

جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی با ثابت کیهانشناسی

اسماعیل احمدی آذر

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه امام حسین (ع) و بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

(دریافت مقاله: ۸۰/۸/۲۹ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۱/۶/۹)

چکیده

در این مقاله، جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی (B-D) با ثابت کیهانشناسی برای جهانی که معادله حالت آن به صورت $p=m\Lambda_0\rho$ باشد، با فرض $\phi R^n=C$ به طور تحلیلی ارائه شده اند. متریک کیهان، متریک تخت ($k=0$) روبرتسون-واکر در نظر گرفته شده است. این جوابها که جوابهای غبار نظریه B-D با ثابت کیهانشناسی، جوابهای ناریائی $\Lambda=0$ ، جوابهای خلأ اوهانلن و توپر، جوابهای تورمی ($\Lambda=0$) را در بر می گیرند، غنی هستند و می توانند به حل مشکلاتی در کیهانشناسی کمک نمایند.

واژه‌های کلیدی: ثابت کیهانشناسی، نظریه برانس-دیکی، تورم

۱. مقدمه

آلبرت اینشتین در سال ۱۹۱۶ نظریه نسبیت عام را فرمولبندی کرد. او بعد از تدوین این نظریه، آنرا جهت ارائه یک مدل کیهانشناسی به کار برد و متوجه یک ناسازگاری در معادلات میدان گرانش شد و به یک نتیجه نادرست (جهان خالی از ماده) رسید. در حقیقت اعتقاد رایج در آن زمان مبنی بر ایستا بودن عالم، باعث شد که اینشتین به این تناقض برسد. او برای از بین بردن این تناقض بدون عدول از عقیده به ایستا بودن جهان، مجبور شد در معادلات میدان، ثابتی به نام ثابت کیهانشناسی Λ را وارد نماید و معادلات میدان گرانش را به صورت زیر اصلاح نماید [۱]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (1)$$

که در آن، $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی، R اسکالر انحناء، $g_{\mu\nu}$ تانسور متریک فضا-زمان خمیده ریمانی، و $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه ماده است.

الکساندر فریدمان ریاضیدان و فیزیکدان روسی در سال ۱۹۲۲ بدون وارد نمودن ثابت کیهانشناسی در معادلات میدان و فقط با فرض همگنی و همسانگردی فضا، با استفاده از معادلات میدان اینشتین نشان داد که جهان ایستا نیست. او مدلهایی برای جهان به دست آورد که مدلهای فریدمان نامیده می شوند. در سال ۱۹۲۹ ادوین هابل کیهانشناس آمریکائی، با بررسی سرعت دور شدن کهکشانها و فاصله آنها از زمین نتیجه گرفت که جهان در حال انبساط است که مدلهای فریدمان را تأیید می کرد. بعد از این کشف، اینشتین ثابت کیهانشناسی را از معادلات میدان حذف کرد و موضوع ثابت کیهانشناسی را منتفی اعلام کرد. با توسعه میدانهای کوانتومی معلوم شد که ثابت کیهانشناسی با چگالی انرژی خلأ و انرژی نقطه صفر این میدانها ارتباط دارد و حذف آن از معادلات میدان گرانش کار اشتباهی بوده است. بدین ترتیب این ثابت، مجدداً مطرح گردید و اهمیت ویژه ای در بحثهای کیهانشناسی پیدا کرد. به نظر می رسد اهمیت آن به

دالامبری و رد تانسور انرژی-تکانه ماده هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\square^\nu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (5)$$

$$T_{M\lambda}^\lambda = g_{\mu\nu} T_M^{\mu\nu}, \quad (6)$$

که در آن، $g = -\text{Det } g_{\mu\nu}$.

رابطه میان توزیع ماده و میدان گرانشی در نظریه برانس-دیکی به سادگی نسبت عام نیست، بلکه از حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی جفت شده (۳) و (۴) به دست می‌آید که نسبت به معادلات نسبیت عام (۱) بسیار پیچیده ترند. نظریه برانس-دیکی حالت خاصی از نظریه های اسکالر-تانسوری است که از عمومیت بیشتری برخوردارند. نظریه برانس-دیکی تنها به ازای $\omega \geq 500$ با مشاهدات مطابقت دارد و در حد $\omega \rightarrow \infty$ به نظریه نسبیت عام تبدیل می‌شود، اگرچه در این باره اختلاف نظرهایی وجود دارد.

تانسور انرژی-تکانه ماده، $T_{M\mu\nu}$ ، که در طرف راست معادلات میدان (۴) قرار گرفته است توصیف کننده انرژی و تکانه الکترومغناطیسی و ماده (به جز انرژی و تکانه گرانش) در یک چارچوب مختصات عام در فضا-زمان است. این تانسور باعث انحنا فضا-زمان اطراف خود می‌شود و از قانون بقاء

$$T_{M;\mu}^{\mu\nu} = 0, \quad (7)$$

تبعیت می‌کند. با فرض اینکه چگالی لاگرانژی ماده، به مشتقات $g_{\mu\nu}$ بستگی نداشته باشد، این تانسور به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_M^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} (\sqrt{g} L_M). \quad (8)$$

۳. جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی

بعد از فرمولبندی نظریه برانس-دیکی، فیزیکدانان آن را در کیهانشناسی به کار بردند و جوابهایی برای معادلات میدان در حالتی مختلف ارائه دادند. ساده ترین جواب، توسط برانس و دیکی به دست آمد. آنها با فرض همگنی و همسانگردی و تخت بودن جهان، یعنی با متریک تخت روبرتسون-واکر

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (9)$$

برای فضا-زمان، برای جهانی که به صورت غبار ($p=0$) باشد، معادلات میدان (۳) و (۴) را در غیاب ثابت کیهانشناسی حل

جهت نقشی باشد که این ثابت می‌تواند در حل یکی از مسائل اساسی کیهانشناسی یعنی تعیین سن کیهان ایفا نماید.

ایزاک نیوتون اعتقاد داشت که فضا، مانند زمان، دارای وجودی مستقل از ماده و نحوه توزیع آن است. ارنست ماخ این نظر نیوتون را قبول نداشت و برخلاف نیوتون عقیده داشت که لختی اجسام خاصیت ذاتی آنها نیست، بلکه ناشی از توزیع ماده در عالم می‌باشد، به گونه ای که توزیع ماده تنها چشمه ساختار فضا-زمان می‌باشد. این اصل را اصل ماخ می‌نامند. مطالعات بعدی نشان داد که نظریه نسبیت عام، اصل ماخ را شامل نشده است. تلاشهایی در جهت تعمیم نسبیت عام برای در برگرفتن اصل ماخ صورت گرفت و نظریه هایی در چند دهه اخیر تدوین یافت که از میان آنها می‌توان به نظریه های اسکالر-تانسوری اشاره کرد [۲]. نظریه برانس-دیکی، ساده ترین نظریه اسکالر-تانسوری است که در سال ۱۹۶۱ توسط برانس و دیکی ارائه گردید [۳]. این نظریه با اصل ماخ مطابقت دارد و کمتر به خواص ذاتی فضا متکی است. در این نظریه، علاوه بر میدان تانسوری که هندسه فضا-زمان را مشخص می‌کند، یک میدان اسکالر ϕ نیز وارد شده است که نقش ثابت گرانش نیوتون (G) را ایفا می‌کند و اصل ماخ از طریق آن احیاء می‌گردد.

۲. معادلات میدان نظریه برانس-دیکی با ثابت کیهانشناسی

معادلات میدان نظریه برانس-دیکی در حضور ثابت کیهانشناسی از وردش کش

$$A = -\frac{1}{16\pi} \int (\phi R + \omega \phi^{-1} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \nu \Lambda \phi - \nu \pi L_M) \sqrt{g} d^4 x, \quad (2)$$

نسبت به متغیرهای دینامیکی $g_{\mu\nu}$ و ϕ به دست می‌آیند. این معادلات عبارت اند از

$$\square^\nu \phi = \frac{\Lambda \pi}{\nu + 2\omega} T_{M\lambda}^\lambda - \frac{\nu \Lambda \phi}{\nu + 2\omega}, \quad (3)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{\nu} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda \pi}{\phi} T_{M\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{\nu} g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi_{;\rho}^{\rho}) - \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square^\nu \phi), \quad (4)$$

که در آنها، ω یک ثابت جفت شدگی بدون دیمانسیون (پارامتر برانس-دیکی) و \square^ν و $T_{M\lambda}^\lambda$ به ترتیب عملگر هموردای

$$R^{\nu}(t) = r(st + \ell) \frac{s-u}{s}, \quad (13)$$

$$r\phi(t) = (st + \ell) \frac{u}{s}, \quad (14)$$

به طوری که

$$s = \frac{u}{\nu} \left\{ -1 \mp \left[\nu(r + \nu\omega) \right]^{\frac{1}{\nu}} \right\}, \quad (15)$$

که در آنها، u ، s و ℓ مقادیر ثابت هستند. این جوابها، به وسیله اوهانلن و توپر نیز به دست آمده بود. برمن و سام [۱۵] نشان دادند وقتی که میدان اسکالر ϕ تابعی از r و t باشد، آنگاه بین ضریب مقیاس R و میدان اسکالر ϕ رابطه زیر برقرار است

$$\phi(t) = \left\{ (\omega + \nu) \left[Ar^{\nu} R(t) + B(t) \right] \right\}^{\frac{1}{\omega + \nu}}, \quad (16)$$

که در آن، A یک ثابت اختیاری و $B(t)$ یک تابع اختیاری از زمان است. همچنین به ازای $\omega = -\frac{\nu}{\rho}$ یک جواب نمایی برای جهان غلبه با تابش ($p = \frac{1}{3}\rho$) به دست آوردند.

۴. جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی با حضور ثابت کیهانشناسی

معادلات برانس-دیکی با حضور ثابت کیهانشناسی Λ ، (۳) و (۴) هنوز به طور کامل حل نشده اند. هدف ما در این بخش به دست آوردن جوابهای دقیق آنها در متریک تخت روبرتسون-واکر (۹) می باشد.

می توان نشان داد که مؤلفه های صفر-صفر و یک-یک معادله (۴) در متریک تخت روبرتسون-واکر عبارتند از [۱۶]

$$\nu \frac{\dot{R}^{\nu}}{R^{\nu}} - \Lambda = \frac{\lambda\pi}{\phi} \rho + \frac{\omega}{\nu} \frac{\dot{\phi}^{\nu}}{\phi^{\nu}} - \nu \frac{\dot{R}}{R} \frac{\dot{\phi}}{\phi}, \quad (17)$$

$$-\nu \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^{\nu}}{R^{\nu}} + \Lambda = \frac{\lambda\pi}{\phi} \rho + \frac{\omega}{\nu} \frac{\dot{\phi}^{\nu}}{\phi^{\nu}} - \nu \frac{\dot{R}}{R} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi}, \quad (18)$$

و از معادله (۳) داریم

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \nu \frac{\dot{R}}{R} \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{\nu\Lambda}{\nu + \nu\omega} + \frac{\lambda\pi}{\phi} \frac{\rho - \nu p}{\nu + \nu\omega}, \quad (19)$$

که در آنها، نقطه نشان دهنده مشتق نسبت به زمان است.

در معادلات (۱۷)–(۱۹) میدان اسکالر برانس-دیکی ϕ به صورت زیر با ثابت گرانش مؤثر G_{eff} ارتباط دارد

$$\phi = \frac{1}{G_{\text{eff}}^{\frac{\nu}{\nu + \nu\omega}}}, \quad (20)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\text{eff}} = G. \quad (21)$$

کردند و ضریب مقیاس کیهانی، $R(t)$ ، و میدان برانس-دیکی، ϕ ، را به صورت زیر بر حسب زمان به دست آوردند

$$R(t) \propto t^{\frac{\nu(\nu+\omega)}{\nu+\nu\omega}}, \quad \phi(t) \propto t^{\frac{\nu}{\nu+\nu\omega}}. \quad (10)$$

ناریائی [۴]، با همان فرض برانس و دیکی، وقتی که معادله حالت جهان به صورت

$$p = mp, \quad 0 \leq m \leq \frac{1}{3}, \quad (11)$$

باشد، ضریب مقیاس R و میدان اسکالر ϕ را به صورت زیر پیدا کرد

$$R(t) \propto t^{\frac{\nu+\nu\omega(1-m)}{\nu+\nu\omega(1-m^{\nu})}}, \quad \phi(t) \propto t^{\frac{\nu(1-\nu m)}{\nu+\nu\omega(1-m^{\nu})}}. \quad (12)$$

واضح است که جوابهای برانس-دیکی (۱۰) حالت خاصی از جوابهای ناریائی (۱۲) هستند که در آن $m=0$ می باشد.

گرینستین [۵] مدلهایی را که در آنها غلبه با میدان اسکالر ϕ است، مورد بررسی قرار داد و نشان داد که انحناء فضا-زمان و معادله حالت ماده هر چه باشد، برای مقادیر به حد کافی کوچک t ، اثرات انحناء فضا-زمان با تغییرات سریع میدان اسکالر ϕ از بین می رود. گیوریچ [۶] جوابهایی برای معادلات برانس-دیکی برای معادله حالت (۱۱) ارائه داد که جوابهای ناریائی حالت خاصی از آنهاست. جوابهای از نوع روبرتسون-واکر معادلات برانس-دیکی بوسیله دهنن و ابریجین [۷] نیز با روش دیگری به دست آمد. باتیستا [۹]، مدلی را که به وسیله برانس و دیکی به دست آمده بود به مدلهای غیر همگن تعمیم داد و چگالی ρ و فشار p را به صورت تابعی از t و r در نظر گرفت و نشان داد که برای جهان غبار، همان جوابهایی برای R و ϕ به دست می آید که قبلاً توسط برانس و دیکی پیدا شده بود. به عبارت دیگر، فرض ناهمگنی توزیع غبار، هیچ تغییری در جوابهای برانس-دیکی ایجاد نمی کند. مک ایتنوش [۱۰] نشان داد که با متریک تخت روبرتسون-واکر (۹) و ϕ ، p و ρ به صورت تابعی از t و r ، جوابهایی برای معادلات برانس-دیکی وجود دارد.

جوابهای خلاً معادلات برانس-دیکی برای متریک روبرتسون-واکر به وسیله اوهانلن و توپر [۱۱]، چاوت [۱۲]، سرورو و استیوز [۱۳]، لورنز-پتزوولد [۱۴] به دست آمد. چاوت، جوابهای خلاً معادلات برانس-دیکی را برای جهان تخت به صورت زیر ارائه داد

با تغییر متغیر $A = \dot{R}^2$ معادله دیفرانسیل (۲۸) به صورت زیر در می آید

$$(\omega n + \nu)RA' + (\epsilon + \nu n\omega - \omega n^2)A = \nu \Lambda R^2, \quad (29)$$

که در آن، پریم نشان دهنده مشتق نسبت به R است. در حالت $\omega n + \nu \neq 0$ و $\epsilon + \nu n\omega - \omega n^2 \neq 0$ ، معادله دیفرانسیل (۲۹) دارای جواب عمومی به صورت زیر است

$$\dot{R}^2 = \alpha R^{\frac{\epsilon + \nu n\omega - \omega n^2}{\omega n + \nu}} + \frac{\nu \Lambda}{\nu + \epsilon n\omega - \omega n^2} R^2, \quad (30)$$

که در آن، α یک ثابت انتگرال گیری است. معادله (۳۰) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dR}{dt} = \pm (\alpha R^{-\gamma} + \beta R^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (31)$$

که در آن

$$\beta = \frac{\nu \Lambda}{\nu + \epsilon n\omega - \omega n^2}, \quad \gamma = \frac{6 + 4n\omega - \omega n^2}{\omega n + \nu},$$

علامت $(-)$ به ترتیب مربوط به فازهای انبساطی (انقباضی) عالم می شود. چون علامت $+$ با مشاهدات مربوط به جهان فعلی مطابقت دارد، از این رو، از این به بعد، ما فقط علامت $+$ را به کار می بریم.

می توان نشان داد که فرض $\phi R^n = C$ با معادله حالت $p = m_{\Lambda_0} \rho$ به شرطی با یکدیگر سازگاری دارند که بین n و m_{Λ_0} رابطه زیر برقرار باشد

$$n = \frac{1 - \nu m_{\Lambda_0}}{\omega(m_{\Lambda_0} - 1) - 1}, \quad (32)$$

که در آن

$$m_{\Lambda_0} = \begin{cases} \cdot & \Lambda \neq \cdot \\ m & \Lambda = \cdot \end{cases}, \quad (33)$$

و m مقدار ثابت و $m \in [-1, 1]$ است.

معادله دیفرانسیل (۳۱) با تغییر متغیر $u = R^{\frac{\gamma + \nu}{2}}$ و

پس از عملیات جبری منجر به جوابهای دقیق زیر برای $R(t)$ ، $\phi(t)$ و $\rho(t)$ خواهد شد

$$R(t) = \begin{cases} a^\eta \sin^\eta(A + Bt) & \Lambda < \cdot \\ a^\eta \sinh^\eta(A + Bt) & \Lambda \geq \cdot \end{cases}, \quad (34)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} Ca^\zeta \sin^\zeta(A + Bt) & \Lambda < \cdot \\ Ca^\zeta \sinh^\zeta(A + Bt) & \Lambda \geq \cdot \end{cases}, \quad (35)$$

در استخراج معادلات دیفرانسیل (۱۷)–(۱۹) جهان را به صورت یک سیال کامل با چگالی ρ و فشار p در نظر گرفتیم که تانسور انرژی-تکانه آن به صورت زیر است

$$T_{M\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu, \quad (22)$$

که در آن، U_μ چار-بردار سرعت در چارچوب مختصات هم حرکت است. صورت (۲۲) برای تانسور انرژی-تکانه در مباحث کیهانشناسی وارد شده است، زیرا کیهان در مقیاسهای بزرگ با تقریب خوبی یک سیال کامل است و در نتیجه تانسور انرژی-تکانه برای آن به صورت (۲۲) خواهد بود.

معادله (۱۹) در نظریه برانس-دیکی معادله مستقلی نیست و می توان آنرا از معادلات (۱۷) و (۱۸) به دست آورد. پس برای تعیین توابع نامعلوم $\rho(t)$ ، $\phi(t)$ ، $R(t)$ و $p(t)$ فقط دو معادله مستقل داریم که برای پیدا کردن این مجهولها به دو معادله دیگر نیز نیاز داریم. یکی از این معادلات، می تواند معادله حالت

$$p = m_{\Lambda_0} \rho, \quad (23)$$

باشد که در آن m_{Λ_0} مقدار ثابت و $m_{\Lambda_0} \in [-1, 1]$ می باشد. معادله دیگر را یک معادله توانی بین ضریب مقیاس کیهانی R و میدان اسکالر برانس-دیکی ϕ به صورت [۷، ۱۷] و

$$\phi R^n = C, \quad (24)$$

در نظر می گیریم، که در آن n و C مقادیر ثابت ولی هر دو تابعی از پارامترهای ω ، m_{Λ_0} و Λ و ثابتهای G و $\epsilon_m = \rho R^{\nu(m+1)}$ هستند.

معادلات (۱۷)–(۱۹) با استفاده از معادله (۲۴) به صورت زیر درمی آیند

$$\frac{\Lambda \pi p}{C} R^n = (n - \nu) \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{\nu R^2} [\nu(n - 1) - (\omega + \nu)n^2] + \Lambda, \quad (25)$$

$$\frac{\Lambda \pi R^n}{C} (\rho - \nu p) = (\nu + \omega) \left[-n \frac{\ddot{R}}{R} + n(n - \nu) \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right] - \nu \Lambda, \quad (26)$$

$$\frac{\Lambda \pi \rho}{C} R^n = \frac{\dot{R}^2}{\nu R^2} (\epsilon - \omega n^2 - \epsilon n) - \Lambda. \quad (27)$$

ترکیب این سه معادله دیفرانسیل بعد از عملیات جبری، منجر به معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر برای $R(t)$ می شود

$$\nu(\omega n + \nu) \frac{\ddot{R}}{R} + (\epsilon + \nu n\omega - \omega n^2) \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \nu \Lambda. \quad (28)$$

جوابهایی که به این ترتیب به دست آوردیم بر حسب پارامترهای $\omega, m_{\Lambda_0}, \Lambda, R_0, \alpha$ و ثابتهای C می‌باشند. از جمله مزایای این جوابها، آن است که می‌توان از روی آنها جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی برای غبار ($p=0$) در حضور ثابت کیهانشناسی Λ ، جوابهای ناریائی، جوابهای خلأ اوهانلن و توپر، و جوابهای تورمی در غیاب ثابت کیهانشناسی Λ را استخراج کرد.

۵. جوابهای خاص

الف) حالت $\Lambda \neq 0$. وقتی که ثابت کیهانشناسی Λ حضور دارد، بنا به معادله های (۳۲) و (۳۳)، $m_{\Lambda_0} = 0$ خواهد شد، در این صورت جوابهای (۳۴)-(۳۶)، جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی برای غبار با حضور ثابت کیهانشناسی هستند. جوابهای اویهارا و کیم [۱۸] حالت خاصی از این جوابها هستند. این جوابها در حد $\omega \rightarrow \infty$ با جوابهای کیهانشناسی معادلات اینشتین برای غبار با حضور ثابت کیهانشناسی کاملاً مطابقت دارند.

ب) حالت $\Lambda = 0$. در غیاب ثابت کیهانشناسی Λ ، جوابهای (۳۴)-(۳۶) به صورت زیر خواهند بود

$$R(t) = \left[R_0^{\frac{\nu(1+\omega(1-m))}{\nu+\nu\omega(1-m)}} + L(m, \omega)t \right]^{\frac{\nu(1+\omega(1-m))}{\nu+\nu\omega(1-m)}}, \quad (46)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{G} R_0^{\frac{1-\nu\omega}{\nu+\omega(1-m)}} \left[1 + L(m, \omega) R_0^{\frac{\nu(1-\nu m)}{\nu+\omega(1-m)}} t \right]^{\frac{\nu(1-\nu m)}{\nu+\omega(1-m)}}, \quad (47)$$

$$\rho(t) = \epsilon_m \left[R_0^{\frac{\nu+\nu\omega(1-m)}{\nu+\omega(1-m)}} + L(m, \omega)t \right]^{\frac{\epsilon(m-1)\omega - \epsilon(m+1)}{\nu+\nu\omega(1-m)}}, \quad (48)$$

که در آنها

$$L(m, \omega) = \left[\frac{\nu\pi G \epsilon_m [\nu + \nu\omega(1-m)]^{\nu}}{\epsilon(m-1)^{\nu}\omega^{\nu} + (\nu m^{\nu} - \nu_0 m + \nu_1)\omega + \epsilon(\nu - \nu m)} \right]^{\frac{1}{\nu}}. \quad (49)$$

$$\rho(t) = \begin{cases} -\frac{\Lambda C}{\Lambda\pi} \left[\lambda \cot^{\nu}(A+Bt) + 1 \right] a^{\zeta} \sin^{\zeta}(A+Bt) & \Lambda < 0 \\ \frac{\Lambda C}{\Lambda\pi} \left[\lambda \coth^{\nu}(A+Bt) - 1 \right] a^{\zeta} \sinh^{\zeta}(A+Bt) & \Lambda \geq 0 \end{cases}, \quad (36)$$

که در آنها

$$A = \begin{cases} \sin^{-1} \left(\frac{R_0^{\frac{1}{\nu}}}{a} \right) & \Lambda < 0 \\ \sinh^{-1} \left(\frac{R_0^{\frac{1}{\nu}}}{a} \right) & \Lambda \geq 0 \end{cases}, \quad (37)$$

$$B = \left[\frac{[\nu + \nu\omega(1-m_{\Lambda_0})] |\Lambda|}{\nu(\nu\omega + \nu)} \right]^{\frac{1}{\nu}}, \quad (38)$$

$$a = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \left[\frac{\alpha [\nu + \nu\omega(1-m_{\Lambda_0})] (\nu\omega + \nu)}{\nu |\Lambda| [-\omega(m_{\Lambda_0} - 1) + 1]^{\nu}} \right]^{\frac{1}{\nu}}, \quad (39)$$

$$\eta = \frac{\nu [1 + \omega(1-m_{\Lambda_0})]}{\nu + \nu\omega(1-m_{\Lambda_0})}, \quad (40)$$

$$\xi = \frac{\nu(1-\nu m_{\Lambda_0})}{\nu + \nu\omega(1-m_{\Lambda_0})}, \quad (41)$$

$$\lambda = \frac{\epsilon(m_{\Lambda_0} - 1)^{\nu}\omega^{\nu} + (\nu m_{\Lambda_0}^{\nu} - \nu_0 m_{\Lambda_0} + \nu_1)\omega + \epsilon(\nu - \nu m_{\Lambda_0})}{[\nu + \nu\omega(1-m_{\Lambda_0})] (\nu\omega + \nu)}, \quad (42)$$

و $R_0 = R(t=0)$ است.

می‌توان نشان داد که ثابتهای α و C که در جوابهای (۳۴)-(۳۶) ظاهر شده‌اند، به صورت زیر با ثابتهای شناخته شده G و $\epsilon_m = \rho R^{\nu(m+1)}$ ارتباط دارند

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} C = \frac{1}{G}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha = \frac{\Lambda\pi G}{\nu} \epsilon_m. \quad (43)$$

در غیاب ثابت کیهانشناسی Λ ، ثابتهای α و C به صورت نسبتاً ساده زیر خواهند بود

$$C = \frac{1}{G}, \quad \alpha = \frac{\nu\pi G \epsilon_m}{\Gamma(m, \omega)}, \quad (44)$$

که در آن

$$\Gamma(m, \omega) = \frac{\epsilon(m-1)^{\nu}\omega^{\nu} + (\nu m^{\nu} - \nu_0 m + \nu_1)\omega + \epsilon(\nu - \nu m)}{[\omega(m-1) - 1]^{\nu}}. \quad (45)$$

$$R(t) = R_0 (\Theta t)^{\omega + \frac{1}{2}}, \quad (59)$$

$$\phi(t) = \phi_0 (\Theta t)^{\frac{1}{2}}, \quad (60)$$

که در آن، $\phi_0 = \frac{1}{G} R_0^{\omega + \frac{1}{2}}$ است. در این حالت ضریب مقیاس بر خلاف حالت قبلی به صورت یک تابع توانی با زمان تغییر می کند و میدان برانس-دیکی ϕ هم ثابت نیست بلکه به صورت توان دوم با زمان تغییر می کند.

۶. نتیجه گیری

الف) با توجه به جوابهای (۳۴)–(۳۶) در می یابیم که به ازای $\Lambda < 0$ ، گسترش جهان خیلی شبیه به گسترش جهان در حالت جهان بسته $k=+1$ و $\Lambda=0$ در مدل های فریدمان می باشد. یعنی اگر $R_0 = 0$ باشد، به ازای $\Lambda < 0$ ، جهان از یک تکینگی در گذشته شروع به انبساط کرده، ولی ثابت کیهانشناسی منفی به صورت یک نیروی جاذبه در جهان عمل می کند و باعث کند شدن انبساط می شود. زمانی فرا خواهد رسید که این نیروی جاذبه سبب توقف انبساط جهان خواهد شد. در این زمان، یعنی

$$t_m = \frac{\pi [\sqrt{2(\omega+2)}]}{\sqrt{(-2+2\omega(m\Lambda_0-1))|\Lambda|}}, \quad 2\omega(m\Lambda_0-1) \neq 2,$$

جهان از نظر وسعت در نقطه ماکزیمم خود قرار خواهد داشت. از این زمان به بعد، نیروی جاذبه بر انبساط کیهانی غالب می شود و جهان را منقبض خواهد کرد تا سرانجام کیهان در $t = 2t_m$ به روی خودش بسته خواهد شد و حجم آن به صفر خواهد رسید.

در حالت $\Lambda > 0$ ، ثابت کیهانشناسی به صورت یک نیروی دافعه عمل می کند و باعث می شود که جهان تا ابد انبساط پیدا بکند.

ب) برای تابش در غیاب ثابت کیهانشناسی نظریه های برانس-دیکی و نسبیت عام یکسان می باشند

$$R(t) = \left(\frac{32\pi G \epsilon_1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi = \frac{1}{G},$$

به ازای $R_0 = 0$ ، جوابهای (۴۶)–(۴۸) به صورت زیر در می آیند

$$R(t) = [L(m, \omega) t]^{\frac{2(\omega+1-m)}{2+\omega(1-m^2)}}, \quad (50)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{G} [L(m, \omega) t]^{\frac{2(1-m)}{2+\omega(1-m^2)}}, \quad (51)$$

$$\rho(t) = \epsilon_m [L(m, \omega) t]^{\frac{2(m^2-1)\omega - 2(m+1)}{2+\omega(1-m^2)}}. \quad (52)$$

این جوابها خودشان، به عنوان حالات خاص، غبار ($m=0$)، تابش ($m = \frac{1}{3}$) و خلأ کاذب ($m=-1$) را در بر می گیرند. به ازای $m \in [0, \frac{1}{3}]$ جوابهای ناریائی (۱۲) به دست می آیند. علاوه بر اینها، به ازای

$$m = -\frac{(\omega+2) \pm (\omega+1)\sqrt{2(\omega+2)}}{\pm \omega\sqrt{2(\omega+2)}}, \quad (53)$$

جوابهای خلأ اوهانلن و توپر به دست می آید

$$R(t) \propto t^{\frac{\omega \pm \sqrt{1+\frac{2\omega}{3}}}{\omega+2}}, \quad (54)$$

$$\phi(t) \propto t^{\frac{1 \pm \sqrt{2(\omega+2)}}{\omega+2}}. \quad (55)$$

این جوابها با جوابهای (۱۳) و (۱۴) در حالتی که مقدار ثابت ℓ صفر باشد کاملاً مطابقت دارند.

همچنین به ازای $m=-1$ ، جوابها تورمی خواهند بود، به طوری که در حد $\omega \rightarrow \infty$ برای زمانهای کوچک ($\Theta t \ll 1$) و R_0 ، ϕ به صورت زیر تبدیل خواهند گردید

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} R(t) = R_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda \pi G}{3}} \rho_f t\right), \quad (56)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(t) = \frac{1}{G}, \quad (57)$$

که در آن

$$\Theta^{\frac{1}{2}} = \frac{32\pi G \rho_f R_0}{(\omega+2)(\omega+2)}. \quad (58)$$

در این حالت ضریب مقیاس به صورت نمایی با زمان تغییر می کند و میدان برانس-دیکی ϕ مقدار ثابت $\frac{1}{G}$ است که با نتایج نسبیت عام در غیاب کیهانشناسی Λ در حالتی که معادله حالت جهان به صورت $p = -\rho_f$ باشد، کاملاً مطابقت دارد. در حالتی که ($\Theta t \gg 1$) باشد، R و ϕ به صورت زیر با زمان تغییر می کنند.

جالب توجه است که در سالهای اخیر، مشاهده ابرنواختران بسیار دور نشان می دهد که ثابت کیهانشناسی بایستی غیر صفر باشد، از اینرو جواب غبار با ثابت کیهانشناسی در بین جوابهای به دست آمده اهمیت ویژه ای پیدا می کند [۱۹].

قدردانی

بر خود لازم می دانم از استاد ارجمند و محترم جناب آقای دکتر نعمت اله ریاضی که متن اولیه مقاله را مطالعه و با نظرات و پیشنهادات ارزشمند خود اینجانب را راهنمایی نموده، تشکر و قدردانی بنمایم. همچنین از همکار ارجمند جناب آقای حبیب اله قلاز که در تایپ این مقاله بنده را یاری نمودند، تشکر می کنم.

$$\rho(t) = \frac{3}{32\pi G t^2}.$$

(ج) در حالت $m=-1$ که جهان در یک حالت غیر عادی با فشار منفی و معادله حالت $p=-\rho_f$ مقدار ثابت) قرار داشته، در غیاب ثابت کیهانشناسی Λ ، جواب تورمی است.

(د) ما در این تحقیق، معادلات برانس-دیکی را برای جهانی که معادله حالت آن به صورت $p = m \rho$ باشد، با وارد کردن فرض $\phi R^n = C$ و پیدا کردن یک رابطه بین n و m ، به دست آوردیم. این جوابها، اگر چه جوابهای غبار ($m=0$)، تابش ($m = \frac{1}{3}$)، و خلأ کاذب ($m=-1$) را شامل می شود، غنی هستند و می توانند به حل مشکلاتی در کیهانشناسی کمک نمایند ولی کاملاً کلی نیستند. برای مثال، برای یک سیال کامل با معادله حالت $p=\alpha\rho T$ ممکن است این جوابها صادق نباشد.

مراجع

1. S Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**(No. 1)(1989) 1.
2. T Singh, T Singh, *Int. J. Mod. Phys.* **2** (No.3) (1987) 645.
3. C H Brans R H Dicke, *phys. Rev.* **124** (1961) 925.
4. H Nariai, *Prog. Theor. Phys.* **40** (1968) 2314.
5. G B Greenstein, *Astrophys. Space Sci.* **2** (1968) 155.
6. L E Gurevich, A M Finkelstein, V A Ruban, *Astrophys. Space Sci.* **22** (1973) 333.
7. H Dehnen, O Obrego n, *Astrophys. Space Sci.* **14** (1971) 454.
8. H Dehnen, O Obrego n, *Astrophys. Space Sci.* **15** (1972) 326.
9. A B Batista, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 2119.
10. C B G McIntosh, *Phys. Lett.* **A43** (1973) 33.
11. J O Hanlon, B O J Tupper, *Nuovo Cimento*, **7B** (No. 2) (1972) 305.
12. P Chauvet, *Astrophys. Space Sci.* **90** (1983) 51.
13. J M Cervero, P G Estevez, *Gen. Rel. Grav.* **15** (1983) 351.
14. D Lorentz-Petzold, *Astrophys. Space Sci.* **96** (1983) 451.
15. M S Berman, M M Som, *Int. J. Theor. Phys.* **31** (No. 2) (1992) 325.
16. E Ahmadi-Azar, N Riazi, *Astrophys. Space Sci.* **226** (1995) 1.
17. L O Pimentel, *Astrophys. Space Sci.* **112** (1985) 175.
18. K Uehara, C W Kim, *Phys. Rev.* **D26** (1982) 2575.
19. T Padmanabhan, gr-qc/0204020v1 (2002).