

پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط یک کرمچاله گذرپذیر

بهرام نصر اصفهانی^۱، شهرام دهدشتی^۲ و مهدی اسحاقی^۲

۱. گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان

پست الکترونیکی: ba_nasre@sci.ui.ac.ir

۲. گروه فیزیک، دانشگاه کاشان

(دریافت مقاله: ۸۳/۱۲/۱۳ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۴/۴/۱۵)

چکیده

با جایگزین کردن هندسه کرمچاله‌ای با یک محیط هم‌ارز و به‌کار بردن نظریه اختلال پراکندگی و تقریب بورن، سطح مقطع پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط کرمچاله‌های ایستا را محاسبه کرده‌ایم. با بررسی سطح مقطع دیفرانسیلی در طول موجهای بلند نه تنها می‌توان کرمچاله‌ها را از اجسام معمولی تشخیص داد بلکه می‌توان انواع مختلف کرمچاله‌ها را از نظر تابع شکل از هم متمایز نمود. کمینه‌های سطح مقطع دیفرانسیلی به شعاع گلوگاه بستگی پیدا می‌کنند و ممکن است بتوان با تعیین کمینه‌ها، اندازه گلوگاه را برآورد کرد. این محیط هم‌ارز بر خلاف اجسام واقعی، هیچ اثری بر قطبش خطی موج ندارد و این خود می‌تواند در تشخیص کرمچاله‌ها از اجسام معمولی به‌کار رود.

واژه‌های کلیدی: کرمچاله‌ها، امواج الکترومغناطیسی، نظریه اختلال پراکندگی، قطبش، سطح مقطع

۱. مقدمه

از سال ۱۹۸۸ که موریس وتورن [۱] دسته جدیدی از کرمچاله‌ها را با عنوان کرمچاله‌های گذرپذیر معرفی کرده‌اند، پیشرفتهای زیادی در فیزیک کرمچاله‌ها رخ داده است. ویژگی مهم این کرمچاله‌ها، در مقایسه با کرمچاله‌های شوارتزشیلد، نداشتن افق است که عبور نور و ذرات مادی را از آنها امکان پذیر می‌سازد. تا کنون تحقیقات دامنه‌داری در مورد کرمچاله‌ها انجام گرفته است و تعدادی از جوابهای کرمچاله‌ای ایستا و یا در حال تحول در چارچوب نظریه نسبیت عام و همین‌طور نظریه برانس-دیکی پیدا شده‌اند [۲-۷].

یکی از بحث برانگیزترین جنبه‌های کرمچاله‌های گذرپذیر مسئله نقض شرط پوچ انرژی توسط ماده‌ای است که این گونه فضا زمانها را ایجاد می‌کنند. گرچه افرادی نشان داده‌اند که

نقض شرط پوچ انرژی یک ویژگی همگانی برای کرمچاله‌ها (صرف نظر از نوع تقارن و وابسته بودن یا نبودن به زمان) است [۸]، اما افرادی نیز کرمچاله‌هایی یافته‌اند که به طور کلی یا در بازه‌های زمانی مشخصی شرط پوچ انرژی را برآورده می‌سازند [۹، ۶]. در هر حال مسئله وجود ماده نقض کننده شرط انرژی (ماده نامتعارف) هنوز به طور کلی حل نشده است. با وجود این، برخی افراد نوعی نگرش به کرمچاله‌ها را مطرح کرده‌اند که در آن فرض می‌شود کرمچاله‌ها وجود دارند و سپس پیامدهای آنها مورد توجه قرار می‌گیرند. از سال ۱۹۹۰ تا کنون مطالعات زیادی از این نوع انجام گرفته است که شاید مهم‌ترین آنها عبارت باشند از مطالعه انتشار امواج نرده‌ای و نیز انتشار امواج الکترومغناطیسی در یک هندسه کرمچاله‌ای ایستا [۹-۱۱].

انتشار امواج الکترومغناطیسی در فضا زمانهای کرمچاله‌ای

پیشتر مورد بررسی قرار گرفته است [۱۰]. اما، در این مقاله، با توجه به نگرش یاد شده، پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط یک کرمچاله گذرپذیر ایستا مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به کار بردن روش اختلال پراکندگی و تقریب بورن [۱۲]، از ویژگیهای اساسی رهیافت ما در این مقاله است. ابتدا معادلات ماکسول در یک فضای فضا-زمان خمیده، با معادلات ماکسول در یک فضای فضا-زمان تخت اما در حضور یک محیط جایگزین می‌گردند.

$$H^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \quad \text{تعریف می‌کنیم} \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

این صورت معادلات ماکسول را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$H^{\mu\nu}_{; \nu} = 0, \quad H^{*\mu\nu}_{; \nu} = 0. \quad (2)$$

توجه کنید که این معادلات به معادلات ماکسول در فضای تخت شباهت دارند. البته پس زمینه گرانشی حذف نشده است بلکه در روابط، ساختمندی $H^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}$ نهفته است.

در اینجا مناسب است که یک دستگاه مختصات دکارتی را چنان برگزینیم که در آن بتوان مؤلفه‌های تانسور $F_{\mu\nu}$ و $H^{\mu\nu}$ را به صورت زیر نوشت

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & \cdot & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & \cdot & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & \cdot \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$H^{\mu\nu} \rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & \cdot & H_z & -H_y \\ D_y & -H_z & \cdot & H_x \\ D_z & H_y & -H_x & \cdot \end{bmatrix}$$

با این انتخاب، معادلات (۲) به شکل معادلات ماکسول در فضای تخت در می‌آید. یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

همراه با روابط ساختمندی

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k - (\mathbf{G} \times \mathbf{H})_i, \quad (4)$$

$$B_i = \mu_{ik} H_k - (\mathbf{G} \times \mathbf{E})_i,$$

که در آن

$$\varepsilon_{ik} = \mu_{ik} = -\sqrt{-g} \frac{g^{ik}}{g}, \quad (5)$$

$$G_i = -\frac{g_{,i}}{g}.$$

به این ترتیب نتیجه می‌شود که معادلات ماکسول در حضور

پیشتر مورد بررسی قرار گرفته است [۱۰]. اما، در این مقاله، با توجه به نگرش یاد شده، پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط یک کرمچاله گذرپذیر ایستا مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به کار بردن روش اختلال پراکندگی و تقریب بورن [۱۲]، از ویژگیهای اساسی رهیافت ما در این مقاله است. ابتدا معادلات ماکسول در یک فضای فضا-زمان خمیده، با معادلات ماکسول در یک فضای فضا-زمان تخت اما در حضور یک محیط جایگزین می‌گردند. سپس، با انتخاب یک متریک کرمچاله‌ای ایستا ضرایب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی را برای محیط به دست می‌آوریم. دیده می‌شود که این محیط همسانگرد اما ناهمگن است، به طوری که بیشترین مقدار گذردهی در گلوگاه رخ می‌دهد و همان‌طور که مورد انتظار است، در فاصله‌های دور از گلوگاه به طور سریع به یک (یعنی گذردهی فضا-زمان تخت) می‌گراید. سرانجام، سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی [۱۲] را برای امواج الکترومغناطیسی محاسبه می‌کنیم. فرض بر آن است که تابش امواج الکترومغناطیسی کرمچاله مورد مطالعه را مختل نمی‌سازد.

چنین مطالعه‌ای ممکن است از نظر مشاهداتی دارای اهمیت زیادی باشد. خواهیم دید که سطح مقطع محاسبه شده به شعاع گلوگاه ارتباط دارد که ما را قادر می‌سازد تا بتوانیم اندازه گلوگاه را برآورد کنیم. به علاوه، تأثیر ویژه‌ای که در قطبش موج پراکنده ایجاد می‌شود می‌تواند ما را در شناسایی کرمچاله‌ها کمک می‌کند. خواهیم دید که نداشتن افق و توپولوژی خاص کرمچاله‌ها، در موفقیت بودن رهیافت ما نقش اساسی را بازی می‌کند.

۲. معادلات ماکسول در یک میدان گرانشی

در یک میدان گرانشی و در غیاب چشمه‌های بار و جریان معادلات ماکسول را می‌توان به شکل هموردای زیر نوشت

$$F^{\mu\nu}_{; \mu} = 0, \quad F^{*\mu\nu}_{; \mu} = 0, \quad (1)$$

که در آن $F^{\mu\nu}$ مؤلفه‌های تانسور الکترومغناطیس است و

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

اکنون در یک چهارچوب مختصات مفروض با متریک

$$ds^2 = -dt^2 + \left[\frac{f(\rho)}{\rho} \right]^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (8)$$

سپس با استفاده از تعریفهای معمول

$$x = \rho \cos \phi \sin \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \theta$$

در متریک (۸) به دست می‌آوریم

$$ds^2 = -dt^2 + \left[\frac{f(\rho)}{\rho} \right]^2 (\delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (9)$$

چیزی که نشان دهنده متریک کره مجاله‌ای (۹) به شکل دکارتی

همدیس است، یعنی همان شکلی که ما به آن نیاز داریم [۱۱].

حال می‌توانیم متریک (۹) را در معادله (۵) بکار ببریم و

برای هندسه کره مجاله‌ای ضریب گذردهی را به صورت زیر

به دست آوریم

$$\varepsilon_{ij} = \mu_{ij} = \varepsilon(\rho) \delta_{ij},$$

که در آن

$$\varepsilon(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho}. \quad (10)$$

با توجه به رفتار مجانبی متریک کره مجاله‌ای به سادگی می‌توان

دید که $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \varepsilon(\rho) = 1$.

به عنوان مثال ابتدا تابع شکل را به صورت $B(r) = \frac{b^2}{r}$ در

نظر می‌گیریم. این همان مثال معروفی است که موریس و تورن

در مقاله مشهورشان معرفی کرده‌اند [۱]. با جایگذاری این تابع

شکل در معادله تبدیل (۷) و بعد از انتگرالگیری به دست

می‌آوریم

$$\frac{f(\rho)}{\rho} = \varepsilon(\rho) = \frac{\rho^2 + \rho^2}{\rho^2}, \quad (11)$$

که در آن $\rho = \frac{b}{\rho}$ است. روشن است که بیشترین مقدار در

گلوگاه رخ می‌دهد، یعنی $\varepsilon(\rho) = 2$ و با دور شدن از گلوگاه،

مقدار به طور سریع به یک می‌گراید.

به عنوان مثالی دیگر و به منظور مقایسه با انتخاب قبلی،

تابع شکل را $B(r) = \frac{b^2}{r^2}$ در نظر می‌گیریم. در این حال، از

معادلات (۷) و (۱۰) ضریب گذردهی به صورت زیر به دست

می‌آید

میدان گرانشی به طور صوری با معادلات ماکسول در یک

فضا زمان تخت و در حضور یک محیط هم‌ارزاند. خواص این

محیط توسط ضرایب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی

داده شده در رابطه (۵) توصیف می‌شوند [۱۰].

۳. هندسه کره مجاله‌ای و محیط هم‌ارز با آن

به عنوان هندسه پس زمینه، متریک زیر را بر می‌گیریم.

$$ds^2 = -e^{-\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{B(r)}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6)$$

که عبارت است از شکل کلی متریک برای یک کره مجاله

گذرپذیر ایستا در یک مختصات کروی (r, θ, ϕ) . در اینجا

$\Phi(r)$ تابع جابه‌جایی به سرخ و $B(r)$ تابع شکل نامیده

می‌شود. تابع شکل، شکل فضایی کره مجاله را مشخص می‌کند و

باید شرط $B(r) \leq r$ را برآورده سازد تا هندسه کره مجاله‌ای

ممکن باشد. معادله $B(r) = r$ مکان گلوگاه کره مجاله را

مشخص می‌کند که در واقع کران پایین مختصه r است. در

اینجا کره مجاله‌هایی را در نظر می‌گیریم که به‌طور مجانبی تخت

هستند در این صورت باید شرط $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B(r)}{r} = 0$ برقرار

باشد. در هر متریک متقارن کروی و ایستا مانند متریک (۶)،

رویه‌هایی که در آنها $g_{tt} = -e^{2\Phi(r)} \rightarrow 0$ ، افق نامیده می‌شوند.

کره مجاله‌های گذرپذیر نباید افقی داشته باشند چرا که وجود افق

مانع عبور دو طرفه از آنها می‌شود. از این رو لازم است که تابع

$\Phi(r)$ همه جا محدود باشد. در ادامه برای سادگی قرار

می‌دهیم $\Phi(r) = 0$.

برای اینکه بتوانیم از تانسورهای داده شده در معادله (۳)

استفاده کنیم، لازم است که متریک (۶) را در مختصات دکارتی

بنویسیم. به این منظور تبدیل $r = f(\rho)$ را اعمال می‌کنیم. پس

از جایگذاری و انجام محاسبات لازم، نتیجه می‌شود که اگر

تابع $f(\rho)$ معادله

$$\rho \frac{df}{d\rho} = \sqrt{f^2 - fB(f)}, \quad (7)$$

را برآورده سازد آنگاه متریک (۶) به شکل زیر در می‌آید

چنین نوشت [۱۲]

(۱۴)

$$A_{sc} = \frac{k^3}{4\pi} \int d^3x e^{-ik \cdot x} \left[\mathbf{n} \times (\mathbf{D} - \epsilon \cdot \mathbf{E}) \right] \times \mathbf{n} - \frac{\epsilon \cdot \omega}{k} \mathbf{n} \times (\mathbf{B} - \mu \cdot \mathbf{H})$$

که در آن \mathbf{n} بردار یکه راستای مشاهده موج پراکنده شده و k عدد موج است. از این رابطه سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{A}_{sc}}{\mathbf{D}^{(\cdot)}} \right|^2, \quad (15)$$

که در آن \mathbf{e} بردار قطبش موج پراکنده می‌باشد.

در ادامه، می‌خواهیم از آنچه که به تقریب اول بورن معروف است استفاده کنیم. در این تقریب، به جای پراکنده‌های موجود در رابطه (۱۴) قرار داده می‌شود

$$\mathbf{D} - \epsilon \cdot \mathbf{E} = \frac{\delta\epsilon(\mathbf{x})}{\epsilon} \mathbf{D}^{(\cdot)}(\mathbf{x}), \quad (16)$$

$$\mathbf{B} - \mu \cdot \mathbf{H} = \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu} \mathbf{B}^{(\cdot)}(\mathbf{x}),$$

که در آن $\mathbf{D}^{(\cdot)}$ و $\mathbf{B}^{(\cdot)}$ میدانهای موج مختل نشده هستند و $\delta\epsilon(\mathbf{x})$ و $\delta\mu(\mathbf{x})$ مقدار تفاوت خواص محیط پراکنده ساز نسبت به محیط یکنواخت پس زمینه را نشان می‌دهند. می‌توانیم موج مختل نشده را موج تختی که در جهت \mathbf{n} منتشر می‌شود در نظر بگیریم. یعنی

$$\mathbf{D}^{(\cdot)}(\mathbf{x}) = \mathbf{e} \cdot D e^{ik \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{B}^{(\cdot)}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{n} \times \mathbf{D}^{(\cdot)}(\mathbf{x}), \quad (17)$$

که در آن \mathbf{e} بردار قطبش موج مختل نشده است. با جایگذاری رابطه (۱۵) در (۱۶) و سپس در (۱۴)، نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{A}_{sc}}{\mathbf{D}} = \frac{k^3}{4\pi} \int d^3x e^{iq \cdot x} \left[\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} \frac{\delta\epsilon(\mathbf{x})}{\epsilon} + \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{e}^*) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e})}{\mu} \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu} \right], \quad (18)$$

که در آن

$$\mathbf{q} = k\mathbf{n}_i - k\mathbf{n}_f. \quad (19)$$

$$\epsilon(\rho) = \sqrt{\frac{\rho^f + \rho^i}{\rho^f}} \quad (12)$$

که در آن $\rho = \frac{b}{\sqrt{2}}$ است و $\epsilon(\rho) = \sqrt{2}$ با توجه به کاهش سریع $\epsilon(\rho)$ در فاصله‌های دور از گلوگاه و برای استفاده‌های بعدی مناسب است که با استفاده از بسط دو جمله‌ای ضریب گذردهی (۱۲) را به صورت زیر بسط دهیم

$$\epsilon(\rho) - 1 = \frac{1}{2} \frac{\rho^f}{\rho^f} - \frac{1}{8} \frac{\rho^f}{\rho^f} + \dots \quad (13)$$

این رشته همگراست مشروط براینکه $0 \leq \frac{\rho^f}{\rho} < 1$ ، شرطی که آشکارا در خارج از گلوگاه بر آورده می‌شود. در خود گلوگاه $\frac{\rho^f}{\rho} = 1$ و در سمت راست (۱۳) یک رشته متناوب داریم که هنوز هم بر طبق آزمونهای موجود همگراست [۱۳].

تکین نبودن $\epsilon(\rho)$ که بازتاب توپولوژی ویژه کرمچاله‌ای است و رفتار مناسب آن بر حسب فاصله از گلوگاه، این انگیزه را در ما ایجاد می‌کند که برای بررسی پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط کرمچاله‌ها، روش اختلال را به کار گیریم.

۴. نظریه اختلال پراکندگی و تقریب بورن

بدون تردید ابزار اصلی ما برای شناسایی و مطالعه ساختمان داخلی پراکنده سازها، چه در مقیاس کلاسیک و چه در مقیاس کوانتومی، نظریه پراکندگی است. به همین دلیل، مطالعات زیادی در زمینه پراکندگی انجام گرفته است.

در اینجا پراکندگی کلاسیک امواج الکترومغناطیسی مورد نظر است. اگر موج الکترومغناطیسی در محیطی (که لازم نیست خلاء باشد) با ضرایب یکنواخت گذردهی ϵ و تراوایی مغناطیسی μ پیش رود، هیچ آشفتگی و انحرافی برای آن رخ نمی‌دهد. اما اگر به دلیل وجود پراکنده سازها، در خواص محیط تغییری ایجاد گردد، پراکندگی روی می‌دهد. هر گاه تفاوت ضریبهای گذردهی الکتریکی و مغناطیسی محیط پراکنده ساز با محیط بیرون جزئی باشد، می‌توان از تکنیک اختلالی بهره برد. بر این اساس، دامنه پراکندگی امواج الکترومغناطیسی را می‌توان

۵. پراکنندگی توسط کره مجالۀ

در اینجا می‌خواهیم مطالب بخش قبل را در مورد محیطی که در بخش ۳ جایگزین هندسه کره مجالۀ ای نمودیم، به کار ببریم. پیش از آن لازم است به دو نکته توجه نمود. یکی اینکه دستگاه یکا‌هایی که در بخش‌های ۲ و ۳ استفاده شده است همان دستگاه گاوسی همراه با انتخاب $\epsilon = 1$ (دستگاه نسبیتی) است. حال آنکه در بخش چهارم یکاهای جهانی (SI) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مناسب است که روابطه این بخش را نیز در دستگاه نسبیتی در نظر بگیریم. گیریم که موج تخت (۱۷) از فاصله دور (جایی که فضا زمان تخت است) به سوی کره مجالۀ بتابد. این بدان معنی است که محیط پس زمینه خلاء است. پس کافی است که در روابط بخش سوم قرار دهیم $\epsilon = \mu = 1$. نکته دیگر این است که ضریب گذردهی الکتریکی و ضریب تراوایی مغناطیسی برای محیط هم‌ارزی که در بخش ۳ در نظر گرفتیم با هم برابرند و فقط به فاصله از گلوگاه ارتباط دارند.

اکنون بر اساس مطالب فوق، از رابطه (۱۸) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{A}_{sc}}{D} = \frac{k^2}{4\pi} [\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} + (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^*) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e})] \int d^3x e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \delta\epsilon(\rho) \quad (20)$$

که در آن $\delta\epsilon(\rho) = \epsilon(\rho) - 1$. با انتخاب مناسب زاویه بین \mathbf{q} و \mathbf{x} می‌توانیم بخش زاویه‌ای انتگرال بالا را به راحتی حساب کنیم و فقط بخش شعاعی آن می‌ماند. داریم

$$\frac{\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{A}_{sc}}{D} = k^2 I(q) [\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} + (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^*) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e})], \quad (21)$$

که در آن

$$I(q) = \frac{1}{q} \int_{\rho}^{\infty} [\epsilon(\rho) - 1] \sin(q\rho) \rho \, d\rho, \quad (22)$$

و

$$q = 2k \sin\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad (23)$$

که در آن ψ زاویه بین \mathbf{n} و \mathbf{n} یا همان زاویه پراکنندگی است. اگر موج فرودی دارای قطبش خطی به گونه‌ای باشد که بردار \mathbf{e} با صفحه پراکنندگی (صفحه شامل \mathbf{n} و \mathbf{n}) زاویه α

بسازد، با ملاحظات هندسی می‌توان نشان داد که

$$\left\{ \begin{aligned} [\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} + (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^*) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e})]_{\parallel} &= \cos \alpha (1 + \cos \psi), \\ [\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} + (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^*) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e})]_{\perp} &= \sin \alpha (1 + \cos \psi), \end{aligned} \right. \quad (24)$$

که در آن \parallel (یا \perp) نشان دهنده حالتی است که موج پراکنده شده دارای بردار قطبش \mathbf{e} منطبق (عمود) بر صفحه پراکنندگی است. اکنون با استفاده از رابطه‌های (۱۵)، (۲۱) و (۲۳) سطح مقطع پراکنندگی دیفرانسیلی را برای هر کدام از قطبشها به دست می‌آوریم

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\parallel} &= k^2 [I(q)]^2 \cos^2 \alpha (1 + \cos \psi)^2, \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\perp} &= k^2 [I(q)]^2 \sin^2 \alpha (1 + \cos \psi)^2. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

از این رابطه استفاده می‌کنیم و درجه قطبش موج پراکنده را حساب می‌کنیم

$$\Pi(\psi) = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\parallel} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\perp}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\parallel} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\perp}} = \cos 2\alpha, \quad (26)$$

که با درجه قطبش موج فرودی برابر است. به علاوه، سطح مقطع پراکنندگی دیفرانسیلی که روی هر دو قطبش موج پراکنده جمع بسته شده است را به دست می‌آوریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^2 [I(q)]^2 (1 + \cos \psi)^2. \quad (27)$$

روشن است که اگر موج فرودی دارای قطبش طبیعی باشد، درجه قطبش در رابطه (۲۶) صفر می‌شود ولی رابطه (۲۷) هنوز برقرار است.

از مطالب بند آخر به این نتیجه مهم می‌رسیم که قطبش موج پراکنده شده در هر حال با قطبش موج تابیده یکی است. البته باید توجه کرد که این نتیجه فقط برای محیط هم‌ارز (و مجازی) مورد نظر ما که خواص الکتریکی و مغناطیسی آن یکسانند، برقرار است و در بخش آخر نشان می‌دهیم که برای محیطهای فیزیکی واقعی همواره یک درجه قطبش وابسته به زاویه پراکنندگی وجود دارد.

برای اینکه محاسبات ما کامل شود، لازم است $I(q)$ را از رابطه (۲۲) به دست آوریم و در رابطه (۲۷) قرار دهیم. اما

۶.۲. محاسبه سطح مقطع پراکندگی برای کرمچاله‌ای با

$$B(r) = \frac{b^4}{r^3}$$

در این مورد برای محاسبه $I(q)$ جمله‌های رشته (۱۳) را در (۲۲) قرار می‌دهیم. سهم جمله اول رشته پس از محاسبه چنین به دست می‌آید

$$\rho^3 \left[\frac{1}{4} \frac{\sin(q\rho)}{q\rho} + \frac{1}{4} \cos(q\rho) + \frac{1}{4} (q\rho) \text{Si}(q\rho) - \frac{\pi}{8} (q\rho) \right],$$

در حالی که سهم جمله دوم عبارت است از

$$\rho^3 \left\{ \begin{aligned} & \left[-\frac{1}{48} \frac{\sin(q\rho)}{q\rho} - \frac{1}{240} \cos(q\rho) + \frac{1}{960} (q\rho) \sin(q\rho) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2880} (q\rho)^2 \cos(q\rho) - \frac{1}{5760} (q\rho)^2 \sin(q\rho) - \right. \\ & \left. \frac{1}{5760} (q\rho)^4 \cos(q\rho) + \frac{1}{11520} \pi (q\rho)^5 \right] \end{aligned} \right\},$$

آشکار است که سهم جمله دوم رشته و همچنین سهم دیگر جمله‌های بعدی به تندی کاهش می‌یابند و در مقایسه با سهم جمله نخست رشته ناچیز هستند. بر این اساس، ما در اینجا سهم مربوط به جمله نخست رشته که تنها عبارت اول آن تصحیح گردیده است را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$I(q) = \rho^3 \left\{ \frac{11}{48} \frac{\sin(q\rho)}{q\rho} + \frac{1}{4} \cos(q\rho) + \frac{1}{4} (q\rho) \left[\text{Si}(q\rho) - \frac{\pi}{2} \right] \right\}. \quad (31)$$

با جایگذاری این $I(q)$ در رابطه (۲۷) و استفاده از (۲۳) به رابطه زیر برای سطح مقطع دیفرانسیلی می‌رسیم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2 \rho^4}{16} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{11}{12} \tan\left(2k\rho \sin \frac{\psi}{2}\right) + \right. \\ & \left. \cos\left(2k\rho \sin \frac{\psi}{2}\right) \right]^2 \cot^2 \frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2} \\ & + \left(2k\rho \sin \frac{\psi}{2}\right)^2 \left[\text{Si}\left(2k\rho \sin \frac{\psi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

که بر خلاف کرمچاله قسمت قبل، به ازای $\psi = 0$ واگرا نیست بلکه می‌شود $k^2 \rho^4$ ، اما در $\psi = \pi$ صفر است. حد طول موج بلند این سطح مقطع را نیز با استفاده از بسط تیلور تابعهای

روشن است که $I(q)$ به انتخاب تابع شکل بستگی دارد. در ادامه، دو مثالی را که در بخش ۳ عنوان کردیم به طور جداگانه بررسی می‌کنیم و سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی را برای آنها حساب می‌کنیم.

۶.۱. محاسبه سطح مقطع پراکندگی برای کرمچاله‌ای با

$$B(r) = \frac{b^2}{r}$$

در این مورد $\varepsilon(\rho)$ را از رابطه (۱۱) در (۲۲) جایگذاری می‌کنیم. پس از محاسبه انتگرال به دست می‌آوریم

$$I(q) = \frac{\rho^2}{q} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(q\rho) \right),$$

که وقتی در (۲۷) قرار گیرد منجر به رابطه زیر برای سطح مقطع می‌شود

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \rho^4 k^2 \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}\left(2k\rho \sin \frac{\psi}{2}\right) \right]^2 \cot^2 \frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2}, \quad (28)$$

که در آن از (۲۳) نیز استفاده کرده‌ایم. این سطح مقطع به ازای $\psi = 0$ واگراست و به ازای $\psi = \pi$ (پراکندگی به عقب) صفر است. می‌توانیم حد طول موج بلند رابطه (۲۸) را با توجه به بسط تیلور $\text{Si}(x)$ و نگه داشتن کوچکترین توان k به دست آوریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2}{4} \rho^4 k^2 \cot^2 \frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2}. \quad (29)$$

در اینجا مناسب است که با استفاده از (۲۹) سطح مقطع پراکندگی را در نیم فضای $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi$ حساب کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{1}{2}} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{\pi^2 \rho^4 k^2}{4} \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cot^2 \frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2} \sin \psi d\psi \\ &= 4\pi^4 \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right) \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^2 (\pi \rho^2), \end{aligned} \quad (30)$$

که در واقع نشان دهنده کسری از انرژی است که در حد طول موج بلند در کل رو به عقب باز می‌تابد.

قطبش موج پراکنده جمع بسته شده است برابر است با

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) - \frac{\delta_e}{\delta_m} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right]^2}{64k^2} \times \left[\frac{(\delta_e^2 + \delta_m^2)(1 + \cos^2\psi) + 4\delta_e\delta_m \cos\psi}{\sin^6\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right], \quad (36)$$

که در $\psi = 0$ می‌شود $\frac{1}{4}k^2\rho^2(\delta_e + \delta_m)^2$ و در $\psi = \pi$ بر خلاف کره‌مجاله‌ها صفر نمی‌شود. یعنی در این مورد پراکندگی رو به عقب وجود دارد. به علاوه، درجه قطبش را چنین به دست می‌آوریم

$$\Pi(\psi) = \frac{(\delta_e^2 - \delta_m^2)\sin^2\psi}{(\delta_e^2 + \delta_m^2)(1 + \cos^2\psi) + 4\delta_e\delta_m \cos\psi}, \quad (37)$$

در نتیجه موج پراکنده شده به طور جزئی قطبیده می‌شود و میزان قطبش به زاویه پراکندگی بستگی دارد. این رفتار بر خلاف آن چیزی است که در مورد کره‌مجاله‌ها دیدیم. می‌توانیم نشان دهیم که زاویه‌ای وجود دارد که در آن درجه قطبش (۳۷) پیشینه (برابر یک) است.

به منظور مقایسه، حد طول موج بلند را برای رابطه (۳۶) به دست می‌آوریم. داریم

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{9}k^2\rho^2 \left[(\delta_e^2 + \delta_m^2)(1 + \cos^2\psi) + 4\delta_e\delta_m \cos\psi \right]. \quad (38)$$

همچنین سطح مقطع پراکندگی را برای نیم فضای $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi$ حساب می‌کنیم

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{32\pi^2}{9} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^4 \left[\frac{2\pi}{3} (\delta_e^2 + \delta_m^2) - 4\delta_e\delta_m \right] (\pi\rho^2), \quad (39)$$

که از نظر مرتبه بزرگی قابل مقایسه با رابطه (۳۴) مربوط به کره‌مجاله با تابع شکل $\frac{b^4}{r^3}$ است.

با مطالعه رفتار سطح مقطعهای پراکندگی دیفرانسیلی داده شده در رابطه‌های (۲۸)، (۳۲) و (۳۶) برحسب عدد موج نتایج مهمی را می‌توانیم بگیریم. ابتدا لازم است که جهت مشخصی را

$\tan(x)$ ، $\cos(x)$ و $\text{Si}(x)$ و نگه داشتن کوچکترین توان k به دست آورده‌ایم

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{529}{576} k^2 \rho^2 \cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad (33)$$

و مانند قسمت قبل، با استفاده از (۳۳) سطح مقطع کل را برای نیم فضای $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi$ حساب کرده‌ایم

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{529}{576} k^2 \rho^2 (2\pi) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\psi \, d\psi = \quad (34)$$

قابل توجه است که این کمیت برای کره‌مجاله قبلی با $\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2$ متناسب است.

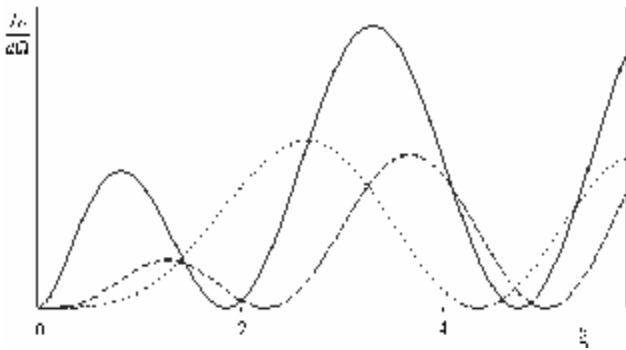
۷. نتیجه گیری

بدین ترتیب ما سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی را برای دو تابع شکل $\frac{b^4}{r^3}$ و $\frac{b^2}{r}$ در رابطه‌های (۲۸) و (۳۲) به دست آورده‌ایم. لازم به ذکر است که در انجام این محاسبات هیچ تقریبی برای طول موج به کار نرفته است. به علاوه، دیدیم که در اثر این پراکندگی هیچ تغییری در قطبش ایجاد نمی‌شود. این یک اثر یگانه است که فقط در این مورد رخ می‌دهد. در پراکندگی توسط محیطهای مادی قطبش تغییر می‌کند.

آموزنده است که این سطح مقطعها را با سطح مقطع پراکندگی از یک کره به شعاع ρ ، ضریب گذردهی الکتریکی $\epsilon = (1 + \delta_e)\epsilon_0$ و تراوایی مغناطیسی $\mu = (1 + \delta_m)\mu_0$ مقایسه کنیم. در اینجا δ_e و δ_m ثابتهایی کوچکتر از واحد هستند و فرض کرده‌ایم کره در خلاء واقع است. برای کره مورد نظر، با استفاده از رابطه (۱۸) می‌توان اثبات کرد:

$$\frac{\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{A}_{sc}}{\mathbf{D}} = k^2 \left[\frac{\sin qp \cdot -qp \cdot \cos qp}{q^2} \right] \left[\delta_e (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}) + \delta_m (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^*) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e}) \right]. \quad (35)$$

در اینجا فرض می‌کنیم موج تابشی دارای قطبش طبیعی است. می‌توان اثبات کرد که سطح مقطع پراکندگی که روی هر دو



شکل ۱. نمودار سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی حاصل از کرمچاله با تابع شکل b^2/r (منحنی توپر)، حاصل از کرمچاله با تابع شکل b^2/r^3 (منحنی خط چین) و حاصل از کره (منحنی نقطه چین)، بر حسب $\xi = 2\pi \frac{\rho}{\lambda}$ در محدوده طول موج بلند. در این محدوده تمایز ریشه‌ها به خوبی این سطح مقطعها را از هم قابل تشخیص می‌سازد. شعاعهای هر سه جسم را یکسان گرفته‌ایم.

کرمچاله با $B(r) = \frac{b^4}{r^3}$ کمتر از کرمچاله دیگر است.

شکل ۲ همان منحنیها را در محدوده بزرگتری از طول موج نشان می‌دهد. دیده می‌شود که با کاهش طول موج، ضمن نزدیکتر شدن صفرها به یکدیگر، شدت برای کرمچاله‌ها افزایش و برای کره کاهش می‌یابد. در شکل ۳ باز هم محدوده طول موج را گسترش داده‌ایم. جالب است که در طول موجهای کوتاه (در مقایسه با ρ) کمینه‌های هر سه جسم بر هم منطبق می‌شوند و شدت موج پراکنده از هر جسم به مقدار ثابتی می‌رسد، یعنی الگوی پراکندگی در طول موج کوتاه از یکدیگر قابل تشخیص نیست. (گرچه هنوز می‌توانیم با توجه به قطبش، کرمچاله‌ها را از کره تشخیص دهیم). در حالی که، بر اساس شکل ۱، در طول موجهای بلند تشخیص این اجسام از یکدیگر امکان پذیر است. این مطلب از نظر مشاهداتی می‌تواند دارای اهمیت باشد. ممکن است بتوان کرمچاله‌ها را (در صورت وجود) در یک آزمایش پراکندگی امواج الکترومغناطیسی با طول موج بلند شناسایی کرد. اول با توجه به درجه قطبش موج پراکنده شده می‌توان کرمچاله‌ها را از اجسام معمولی تشخیص داد. یادآوری می‌شود که درجه قطبش موج پراکنده شده توسط کرمچاله‌ها با درجه قطبش موج فرودی یکی است. سپس با

انتخاب کنیم. در اینجا برای سادگی محاسبات، جهت $\psi = \frac{\pi}{3}$ را انتخاب می‌کنیم. روشن است که انتخابهای دیگر (به جز جهت‌های $\psi = 0$ و $\psi = \pi$) الگوی کلی را تغییر نمی‌دهد. با آن انتخاب، سطح مقطعهای (۲۸)، (۳۲) و (۳۶) به ترتیب می‌شوند.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A\xi^2 \left[\frac{\pi}{2} - Si(\xi) \right]^2, \quad (40)$$

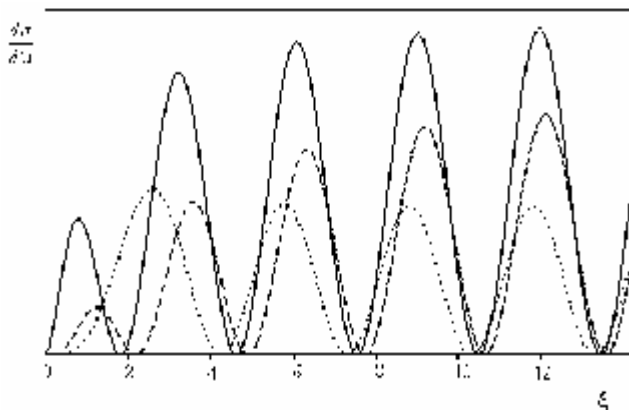
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = B\xi^2 \left\{ \left[\frac{11}{12} \sin \xi + \xi \cos \xi \right] + \xi^2 \left[Si(\xi) - \frac{\pi}{2} \right] \right\}^2, \quad (41)$$

و

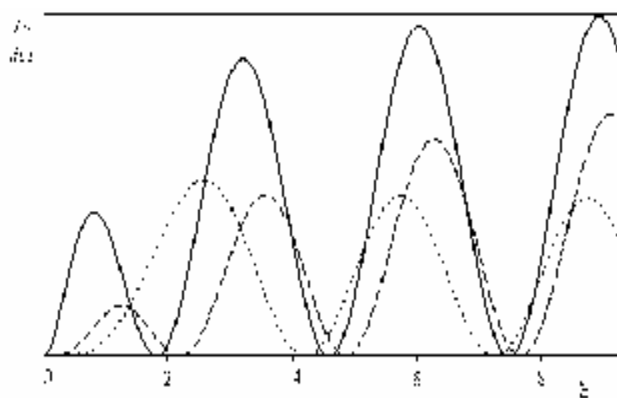
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = C \frac{(\sin \xi - \xi \cos \xi)^2}{\xi^2}, \quad (42)$$

که در آن $\xi = k\rho = 2\pi \frac{\rho}{\lambda}$ و کمیتی بدون بعد است. همچنین A ، B و C ثابتهایی هستند که در هر مورد می‌توانیم با بهنجارش مناسب آنها را تعیین کنیم.

شکل ۱ نمودار این سه سطح مقطع را بر حسب ξ در محدوده طول موجهای بلند نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی را مشخص نکرده‌ایم چون آنچه در اینجا برای ما مهم است صفرهای این سطح مقطعها است و نسبت دقیق شدت موج پراکنده شده را در نظر نگرفته‌ایم. منحنی توپر مربوط به کرمچاله با $B(r) = \frac{b^2}{r}$ ، منحنی خط چین مربوط به کرمچاله با $B(r) = \frac{b^4}{r^3}$ و منحنی نقطه چین مربوط به کره است. تمایز اصلی این منحنیها در محل وقوع صفرهای آنها است. این صفرها در واقع کمینه‌های پراش از این اجسام را نشان می‌دهند. اولین کمینه برای کرمچاله با $B(r) = \frac{b^2}{r}$ رخ می‌دهد و بعدی برای کرمچاله با $B(r) = \frac{b^4}{r^3}$. اولین کمینه مربوط به کره با کمینه‌های دوم کرمچاله‌ها رخ می‌دهد. با دانستن مقدار هر ریشه و طول موج می‌توانیم اندازه گلوله یا قطر کره را حساب کنیم (توجه کنید که شعاع هر سه جسم را یکسان گرفته‌ایم). گرچه مقیاس محور عمودی برای این منحنیها یکسان نیست، اما همان طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، شدت موج پراکنده شده از



شکل ۳. در این شکل باز هم نسبت به شکل ۲ محدوده وسیعتری از طول موج را در نظر گرفته ایم. در حد طول موجهای کوتاه ریشه‌ها به طور کامل بر هم منطبق می‌شوند. همچنین در این حد، دامنه هر منحنی به مقدار ثابتی می‌رسد.



شکل ۴. همان نمودار نشان داده شده در شکل ۱ اما در محدوده بزرگتری از طول موجها. در اینجا با کاهش طول موج، ریشه‌ها به هم نزدیکتر می‌شوند و شدت برای کره کاهش اما برای کره‌های افزایش می‌یابد.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (43)$$

را با همان تبدیلی که در مورد متریک کره‌های مجاله‌ای به کار بردیم به شکل دکارتی در می‌آوریم. داریم

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (44)$$

از اینجا با استفاده از رابطه (۵)، $\varepsilon(\rho)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon(\rho) = \frac{(2\rho + m)^2}{4\rho^2(2\rho - m)}. \quad (45)$$

روشن است که در خارج از افق $\rho = \frac{m}{2}$ ، گرچه $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \varepsilon(\rho) = 1$ ، اما وجود تکینگی در افق، رهیافت اختلالی بالا و استفاده از تقریب بورن را غیر عملی می‌سازد.

تعیین کمینه‌های سطح مقطع پراکندگی که به شعاع گلوگاه بستگی دارند، می‌توان اندازه گلوگاه را بر آورد کرد. برای مثال محاسبه‌های عددی که انجام داده‌ایم نشان می‌دهند که اولین کمینه پراش برای کره‌های مجاله با تابع شکل $\frac{b^2}{r}$ در طول موج $\lambda \cong 3/26\rho$ رخ می‌دهد. در حالی اولین کمینه برای کره‌های مجاله با تابع شکل $\frac{b^2}{r^2}$ در $\lambda \cong 2/70\rho$ و برای کره در $\lambda \cong 1/40\rho$ رخ می‌دهند. در نتیجه با داشتن طول موج، شعاع تعیین می‌گردد.

نکته مهمی که باید به آن اشاره کرد این است که توپولوژی غیر بدیهی کره‌های مجاله‌ای و وجود گلوگاه و یا عدم وجود افق، نقش اساسی را در موفقیت رهیافت ما در محاسبه سطح مقطع پراکندگی بازی می‌کند. توجه کردن به اصل باینه، تا حدی موفقیت این روش را قابل پیش‌بینی می‌سازد.

به جا است که این رهیافت را برای یک فضا زمان متقارن کروی دیگر که توپولوژی آن با کره‌های مجاله‌ها فرق دارد، یعنی سیاهچاله‌ها، بیازماییم. متریک شوارتسشیلد

مراجع

8. M Visser and D Hochberg, "Generic wormhole throats", gr-qc/9710001.
9. S Kar, D Sahdev, Bhawal, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 853.
10. S E P Bergliaffa and K E Hibberd, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 1.
۱۱. ب. نصرافهانی، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۳، ۴ (۱۳۸۲) ۳۰۲.
12. J D Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, New York (1989).
13. G Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd edition, Academic Press, New York (1999).
1. M S Morris and K S Thorne, *Am. J. Phys.* **56** (1988) 395.
2. B Nasr Esfahani, *Gen. Relativ. Gravit.* **37**(2) (2005)1.
۳. ب. نصرافهانی، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۲ (۴) (۱۳۷۹) ۲۲۹.
۴. ب. نصرافهانی، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۲ (۵) (۱۳۸۰) ۲۵۹.
5. N Riazi and B Nasr Esfahani, *Astrophysics and Space Science*, **271**, 3 (2000) 237.
6. K K Nandi, A Islam and J Evans, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 2497.
7. S Kim, H Lee, *Phys. Lett. B* **458** (1999) 245.