[DOI: 10.18869/acadpub.ijpr.16.2.195]
Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 16:50 IRDT on Thursday September 21st 2017

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۶، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۵

تابش چرنکوف نسبیتی در حضور محیط دی‌الکتریک مغناطیده

مریم محمدی خشوئی

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: mohamady_maryam@znu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۲/۹ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۱۳۹۵/۲۴)

چکیده

در این مقاله به بررسی تابش چرنکوف نسبیتی در حضور محیط دی‌الکتریک مغناطیده همگن سه‌بعدی پرداخته می‌شود. گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی محیط به صورت توابع مختلطی از بسامد که روابط کرامرز- کرونیک را ارضا می‌کند، فرض می‌شوند. هامیلتونی جدید برهم‌کنش که متفاوت از حالت غیرنسبیتی آن است، با استفاده از پتانسیل برداری کوانتیده و عملگر میدان ذره که از کوانتش مرتبهٔ دوم به دست آمده، معرفی می‌شود. با استفاده از قاعدهٔ طلایی فرمی آهنگ اتلاف انرژی الکترون حاصل از این تابش محاسبه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: آهنگ اتلاف انرژی، تابش چرنکوف نسبتی، قاعدهٔ طلایی فرمی

۱..مقدمه

برای اولین بار تابش چرنکوف در تحقیقات مواد رادیواکتیو مشاهده شده بود. چرنکوف نشان داد منشاء این تابش، الکترون پرانرژی است که در محیط مادی با سرعتی بیش از سرعت نور در آن محیط حرکت و طی این فرآیند فوتون گسیل می‌کند. برای بررسی تابش چرنکوف دستگاه را متشکل از یک الکترون در حال حرکت به جرم m و بار الکتریکی e در حال برهم‌کنش با میدان الکترومغناطیسی در محیطی دی‌الکتریک مغناطیده در نظر گرفته می‌شود. یعنی فرض می‌شود که الکترون قبل از گسیل فوتونی به اندازهٔ حرکت $\hbar k$، دارای اندازهٔ حرکت $\hbar k + p$ باشد. به دلیل اینکه برخی از پدیده‌ها از جمله تابش چرنکوف در خلاء امکان پذیر نیست، در این مقاله به بررسی کوانتش میدان در محیط مادی پرداخته می‌شود. هر محیط مادی توسط تابع دی‌الکتریک $\pounds(r,\mu)$ و تابع مغناطیدگی $©(r,\mu)$ توصیف می‌شود. اصل علیت ایجاب می‌کند که هر دو تابعی مختلط از فرکانس باشند [۲]. قسمت حقیقی آن خاصیت پاشندگی و قسمت موهومی آن خاصیت اتلافی محیط را موجب می‌شود. این دو قسمت با روابط کرامرز- کرونیگ به هم وابسته‌اند. ضریب شکست مختلط در این محیط به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]

$$n^{۲}(r,\mu) = \pounds(r,\mu) « (r,\mu), \qquad (۱)$$

که در آن $\pounds(r,\mu), «(r,\mu)$ به ترتیب پذیرفتاری مغناطیسی و گذردهی الکتریکی محیط نامیده می‌شوند.

[DOI: 10.18869/acadpub.ijpr.16.2.195]
Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 16:50 IRDT on Thursday September 21st 2017

در این مقاله با استفاده از میدان الکترومغناطیسی کوانتیده و کوانتش مرتبهٔ دوم (کوانتش عملگر میدان ذره) آهنگ اتلاف انرژی در واحد طول که در آن الکترون با سرعت نسبیتی حرکت می‌کند محاسبه می‌شود.

۲. کوانتش میدان الکترومغناطیسی

در گذار از الکترودینامیک کلاسیک به الکترودینامیک کوانتومی اولین گام کوانتش میدان است. روش‌های متفاوتی برای کوانتش میدان‌های الکترومغناطیسی وجود دارد. از آن جمله می‌توان کوانتش میدان بر حسب توابع مد، استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ و تابع گرین را نام برد .

در این مقاله برای کوانتش میدان با تلفیق معادلات ماکسول در پیمانهٔ کولنی و پتانسیل اسکالر صفر، معادلهٔ موج را برای پتانسیل برداری می‌توان به دست آورد. برای حل معادله با استفاده از تبدیل فوریهٔ پتانسیل برداری در فضای اندازهٔ حرکت محاسبه شده و به یک معادلهٔ جبری تبدیل می‌شود. پس از به دست آوردن پتانسیل برداری آن را به دو مؤلفهٔ طولی و عرضی تقسیم می‌کنیم. اما به دلیل آن که عبارت مؤلفهٔ طولی برای حالت مغناطیده و غیرمغناطیده یکسان است در بررسی تابش چرنکوف نسبیتی در حضور محیط دی‌الکتریک جاذب و مغناطیده تنها پتانسیل عرضی را مورد توجه قرار داده که به صورت زیر نوشته می‌شود [۱]

$$\hat{A}^T(r,t)=\left(\frac{\hbar}{8\pi^4\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty d\mu\int d^3k \sum_{s,s'}\left\{\frac{\mu\sqrt{\varepsilon_i(\mu)}\delta_{s,s'}\hat{f}^e_{s'}(k,\mu)+kc\sqrt{\epsilon_i(\mu)}\varepsilon_{s,s'}\hat{f}^m_{s'}(k,\mu)}{k^2c^2\epsilon(\mu)-\mu^2\varepsilon(\mu)}\right\}\cdot \times\tilde{e}(k)\exp\left[-i(\mu t-k.r)\right]-H.c \quad (۲)$$

رابطهٔ جابه‌جایی دو عملگر بوزونی میدان الکتریکی و مغناطیسی، با فرض $a'=e,m$ و a، به شکل زیر هستند [۱].

$$\left[\hat{f}_{ai}(k,\mu),\hat{f}_{a'j}(k',\mu')\right]=0,\quad \left[\hat{f}_{ai}(k,\mu),\hat{f}^{+}_{a'j}(k',\mu')\right]=\delta_{aa'}\delta(k-k')\delta(\mu-\mu')\delta_{ij}. \quad (۳)$$

قابل ذکر است که پتانسیل برداری عرضی بالا در روابط جابه‌جایی بندادی صدق می‌کند که شرط کوانتش میدان است

$$\left[\hat{A}^T_{\sim}(r,t),\ -\varepsilon_0\hat{E}^T(r',t)\right]=i\hbar\delta^T_{\sim}(r-r') \quad (۴)$$

۳. کوانتش مرتبهٔ دوم

می‌توان میدان تابشی را با خواص ذره‌ای توصیف کرد. این مطلب ایده‌ای خواهد بود برای آن که میدان تابشی الکترون را نیز کوانتیده شود که به آن کوانتش مرتبهٔ دوم می‌گویند. بدین منظور از معادلهٔ دیراک که نسبیتی است، شروع می‌شود. سپس با استفاده از معادلهٔ ویژه مقداری انرژی، ویژه مقادیر آن محاسبه می‌شود و براساس ویژه مقادیر به دست آمده میدان تابشی الکترون بسط داده می‌شود. ضرایب بسط در واقع عملگرهایی خواهند بود که مربوط به خلق یا نابودی الکترون می‌باشند. $\hat{b}_a(p,t)$ عملگر بوزونی فنا و همچنین $\hat{b}^+_a(p,t)$ عملگر بوزونی خلق الکترونی با تکانهٔ p نامیده و در نهایت ψ و ψ^+ کوانتیده می‌شوند و با تعمیم آن به حالت پیوسته سه‌بعدی به شکل زیر در می‌آیند [۲]

$$\hat{\psi}(r,t)=\sum_a\int d^3p\,\hat{b}_a(p,t)\cdot\psi_a(p,r), \quad (۵)$$

$$\hat{\psi}^+(r,t)=\sum_a\int d^3p\,\hat{b}^+_a(p,t)\cdot\psi^+_a(p,r), \quad (۶)$$

که در آن

$$\psi_a(r,p)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}u_a(r,p)\,e^{ip.r}. \quad (۷)$$

روابط پادجابه‌جایی آنها نیز به صورت زیر است [۲]

$$\left[\hat{b}(p,t),\hat{b}(p',t)\right]_+=\left[\hat{b}^+(p,t),\hat{b}^+(p',t)\right]_+=0 \quad (۸)$$

$$\left[\hat{b}(p,t),\hat{b}^+(p',t)\right]_+=\delta(p'-p). \quad (۹)$$

۴. هامیلتونی برهم‌کنش

هامیلتونی نسبیتی برهم‌کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی در تابش مورد نظر ما بدین شکل است [۲]

$$\hat{H}_I=-ec\int d^3r\,\psi^+\alpha\cdot\hat{A}\psi \quad (۱۰)$$

که در آن ψ عملگر میدان ذره می‌باشد. با جایگذاری به شکل زیر در می آید

[DOI: 10.18869/acadpub.ijpr.16.2.195]
Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 16:50 IRDT on Thursday September 21st 2017

$$\hat{H}_I = -ec\sum_{s,s'}\left(\frac{\hbar}{8\pi^4\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty d\omega\int d^3k\int d^3p\ \times u^+_{\lambda'}(p+k,r)\alpha.\tilde{e}_s(k)u_\lambda(p,r)\hat{b}^+_{\lambda'}(p+k,t)\hat{b}_\lambda(p,t)$$
$$\times\left\{\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_i(\omega)}\delta_{s,s'}\hat{f}^{e^+}_{s'}(k,\omega)+kc\sqrt{|\kappa_i(\omega)|}\varepsilon_{s,s'}\hat{f}^{m^+}_{s'}(k,\omega)}{k^2c^2\kappa(\omega)-\omega^2\varepsilon(\omega)}\right\}\times exp(i\omega t) \tag{11}$$

۵. احتمال گسیل فوتون

در بررسی تابش چرنکوف فرض می‌شود که تعداد فوتون‌ها در حالت دستگاه مختل نشده صفر باشد و پس از گسیل تنها یک فوتون تولید شود. با داشتن اطلاعات فوق می‌توان احتمال گسیل فوتون در واحد زمان، توسط الکترونی که با سرعت v در محیط حرکت می‌کند، را به دست آورد. بدین منظور از قاعدهٔ طلایی فرمی استفاده می‌شود. اگر دستگاه ابتدا در حالت اولیهٔ $|i\rangle$ با انرژی E_i باشد، احتمال در واحد زمان برای آنکه دستگاه در حالت نهایی $|f\rangle$ با انرژی E_f یافت شود، طبق قاعدهٔ فرمی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲]

$$\left(\frac{\text{trans.porb}}{\text{time}}\right)=\frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{fi}\right|^2\delta\left(E_f-E_i\right). \tag{12}$$

در رابطهٔ بالا، V_{fi} عنصر ماتریسی اختلال است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{fi}=\langle f|V|i\rangle, \tag{13}$$

که پس از جایگذاری رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\left(\frac{\text{trans.porb}}{\text{time}}\right)_{p+k,a'\to p,a}=$$
$$\frac{2\pi}{\hbar}e^2c^2\left(\frac{\hbar}{8\pi^4\varepsilon_0}\right)\frac{\mu^2\varepsilon_i(\mu)+k^2c^2k_i(\mu)}{\left|k^2c^2k(\mu)-\mu^2\varepsilon(\mu)\right|^2}$$
$$\left|u^+_{a'}(p+k,r)a.\tilde{e}_s(k)u_a(p,r)\right|^2$$
$$\delta(\sqrt{\hbar^2c^2|p+k|^2+m^2c^4}-\sqrt{\hbar^2c^2p^2+m^2c^4}-\hbar\mu). \tag{14}$$

۶. انرژی اتلافی الکترون در واحد طول

احتمال گسیل یک فوتون با بسامد μ_k و قطبش $\pm$ در واحد زمان را محاسبه شد. اگر این احتمال در انرژی یک فوتون ضرب شود، در واقع آن مقدار انرژی که دستگاه در واحد زمان از دست می‌دهد تا فوتونی با بردار موج k و قطبش $\pm$ خلق شود را به دست آورده‌ایم. از سوی دیگر فوتون‌های بی‌شماری با بسامدها و قطبش‌های مختلفی تولید می‌شود، از این رو کافی است آهنگ از دست دادن انرژی در واحد زمان را به ازای بسامدها و قطبش‌های مختلف به دست آورده و سپس آنها را با هم جمع کرد. پس جمع نهایی باید شامل یک جمع روی اسپین‌های نهایی الکترون باشد و روی اسپین اولیه میانگین‌گیری کرد که ضریب $\frac{1}{2}$ ظاهر می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{a'=1}^{2}\sum_{a=1}^{2}\int d^3k\,\hbar\mu_k\left(\frac{\text{transprob}}{\text{time}}\right) \tag{15}$$

و به سادگی می‌توان آهنگ از دست دادن انرژی در واحد طول را به روش زیر محاسبه کرد

$$\frac{dW}{dx}=\frac{1}{v}\frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{a'=1}^{2}\sum_{a=1}^{2}\int d^3k\,\hbar\mu_k\left(\frac{\text{transprob}}{\text{time}}\right) \tag{16}$$

با جایگذاری رابطهٔ (۱۵) در (۱۶) رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{dW}{dx}=\frac{e^2}{2\pi^2\varepsilon_0}\int\mu\,d\mu\int kdk\frac{\mu^2\varepsilon_i(\mu)+k^2c^2\delta_i(\mu)}{\left|k^2c^2\delta(\mu)-\mu^2\varepsilon(\mu)\right|^2}$$
$$\left(1-\frac{\mu^2}{k^2v^2}\left(1+\frac{\hbar\mu}{2mc^2}\left(\frac{c^2k^2}{\mu^2}-1\right)\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2\right). \tag{17}$$

حال عبارت (۱۷) با عبارت زیر که در واقع انرژی اتلافی الکترون غیرنسبیتی در واحد طول برای محیط های دی‌الکتریک همگن سه‌بعدی است [۳]، به صورت دیفرانسیلی مقایسه می‌شود

$$\left.\frac{dW}{dx}\right|_{\text{Dielectric}}=\frac{e^2}{2\pi^2\varepsilon_0}\int\mu\,d\mu\int dk$$
$$\frac{k\mu^3\varepsilon_i(\mu)}{\left|k^2c^2-\mu^2\varepsilon(\mu)\right|^2}\left(1-\left(\frac{\mu}{kv}+\frac{\hbar k}{2mv}\right)^2\right) \tag{18}$$

$$\frac{\left.\frac{dW}{dx\,d\mu\,dk}\right|_{\text{Magneto.Dielectric}}}{\left.\frac{dW}{dx\,d\mu\,dk}\right|_{\text{Dielectric}}} = \frac{\mu^{2}\pounds_{i}+k^{2}c^{2}©_{i}}{\mu^{2}\pounds_{i}}\,\frac{\left|k^{2}c^{2}-\mu^{2}\pounds(\mu)\right|^{2}}{\left|k^{2}c^{2}©(\mu)-\mu^{2}\pounds(\mu)\right|^{2}} \times \frac{\left(1-\frac{\mu^{2}}{k^{2}v^{2}}\left(1+\frac{\hbar\mu}{2mc^{2}}\left(\frac{c^{2}k^{2}}{\mu^{2}}-1\right)\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}\right)^{2}\right)}{\left(1-\left(\frac{\mu}{kv}+\frac{\hbar k}{2mv}\right)^{2}\right)} \qquad (۱۹)$$

در واقع عبارت (۱۹) نشان دهندهٔ تصحیح نسبیتی برای محیط دی‌الکتریک مغناطیده است. این نسبت برای سرعت‌های پایین در اکثر نقاط برابر یک است که با انتظار ما توافق خوبی دارد. هر چه سرعت الکترون به سمت سرعت‌های بالا می‌رود، نسبت از یک فاصله می‌گیرد.

۶. نتیجه‌گیری

انرژی اتلافی الکترون در واحد طول را برای تابش چرنکوف نسبیتی در محیط دی‌الکتریک مغناطیده به دست آوردیم. با انجام محاسبات نشان دادیم که روابط به دست آمده تعمیم روابط گذشته (آهنگ اتلاف انرژی در محیط دی‌الکتریک که در آن الکترون با سرعت غیر نسبیتی حرکت می‌کند) است. در واقع هدف از انجام این محاسبات بهبود بخشیدن به روابط گذشته است.

قدردانی

از جناب آقای دکتر محمدرضا مطلوب که اینجانب را در تهیهٔ این مقاله یاری دادند تشکر می‌نمایم.

مراجع

1. R Matloob, *Phys. Rev*. A **60** (1999) 50.
2. E G Harris, *"A Pedestrian Approch to Quantum Field Theory"*, Wiley, USA (1972).
۳. ع غفاری، «*تابش چرنکوف در محیط پاشنده اتلافی*»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه باهنر کرمان (۱۳۸۱).

[DOI: 10.18869/acadpub.ijpr.16.2.195]
Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 16:50 IRDT on Thursday September 21st 2017