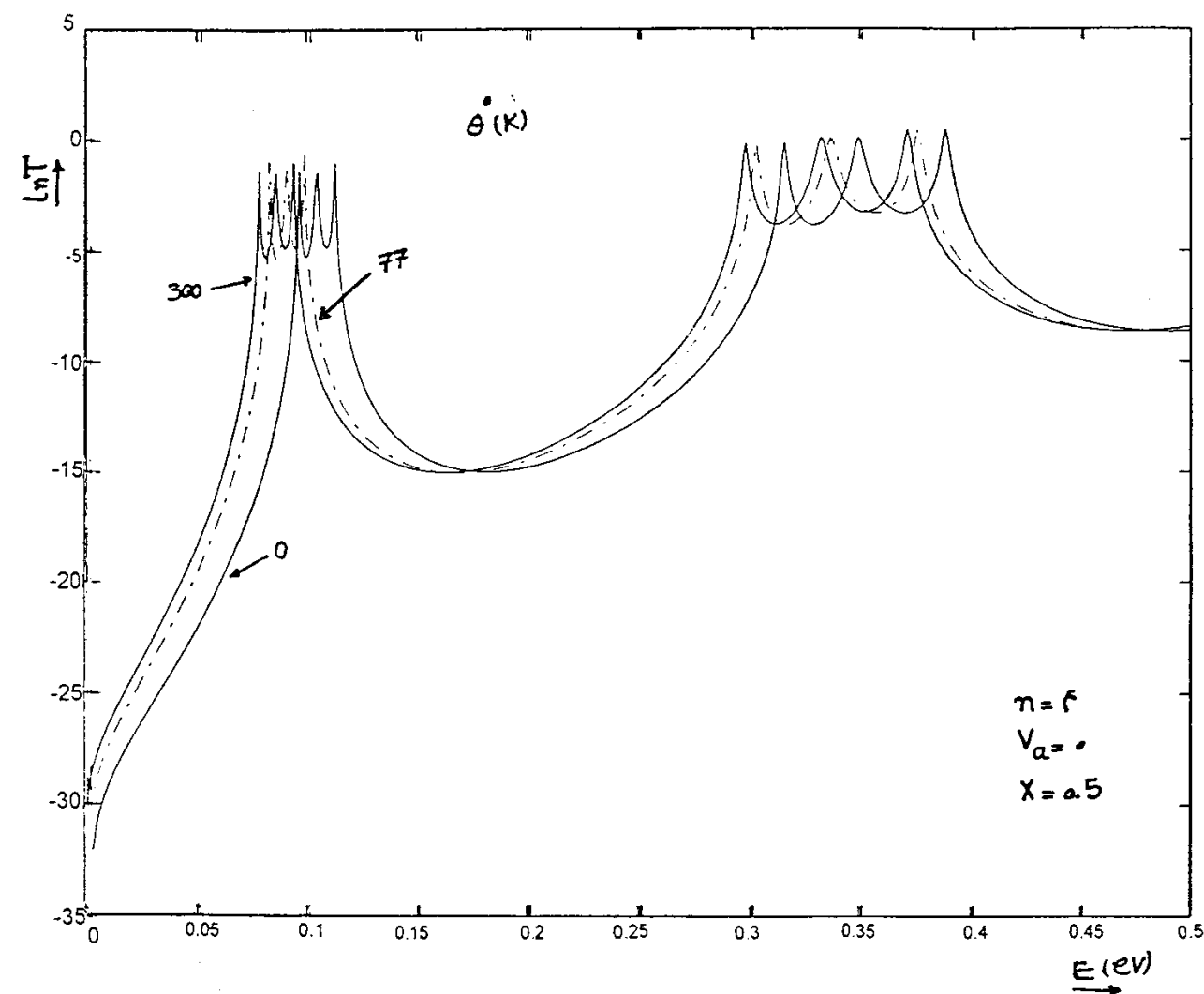


شکل ۴. منحنی تغییرات ضریب عبور بر حسب انرژی در ناحیه انرژی پایین با ولتاژهای متفاوت برای $n=4$. این فرض نمایانگر مقاومت منفی در فراشبکه‌ها می‌باشد.

آن ضریب تونل زنی برای تعداد زوج سدها نسبت به تعداد فرد سدها در انرژی یکسان بیشتر است. نکته دیگری که به دست آوردیم وجود مقاومت منفی در فراشبکه‌ها است که کاملاً از جنبه نظری نیز قابل پیش‌بینی بود. آخرین نکته‌ای که به دست آوردیم تاثیر دما بود که نشان می‌داد افزایش انرژی قطع صرفاً انتقال‌های آرامی را به انرژی‌های پایینتر سبب می‌شود. این نتایج اثرات قابل توجهی از تشدید تونلی را ارائه می‌کند.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله منحنی ضریب عبور بر حسب انرژی در ولتاژ بایاسهایی متفاوت را برای ۴ سد و ۵ سد پتانسیل به دست آوردیم. نتایج به دست آمده از آن که در قسمت اول بخش قبلی به طور مبسوط گفته شد، با حالت ۳ سد که در مقالات [۵-۸] آمده است کاملاً در توافق است. این نتایج بیانگر تاثیرات تغییرات تعداد سدها (n) و ولتاژ بایاس V_a می‌باشد، که تعداد قله‌های ظاهر شده در هر مد با (۱-۸) رابطه دارد. علاوه بر



شکل ۵. منحنی تغییرات ضریب عبور بر حسب انرژی در بایاس صفر برای انرژی‌های قطع (دماهای) متفاوت برای $n=4$.

مراجع

5. Y Zebda and A M Kanan , *J Appl. Phys.* **72**(2) (1992) 559-563.
6. T B Boykin , *J Appl. Phys.* **78**(11) (1995) 6818-6821.
7. T B Boykin, *Phys. Rev. B* **51**(7) (1995) 4289-4295.
8. Y Ando and T Itoh , *J. Appl. Phys.* **61**(4) (1987) 1497-1502.
9. J M Luo and M Osinski , *Electronic letters* **27**(19) 1735-1738 (1991).
1. S Wang "Fundamental of semiconductor theory and device physics", prentia Hall Inc, (1989).
2. N Peyghambarian, S koch and A Mysyrowicz "Introduction to semiconductor optics", prentice-Hall International Inc (1993).
3. A Ralston and H S Wilf, "Mathematical methods for digital computers", New York, Wiley (1962).
4. M O Vassel, J Lee and H F Lochwood, *J. Appl. Phys.* **54**(9) (1983) 5206-5213.