

کوانتش دستگاههای فرافریمیونی و فرابوزونی مرتبه ۲ به روش فراکروشه پایلرز

علی مصطفی زاده

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

و

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

تاریخ دریافت: ۳۱ مرداد ۱۳۷۴

چکیده

در این مقاله حد کلاسیک دستگاههای کوانتومی با درجات آزاد فرافریمیونی و فرابوزونی مرتبه ۲ بررسی شده است. کوانتش این دستگاهها با تعمیم روش کروشه پایلرز و در چارچوب مکانیک لاگرانژی انجام شده و برای دستگاه فرافریمیونی مرتبه ۲ یک بعدی کلیترین لاگرانژی ممکن به دست آمده است.

۱- مقدمه

خاصی برخوردار است. یکی از جنبه‌های قابل توجه پدیده ابر تقارن رابطه آن با ناوردهای توپولوژیک است. در سال ۱۹۸۲، ویتن [۱۵] در پی مطالعاتش در مکانیک کوانتومی ابر تقارنی، موفق شد رابطه مستقیمی بین ابر تقارن و قضیه آتیا - سینگر [۳] کشف کند. ایده ویتن در این زمینه به وسیله آلوارز - گومه [۱] و ویندی [۱۶]، برای نخستین بار برای اثبات ابر تقارنی قضیه اندیس به کار گرفته شد. این روش بعدها دقیقتر شده و جنبه‌های مختلف استفاده از ابر تقارن و روش انتگرال مسیر مورد مطالعه قرار گرفته است [۹].

مرجع [۱۰] به بررسی خواص توپولوژیکی پدیده فرابزر تقارن می‌پردازد و ناوردهای توپولوژیکی خاصی را معرفی می‌کند که وابسته به رده خاصی از دستگاههای کوانتومی فرابزر تقارنی است. رابطه این ناوردها با قضیه اندیس نیز اخیراً به اثبات رسیده است [۱۱]، که انگیزه نویسنده از مطالعه فرابزر تقارن را توجیه می‌کند.

در این مقاله، ابتدا فرآمار را تعریف و ساختار جبری عملگرهای آفرینش و نابودگر فرافریمیونی و فرابوزونی را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳، ساختار ریاضی ابر تقارن را بررسی می‌کنیم و روش کروشه پایلرز برای کوانتش دستگاههای ابر تقارنی کلاسیک را توضیح می‌دهیم. بخش ۴،

مقوله فرآمار اولین بار در سال ۱۹۵۳ توسط گرین [۷] برای تعمیم نظریه کوانتومی میدان مطرح شد و مطالعه آن در دهه ۱۹۶۰ به انجام رسید [۸]. نتایج این مطالعات مفصل به وسیله اوهنوکی و کامفوجی [۱۲] گردآوری شده و به چاپ رسیده است. از جمله زمینه‌های مربوط به فرآمار، مطالعه دستگاههای کلاسیک با درجات آزادی فرآماری و ساختارهای جبری وابسته به آنها یعنی جبر فراگراسمانی [۱۲] و به خصوص کاربرد فرآمار در نظریه ریسمان [۲] و دستگاههای کوانتومی با تقارن داخلی [۶] را می‌توان برشمرد. در اواخر دهه ۱۹۸۰ اولین مدل کوانتومی فرابزر تقارنی از طرف روباکوو و سپیریدونو [۱۴] ارائه شد که به طور مشخص به فرآمار گرین [۷] مربوط بود. از انتشار مقاله روباکوو و سپیریدونو [۱۴] تاکنون دهها مقاله در توضیح، تعمیم، و بررسی پدیده فرابزر تقارن منتشر شده است، اما تاکنون فرمولبندی لاگرانژی - انتگرال مسیری برای فرابزر تقارن کوانتومی ارائه نشده است. اولین قدم در این راه، مطالعه فرابزر تقارن کلاسیک و کوانتش چنین دستگاههایی است.

اهمیت بررسی فرابزر تقارن را می‌توان با توجه به این مهم که فرابزر تقارن در حقیقت تعمیمی از ابر تقارن است، توجیه کرد. نقش ابر تقارن در زمینه‌های مختلف فیزیک نظری غیرقابل انکار است. از این رو فهم فرابزر تقارن نیز از اهمیت

این روابط را می توان به سهولت به دستگاههای چندبعدی (بس ذره‌ای) تعمیم داد و از آنها به عنوان روابط تعریف کننده عملگرهای آفرینش، نابودگر و شمارش استفاده کرد. در این صورت داریم:

$$[a_k, N_l] = \delta_{kl} a_l \quad (5-2)$$

$$[a_k^\dagger, N_l] = -\delta_{kl} a_l^\dagger \quad (6-2)$$

$$[N_k, N_l] = 0 \quad (7-2)$$

$$N_k^\dagger = N_k \quad (8-2)$$

در اینجا رابطه (۷-۲) در حکم عدم وابستگی بین درجات آزادی مختلف است.

ساختار جبری کوانتش ثانویه یعنی معادلات (۵-۲) تا (۸-۲) ربطی به آمار حاکم بر ذرات (درجات آزادی) ندارد. در واقع آمار مقوله‌ای است جدا که برای دستگاههای کوانتومی بس ذره‌ای متشکل از ذرات همسان مطرح می شود. تعریف [۶]: فراآمار یا آمار کلی ذرات همسان به آماری گفته می شود که در آن تعداد ذرات در یک حالت متقارن یا پادمتقارن نتواند از یک عدد صحیح مشخص (p) فراتر رود. عدد (p) مرتبه فراآمار نامیده می شود. تعریف بالا برای $p=1$ ، آمار معمول در نظریه کوانتومی میدان را به دست می دهد و در این صورت دو نوع آمار برای ذرات همسان وجود دارد که به ترتیب آنها را آمار فرمیونی و بوزونی می گویند. برای $p > 1$ دو گروه یادشده را ذرات با آمارهای فرامیونی و یا بوزونی می نامند.

تعریف فراآمار از تعدادی فرضیه بنیادی نظریه کوانتومی میدان نتیجه می شود [۶]، [۲] و به طور کمی به تعریف عملگر شمارش به صورت:

$$N_k := \frac{1}{\hbar} [a_k^\dagger, a_k]_{\mp} \pm \frac{p}{\hbar} \quad (9-2)$$

$$:= \frac{1}{\hbar} (a_k^\dagger a_k \mp a_k a_k^\dagger) \pm \frac{p}{\hbar} \quad (9-2)$$

منجر می شود. در این رابطه علائم +، - به ترتیب به آمار فرابوزونی و فرامیونی مربوط می شوند. با قراردادن تساوی (۹-۲) در معادلات (۵-۲)، (۶-۲)، (۷-۲) داریم:

$$[a_k, [a_l^\dagger, a_l]_{\mp}] = \hbar \delta_{kl} a_l \quad (10-2)$$

$$[a_k^\dagger, [a_l^\dagger, a_l]_{\mp}] = -\hbar \delta_{kl} a_l^\dagger \quad (11-2)$$

$$[[a_k^\dagger, a_k], [a_l^\dagger, a_l]] = 0 \quad (12-2)$$

به تعمیم روش کوانتش پایریلز برای دستگاههای کلاسیک با درجات آزادی فرافرمیونی و فرابوزونی مرتبه ۲ اختصاص یافته است. در این بخش با به کارگیری قید تناظر کوانتش کانونیک و کوانتش به روش پایریلز، کلیترین لاگرانژی برای دستگاه فرافرمیونی یک بعدی نیز به دست آمده است. در بخش ۵ خلاصه نتایج و توضیحات نهایی بررسی می شود.

۲- فراآمار و ساختار ریاضی آن

برنامه کوانتش ثانویه [۴] طبیعیترین روش برای مطالعه نظریه‌های کوانتومی میدان است. در این برنامه حالت‌های نظریه با تأثیر عملگرهای آفرینش بر حالت خلأ به دست می آیند. به طور خلاصه کوانتش ثانویه بر فرض وجود حالت خلأ $|0\rangle$ و عملگرهای آفرینش a_k و نابودگر a_k^\dagger استوار است. در اینجا اندیس k برای مشخص کردن درجات آزادی (ذرات) به کار می رود. در نظریه میدان کوانتومی چنین فضایی را فضای Fock می نامند. این فضا را می توان به عنوان ضرب تانسوری فضای هیلبرت بی نهایت نوسانگر در نظر گرفت. فضای هیلبرت یک نوسانگر هماهنگ با تأثیر عملگرهای a ، a^\dagger بر روی یک حالت $|0\rangle$ ، به صورت زیر تعریف می شود

$$|n\rangle = a^{+n} |0\rangle$$

تأثیر عملگرهای آفرینش و نابودگر بر این بردارهای پایه با روابط:

$$a^{+m} |n\rangle = |m+n\rangle \quad (1-2)$$

$$a^m |n\rangle = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n < m \\ |n-m\rangle & \text{اگر } n \geq m \end{cases} \quad (2-2)$$

بیان می شوند و تعداد ذرات با تأثیر عملگر شمارش N :

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (3-2)$$

داده می شود. با فرض ارتونورمال بودن بردارهای پایه:

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$$

و استفاده از روابط (۱-۲) و (۲-۲) می توان درستی معادلات زیر را به سادگی اثبات کرد:

$$[a, N] = a$$

$$[a^\dagger, N] = -a^\dagger \quad (4-2)$$

$$N^\dagger = N$$

$$[\xi_i^\alpha, \xi_j^{\alpha+}]_{-\eta} = \delta_{ij} \quad (22-2)$$

$$[\xi_i^\alpha, \xi_j^\alpha]_{-\eta} = 0 \quad (23-2)$$

$$[\xi_i^\alpha, \xi_j^{\beta+}]_{\eta} = [\xi_i^\alpha, \xi_j^\beta]_{\eta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (24-2)$$

عملگرهای ξ_i^α و عملگرهای الحاقی آنان $\xi_i^{\alpha+}$ با رابطه (۲۱-۲) به a_i^+ a_i مربوط می شوند. این عملگرها را مختصات گرین a می نامند. در تساویهای (۲۲-۲) - (۲۴-۲)، اگر a_k عملگر فرابوزونی باشد $\eta = +$ و اگر a_k عملگر فرافرمیونی باشد $\eta = -$ است. مرتبه آمار در این نمایش با تعداد مختصات گرین تعیین می شود و فضای هیلبرت نمایش B از بردارهای پایه:

$$\left| \begin{matrix} a_1 \dots a_l \\ i_1 \dots i_l \end{matrix} \right\rangle := \left| \xi_{i_1}^{a_1+} \dots \xi_{i_l}^{a_l+} \right| 0 \rangle \quad (25-2)$$

ساخته می شود. این نمایش نیز با شرط:

$$\xi_i^\alpha |0\rangle = 0 \quad (26-2)$$

که در آن $|0\rangle$ بردار حالت خلأ رابطه (۲-۱۷) است، به طور یگانه تعریف می شود. به سادگی می توان نشان داد که اعضای نمایش A را می توان با توجه به رابطه (۲-۲۱) و رابطه الحاقی آن به صورت اعضای B نشان داد. از این رو A زیرفضایی از B را می سازد که باید برای توصیف خصوصیات فیزیکی یک سیستم فرآاماری مورد استفاده قرار گیرد. به عبارت دیگر مختصات گرین تنها مفهوم ریاضی دارد و برای استخراج مفاهیم فیزیکی همواره باید به زیرفضای A رجوع شود. همچنین می توان نشان داد که نمایش A به عنوان حلقه چندجمله ایهای تولیدشده به وسیله a_k^+ تحلیل ناپذیر است، در صورتی که نمایش B به عنوان حلقه چندجمله ایهای تولید شده به وسیله $\xi_k^{\alpha+}$ نمایش تحلیل پذیری است [۸]. در مرجع [۱۲] رابطه بین دو حلقه A و B به تفصیل بررسی شده است.

مقوله قابل توجه دیگر در این رابطه امکان وجود بیش از یک نوع ذره همسان است. در این صورت مسئله رابطه جبری بین عملگرهای آفرینش و نابودگر هر یک از این ذرات با دیگری مطرح می شود. این مسئله در مرجع [۸] به طور کامل بررسی شده است. دو نوع ذره a و b با فرآآمار p_a و p_b و عملگرهای نابودگر b_j و a_j را در نظر بگیرد:

$$a_i |0\rangle = b_j |0\rangle = 0 \quad (27-2)$$

می توان نشان داد که اگر $p_a \neq p_b$ باشد، در این صورت a_i^+ و a_i با b_j^+ و b_j جابه جا و یا پادجابه جا می شوند. در صورتی که

این روابط را می توان با استفاده از اصل عدم وابستگی آنها به نمایش عملگرهای آفرینش و نابودگر و به کارگیری اتحاد ژاکوبی به روابط زیر تعمیم داد [۱۲]

$$[a_k, [a_l^+, a_m]_{\mp}] = 2\delta_{kl} a_m \quad (13-2)$$

$$[a_k, [a_l^+, a_m^+]_{\mp}] = 2\delta_{kl} a_m^+ \mp 2\delta_{km} a_l^+ \quad (14-2)$$

$$[a_k, [a_l, a_m]_{\mp}] = 0 \quad (15-2)$$

از تساویهای حاصل (۲-۱۳)، (۲-۱۵) معمولاً به عنوان روابط کلی تعریف کننده پدیده فرآآمار یاد می کنند [۷، ۸]. در این دیدگاه مرتبه آمار به عنوان شاخص نمایشهای این جبر ظهور می کند [۸]، به این ترتیب که اگر فضای هیلبرت بردارهای حالت را با پایه های:

$$|k_1, \dots, k_l\rangle := |a_{k_1}^+ \dots a_{k_l}^+ |0\rangle \quad (16-2)$$

بسازیم، این فضا که آن را A می نامیم، نمایشی برای عملگرهای a_k و a_k^+ به دست می دهد. در این نمایش داریم:

$$a_k |0\rangle = 0 \quad (17-2)$$

$$a_k a_l^+ |0\rangle = p_{kl} |0\rangle, \quad p_{kl} \in \mathcal{P} \quad (18-2)$$

با استفاده از حاصلضرب داخلی A و رابطه (۲-۱۸) می توان نشان داد [۱۲] که این رابطه به تساوی:

$$a_k a_l^+ |0\rangle = p\delta_{kl} |0\rangle \quad (19-2)$$

منتهی می شود (به عبارت دیگر $p_{kl} = p\delta_{kl}$) که در آن p یک عدد صحیح است. به سادگی می توان نشان داد که معادلات (۲-۱۷)، (۲-۱۹) و فرض

$$N_k |0\rangle = 0 \quad (20-2)$$

تعریف (۲-۹) را برای عملگر شمارشگر به دست می دهند. گرین [۷] نمایش دیگری را برای جبر a_k و a_k^+ پیشنهاد کرده است که در آن تساویهای سه تایی (۲-۱۳) - (۲-۱۵) را می توان از تساویهای دوتایی به دست آورد. این نمایش که آن را نمایش گرین می نامند، از این جهت اهمیت کاربردی فراوانی دارد. به طور خلاصه می توان نشان داد که تساویهای (۲-۱۳) - (۲-۱۵) از روابط زیر به دست می آیند

$$a_i = \sum_{\alpha=0}^{p-1} \xi_i^\alpha \quad (21-2)$$

می توان به این گونه دستگاهها تعمیم داد. ابتکار "برزین" از طرف ریاضیدانها نیز مورد توجه قرار گرفت و نظریه هایی چون نظریه ابر خمینه ها بر پایه فیزیک کلاسیک فرمیونی بنا شد [۴].

ساختار جبریی که می تواند برای توصیف دستگاههای مکانیکی با درجات فرمیونی و بوزونی - ابر دستگاهها مورد استفاده قرار گیرد، جبر گراسمان نامیده می شود. با استفاده از نوعی جبر گراسمانی می توان دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط را به دستگاه ابراعداد تعمیم داد و دیگر ساختارهای جبری و هندسی را براساس این دستگاه ابراعداد بنانهاد. این روش به طور بسیار کاملی از طرف دویت به کار گرفته شده است [۵].

تعریف: فضای برداری حقیقی V^N با پایه $\{\xi^1, \dots, \xi^N\}$ و $V^N \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C} = V^N_{\mathbb{C}}$ را در نظر می گیریم. با تبدیل بردارهای پایه ξ^a به مولدهای یک جبر شرکت پذیر، $V^N_{\mathbb{C}}$ را می توان به یک جبر شرکت پذیر تبدیل کرد. اگر عمل جبر را با * نشان دهیم، روابط:

$$\xi^a * \xi^b = -\xi^b * \xi^a \quad a, b = 1, \dots, N \quad (1-3)$$

جبری را روی $V^N_{\mathbb{C}}$ تعریف می کنند که آن را جبر گراسمان می نامند و با علامت Λ^N نشان می دهند. در محاسبات برای اختصار عمل جبر * نوشته نمی شود و معمولاً رابطه (۱-۳) به صورت ساده تر:

$$\xi^a \xi^b = -\xi^b \xi^a \quad [\xi^a, \xi^b]_{+} = 0 \quad (2-3)$$

و اعضای جبر به صورت

$$z \in \Lambda^N \quad z = z_0 + \sum_{k=1}^N C_{a_1, \dots, a_k} \xi^{a_1} \dots \xi^{a_k} \quad (3-3)$$

نشان داده می شوند. در رابطه (۳-۳) C_{a_1, \dots, a_k}, z_0 اعداد مختلط اند و قرار داد جمع روی اندیسه های تکرار شده، یعنی $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, N$ به کار رفته است. این قرار داد در مباحث بعدی نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت. برای تعریف ابراعداد، جبر گراسمان Λ^{∞} را در نظر می گیریم. این جبر (همچون Λ^N با $N < \infty$) از دو زیرمجموعه

$$\Lambda^{\infty}_{\mathbb{C}} := \left\{ z \in \Lambda^{\infty} : z = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{a_1, \dots, a_{\nu k}} \xi^{a_1} \dots \xi^{a_{\nu k}} \right\} \quad (4-3)$$

$p_a = p_b = p$ باشد این عملگرها در روابط فرآآماری صدق می کنند که بر دو نوع اند. برای توضیح این روابط می توان از نمایش گرین استفاده کرد. مختصات گرین با روابط

$$a_i =: \sum_{\alpha=0}^{P-1} \xi_i^{\alpha}, \quad b_j =: \sum_{\alpha=0}^{P-1} \xi_j^{\alpha} \quad (28-2)$$

$$i = 1, \dots, N_a; \quad j = 1, \dots, N_b$$

$$a_i | \cdot \rangle = b_j | \cdot \rangle = \xi_i^{\alpha} | \cdot \rangle = \xi_j^{\alpha} | \cdot \rangle = 0$$

$$(29-2)$$

تعریف می شوند. روابط فرآآماری بین a_i و a_i^{\dagger} و b_j را می توان از روابط زیر به دست آورد [۸]

$$[\xi_i^{\alpha}, \xi_j^{\alpha}]_{-\eta} = [\xi_i^{\alpha}, \xi_j^{\alpha+}]_{-\eta} = 0$$

$$[\xi_i^{\alpha}, \xi_j^{\beta}]_{\eta} = [\xi_i^{\alpha}, \xi_j^{\beta+}]_{\eta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (30-2)$$

که در آن η می تواند \pm باشد. به ازای $\eta = +$ ذرات a و b نسبت به هم فرابوزونی و به ازای $\eta = -$ نسبت به هم فرافریمیونی نامیده می شوند. فرآآمار نسبی که با علامت η در روابط (۳۰-۲) تعریف می شوند برای مورد آشنای $p = 1$ یعنی فرمیونها و بوزونها به صورت ساده ای مطرح است. برای این ذرات دو فرمیون از نوع مختلف نسبت به هم آمار فرمیونی دارند و یک فرمیون با یک بوزون و یا دو بوزون نسبت به هم آمار بوزونی دارند. تعمیم این مهم به پدیده فرآآمار ($p > 1$) متجربه قرارداد "آمار نسبی طبیعی" می شود [۸]. در آمار نسبی طبیعی داریم:

(الف) - $p_a \neq p_b$ در این صورت اگر هر دو ذره فرافریمیونی باشند، آمار نسبی فرمیونی و در غیر این صورت بوزونی است.

(ب) - $p_a = p_b = p$ در این صورت اگر هر دو ذره فرافریمیونی باشند، آمار نسبی فرافریمیونی و در غیر این صورت فرابوزونی است. برای $p_a = p_b$ (الف) وجود آمار نسبی فرمیونی به معنی، پادجابه جایی a_i و a_i^{\dagger} و b_j^{\dagger} و آمار نسبی بوزونی به معنی جابه جایی این عملگرهاست (نه مختصات گرین آنها).

۳- ابر نقران کلاسیک و ابراعداد

دستگاههای کلاسیک با درجات آزادی فرمیونی اولین بار توسط برزین بررسی شدند [۴]. با مطالعه ویژگیهای این دستگاهها و روشهای کوانتتش آنان راه برای بررسی دستگاههای مکانیکی که متشکل از درجات آزادی فرمیونی و بوزونی بود هموارتر شد. نتیجه تحقیقات در این زمینه حاکی از آن بود که اغلب مفاهیم مربوط به مکانیک کلاسیک را

به ویژه \mathbb{R}_a^N و \mathbb{R}_c^N را تعریف کرد. این فضاها برای تعریف ابرخیمینه‌ها که ساختار موضعی آنها به شکل $\mathbb{R}_c^m \oplus \mathbb{R}_a^n$ داده می‌شود به کار می‌روند. به طور کلی ابرخیمینه‌ها با ساختارهای هندسی و جبری روی آنها به عنوان فضای آرایش و یا فضای فاز ابردستگاههای مکانیکی به کار می‌روند و از این نظر در نظریه‌های فیزیکی مانند ابرگرانش حائز اهمیت فراوان هستند. نکته قابل توجه در مورد ابردستگاههای مکانیکی تفاوت مفهوم ابردستگاه با ابر دستگاههای ابرتقارنی است. ابردستگاههای ابرتقارنی بخشی از ابردستگاههای مکانیکی را تشکیل می‌دهند که دینامیک آنها بر اثر دسته‌ای از تغییر مختصات که درجات آزادی فرمیونی و بوزونی را با هم مخلوط می‌کند، ناوردا باقی می‌ماند.

دینامیک یک ابردستگاه مکانیکی با یک لاگرانژی و یا هامیلتونی داده می‌شود. در فرمولبندی لاگرانژی ابرمکانیک کلاسیک (غیرنسبیتی) لاگرانژی به صورت تابع:

$$L = L(\Phi^i, \dot{\Phi}^i, t) \in \mathbb{R}_c \quad (12-3)$$

داده می‌شود که در آن Φ^i مختصات مختلف سیستم، اعم از بوزونی و فرمیونی، را نمایش می‌دهد و از ابراعداد انتخاب می‌شود، $t = \frac{d}{dt} \Phi^i$ به ترتیب زمان و مشتق Φ^i نسبت به زمان هستند. معادلات دینامیکی ابردستگاه با تعریف تابعی کنش:

$$S[\Phi] := \int_{\Phi} L dt \quad (13-3)$$

و به دست آوردن اکستریم آن حاصل می‌شود. در رابطه (13-3)، Φ مسیری در ابرخیمینه آرایش ابردستگاه است [۵]. معادلات دینامیکی به صورت:

$$\delta S[\Phi] := \delta \Phi^i \left(\frac{\vec{\delta}}{\delta \Phi^i} S[\Phi] \right) = 0 \quad (14-3)$$

داده می‌شوند که در آن $\frac{\vec{\delta}}{\delta \Phi^i}$ به معنی مشتق تابعی نسبت به Φ^i از سمت چپ است.

مثال ۱. لاگرانژی:

$$L_1 = \frac{i}{\hbar} \delta_{ij} \psi^i \dot{\psi}^j \quad (\psi^i \in \mathbb{R}_a, i = 1, \dots, N) \quad (15-3)$$

یک سیستم آزاد فرمیونی N بعدی را تعریف می‌کند. در اینجا δ_{ij} مولفه‌های تابع دلتای کرونکر است.

$$\Lambda_a^\infty := \left\{ z \in \Lambda^\infty : z = \sum_{k=1}^{\infty} C_{a_1, \dots, a_{2k-1}} \xi^{a_1} \dots \xi^{a_{2k-1}} \right\} \quad (5-3)$$

تشکیل می‌شود. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که Λ_c^∞ یک زیرجبر جابه‌جایی Λ^∞ را تشکیل می‌دهد. اعضای $\Lambda_a^\infty, \Lambda_c^\infty, \Lambda^\infty$ را به ترتیب ابرعدد، ابرعدد جابه‌جایی (بوزونی - زوج) و ابرعدد پادجابه‌جایی (فرمیونی - فرد) می‌نامند. روابط

$$\Lambda_c^\infty * \Lambda_c^\infty = \Lambda_c^\infty \quad (6-3)$$

$$\Lambda_c^\infty * \Lambda_a^\infty = \Lambda_a^\infty \quad (7-3)$$

$$\Lambda_a^\infty * \Lambda_a^\infty = \Lambda_c^\infty \quad (8-3)$$

این نامگذاری را به سادگی توجیه می‌کند. از طرف دیگر می‌توان عملگری تعریف کرد که در آن $\Lambda_c^\infty, \Lambda_a^\infty$ را به صورت ویژه فضاها خود به دست دهد. این عملگر با $(-1)^*$ نشان داده می‌شود و با عبارات:

$$\#(z) := \begin{cases} 0 & \text{اگر } z \in \Lambda_c^\infty \\ 1 & \text{اگر } z \in \Lambda_a^\infty \end{cases} \quad (9-3)$$

و شرط خطی بودن روی Λ^∞ تعریف می‌شود. برای تعریف ابراعداد حقیقی (و موهومی) عملگر مزدوج مختلط روی \mathcal{C} را برای اعضای Λ^∞ تعمیم می‌دهند. به این ترتیب که

$$(C \xi^a)^* := C^* \xi^{a^*} := C^* \xi^a \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

$$(z_1 z_2)^* := z_2^* z_1^* \quad \forall z_1, z_2 \in \Lambda^\infty \quad (10-3)$$

$$(z_1 + z_2)^* := z_1^* + z_2^*$$

مجموعه ابراعداد حقیقی فرمیونی و بوزونی با علائم \mathbb{R}_a و \mathbb{R}_c نشان داده شده و به صورت:

$$\mathbb{R}_a := \{ z \in \Lambda_a^\infty : z^* = z \} \quad (11-3)$$

$$\mathbb{R}_c := \{ z \in \Lambda_c^\infty : z^* = z \}$$

تعریف می‌شوند.

متغیرهای فرمیونی که در نظریه‌های فیزیکی در محاسبات به کار می‌روند و اغلب متغیر گراسمان نامیده می‌شوند، در حقیقت ابراعداد پادجابه‌جایی و با شرط حقیقی بودن، اعضای \mathbb{R}_a هستند. برای حفظ تناظر کامل بین درجات آزادی فرمیونی و بوزونی استفاده از همه ابراعداد ضروری است. به این ترتیب مختصات جابه‌جا شونده یک دستگاه مکانیکی را باید از اعضای Λ_c^∞ و در صورت حقیقی بودن از اعضای \mathbb{R}_c انتخاب کرد که ساختار بسیار غنیتری از اعداد مختلط \mathcal{C} و حقیقی \mathbb{R} دارند. با استفاده از ابراعداد می‌توان مفهوم ابرفضای برداری

مثال ۲. لاگرانژی:

معادلات

$$\int_0^T dt' \left[\frac{\vec{\delta}}{\delta \Phi^i(t)} S[\Phi] \frac{\vec{\delta}}{\delta \Phi^j(t')} \right] G^{\pm jk}(t', t'') = -\delta_i^k \delta(t-t'') \quad (21-3)$$

که به اختصار به صورت [۵]:

$$i, S, j, G^{\pm j'k''} = -i\delta^{k''} \quad (22-3)$$

نوشته می شوند، به طور یگانه تعیین می شوند. با در دست داشتن $G^{\pm jk''}$ گروه پیرلز طبق روابط:

$$[f(\Phi), g(\Phi)]_p := f_{,i} \tilde{G}^{ij'} j', g \quad (23-3)$$

$$\tilde{G}^{ij'} := G^{+ij'} - G^{-ij'} \quad (24-3)$$

$$G^{\pm ij'} := G^{\pm ij}(t, t') \quad (25-3)$$

تعریف می شود. در تعریف (۳۳-۳)، gf تابعهای اختیاری از درجات آزادی Φ^i است و در سمت راست این معادله مشتقات تابعی f از راست و g از چپ به کار رفته است. رابطه (۲۳-۳) برای حالت خاص $f(\Phi) = g(\Phi) = \Phi^i$ به تساوی:

$$(\Phi^i(t), \Phi^j(t'))_p = \tilde{G}^{ij'} \quad (26-3)$$

می انجامد.

برای کوانتس دستگاه کلاسیکی، Φ^i و توابع آنها به عملگرهای خطی تبدیل می شوند. جبر این عملگرها با رابطه کوانتس پیرلز به صورت:

$$[\hat{\Phi}^i(t), \hat{\Phi}^j(t')] = i\hbar \hat{G}^{ij'} \quad (27-3)$$

داده می شود. لازم به یادآوری است که رابطه (۲۷-۳) برای $t \neq t'$ نیز صادق است و از این رو می توان از آن برای محاسبه روابط جابه جایی بین $\hat{\Phi}^i$ و $\hat{\Phi}^j$ استفاده کرد. مثلاً داریم:

$$[\hat{\Phi}^i(t), \hat{\Phi}^j(t')] = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t'} \hat{G}^{ij'} \right] \quad (28-3)$$

$$[\hat{\Phi}^i(t), \hat{\Phi}^j(t')] = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \hat{G}^{ij'} \right] \quad (29-3)$$

این روش برخلاف پیچیدگی ظاهری آن، امتیازات کاربردی بسیاری بر کوانتس کانونیک دارد و نتایج کوانتس کانونیک را نیز برای همه مثالهای شناخته شده به دست می دهد. مرجع [۹] امتیازات این روش را برای کوانتس دستگاه ابرتقارنی پیچیده ای نشان داده است.

$$L_{\Psi} = \frac{i}{\Psi} [\delta_{ij} \psi^i \dot{\psi}^j + \omega \varepsilon_{ij} \psi^i \dot{\psi}^j]$$

$$\psi^i \in \mathbb{R}^a, i = 1, 2, \omega \in \mathbb{R}^+$$

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i=j \\ 1 & \text{اگر } i < j \end{cases} \quad (16-3)$$

یک سیستم نوسانگر فرمیونی را توصیف می کند [۵].

مثال ۳. لاگرانژی:

$$L_{\Psi} = \frac{1}{\Psi} (x^2 - \omega^2 x^2), \quad x \in \mathbb{R}_c, \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (17-3)$$

یک سیستم نوسانگر بوزونی را توصیف می کند.

مثال ۴. لاگرانژی زیر:

$$L_{\Psi} = L_{\Psi} + L_{\Psi} \quad (18-3)$$

که در آن L_{Ψ} و L_{Ψ} با معادلات (۱۶-۳)، (۱۷-۳) داده شده اند، یک نوسانگر با مختصات فرمیونی و بوزونی را توصیف می کند. این ابردستگاه دارای ابرتقارن:

$$\delta x = i\psi^i \delta \xi_i$$

$$\delta \psi^i = (\delta^{ij} x^j - \omega \varepsilon^{ij} x^j) \delta \xi_j \quad (19-3)$$

است که در آن $\delta \xi_i$ متغیر فرمیونی بسیار کوچکی است [۵]. استفاده از فرمولبندی هامیلتونی ابرمکانیک کلاسیک به دلیل شکل لاگرانژی برای دستگاه فرمیونی آزاد (۱۵-۳) احتیاج به تعمق بیشتری دارد، زیرا تکانه مزدوج ψ^i یعنی $\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}^i} L$ با ψ^i متناسب است و در واقع نوعی دستگاه مقید به دست می آید. اهمیت فرمولبندی هامیلتونی در کوانتس کانونیک ابردستگاههای کلاسیک است، اما استفاده از روش هامیلتونی حتی در مقوله کوانتس نیز قابل اجتناب است. این مهم با استفاده از کوانتس گروه پیرلز میسر می شود [۱۳]. روش کوانتس پیرلز به این صورت است که ابتدا عملگر ژاکوبی، یعنی:

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta \Phi^i(t)} S[\Phi] \frac{\vec{\delta}}{\delta \Phi^j(t')} =: i, S, j' \quad (20-3)$$

و سپس توابع گرین پیش افتاده $G^{+ij}(t, t')$ و پس افتاده $G^{-ij}(t, t')$ آن را به دست می آورند. این توابع با شرایط مرزی مذکور و

$$a_i^\mu =: \xi_i^{\circ\mu} + \xi_i^\mu \quad (7-4)$$

$$[\xi_i^{\alpha\mu}, \xi_j^{\beta\mu+}]_{-(-1)^\mu} = \delta_{ij} \quad (8-4)$$

$$[\xi_i^{\alpha\mu}, \xi_j^{\alpha\mu}]_{-(-1)^\mu} = 0 \quad (9-4)$$

$$[\xi_i^{\alpha\mu}, \xi_i^{\beta\mu+}]_{(-1)^\mu} = [\xi_i^{\alpha\mu}, \xi_i^{\beta\mu}]_{(-1)^\mu} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (10-4)$$

برای سهولت محاسبات می توان عملگرهای خود الحاقی:

$$\theta_{i1}^{\alpha\mu} := \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma}} (\xi_i^{\alpha\mu} + \xi_i^{\alpha\mu+}) \quad (11-4)$$

$$\theta_{i2}^{\alpha\mu} := -i \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma}} (\xi_i^{\alpha\mu} - \xi_i^{\alpha\mu+}) \quad (12-4)$$

را برای توصیف جبر (۸-۴) و (۱۰-۴) و در نتیجه (۴-۴) و (۶-۴) به کار برد. برای عملگرهای فرافرمیونی (۱ = μ) ابتدا فراکروشه‌ای تعریف می‌کنیم:

$$\|\theta_{im}^{\alpha 1}, \theta_{jn}^{\beta 1}\| := \theta_{im}^{\alpha 1} \theta_{jn}^{\beta 1} + (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{jm}^{\beta 1} \theta_{in}^{\alpha 1} \quad (13-4)$$

با استفاده از این فراکروشه جبر (۸-۴) و (۱۵-۴) برای (μ = ۰) به صورت:

$$\|\theta_{im}^{\alpha 1}, \theta_{jn}^{\beta 1}\| = \hbar \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (14-4)$$

در می‌آید. در حقیقت تعریف فراکروشه و || را می‌توان به همه اعضای جبر (حلقه) چندجمله‌ایها در $\theta_{im}^{\alpha 1}$ یعنی:

$$\tilde{B}^1 := \left\{ P = C_0 + \sum_{k=1}^d C_{i_1, \dots, i_k m_1, \dots, m_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \theta_{i_1 m_1}^{\alpha_1} \dots \theta_{i_k m_k}^{\alpha_k} : C_0, C_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{C}, d \in \mathbb{N} \right\} \quad (15-4)$$

تعمیم داد. این مهم با فرض خطی بودن || و در هر دو ورودی و تعریف آن برای تک جمله‌ایهای پایه میسر است. اگر

$$M_i^1 := \theta_{i_1 m_1}^{\alpha_1} \dots \theta_{i_d m_d}^{\alpha_d} \quad (16-4)$$

با ۱، ۲، دو تک جمله‌ای پایه باشند داریم:

۴- مکانیک کلاسیک با درجات آزادی فرافرمیونی،

فراپوزونی مرتبه ۲ و کوانتس آن به روش پائزلز

در این بخش به بررسی فرآمار مرتبه ۲ می‌پردازیم. روابط اساسی معرف فرافرمیونها و فراپوزونهای مرتبه ۲ را می‌توان با استفاده از روابط کلی (۲-۱۳)، (۲-۱۵)، (۲-۹) و (۲-۷) به صورت زیر نوشت [۱۲]

$$a_k a_l^+ a_m \pm a_m a_l^+ a_k = 2 \delta_{kl} a_m \pm 2 \delta_{lm} a_k \quad (1-4)$$

$$a_k a_l a_m^+ \pm a_m^+ a_l a_k = 2 \delta_{lm} a_k \quad (2-4)$$

$$a_k a_l a_m \pm a_m a_l a_k = 0 \quad (3-4)$$

که در آن علائم + و - به ترتیب مربوط به فرافرمیونها و فراپوزونها می‌شود. درستی این تساویها را می‌توان با به کارگیری نمایش گرین (۲-۲۱) به طور مستقیم به اثبات رساند. برای سهولت محاسبات می‌توان اندیس دیگری را به عملگرهای آفرینش و نابودگر نسبت داد که فرافرمیونی و فراپوزونی بودن آنها را مشخص کند. در نتیجه روابط (۴-۱) و (۴-۳) به صورت:

$$a_k^\mu a_l^{\mu+} a_m^\mu - (-1)^\mu a_m^\mu a_l^{\mu+} a_k^\mu = 2 \delta_{kl} a_m^\mu - (-1)^\mu 2 \delta_{lm} a_k^\mu \quad (4-4)$$

$$a_k^\mu a_l^\mu a_m^{\mu+} - (-1)^\mu a_m^{\mu+} a_l^\mu a_k^\mu = 2 \delta_{lm} a_k^\mu \quad (5-4)$$

$$a_k^\mu a_l^\mu a_m^\mu - (-1)^\mu a_m^\mu a_l^\mu a_k^\mu = 0 \quad (6-4)$$

نوشته می‌شوند، که در آنها μ = ۰ روابط فراپوزونی و μ = ۱ روابط فرافرمیونی را به دست می‌دهد. به همین ترتیب برای مختصات گرین داریم:

$$\|M_1^1, M_2^1\| := M_1^1 M_2^1 - (-1)^{\eta_1(M_1^1, M_2^1)} M_2^1 M_1^1 \quad (17-4)$$

$$\eta_1(M_1^1, M_2^1) := d(M_1^1) d(M_2^1) + d(M_1^1) O(M_2^1) + d(M_2^1) O(M_1^1) \quad (18-4)$$

$$d(M_I^1) := d_I = M_I^1 \quad \text{درجه} \quad (19-4)$$

$$O(M_I^1) := \sum_{k=1}^{d_I} \alpha_k = M_I^1 \quad \text{مجموع اندیسهای گرین} \quad (20-4)$$

$$\eta_0(M_1^0, M_2^0) := d(M_1^0) O(M_2^0) + d(M_2^0) O(M_1^0) \quad (25-4)$$

داده می شود. حد کلاسیک جبر مختصات گرین و در نتیجه عملگرهای آفرینش و نابودگر فرابوزونی با رابطه (۴-۲۳) و حد $h = 0$ به دست می آید. بار دیگر حد کلاسیک برای تک جمله ایها به صورت:

$$\|M_1^0, M_2^0\| = 0 \quad (26-4)$$

در می آید. باید یادآور شد که روابط (۴-۲۱) و (۴-۲۶) برای حد کلاسیک جبرهای \tilde{B}^1 و \tilde{B}^0 برای همه اعضای این جبرها یعنی چندجمله ایها صادق است.

یکی از نتایج مستقیم استفاده از فراکروشه (۴-۲۴) این است که زیرمجموعه چندجمله ایها با درجه زوج \tilde{B}_e^0 یک زیرجبر جابه جایی را تشکیل می دهد ولی اعضای این زیرجبر با دیگر اعضای \tilde{B}^0 جابه جا نمی شوند.

اگر بخواهیم جبر مختصات گرین فرافرمیونی و فرابوزونی را با هم درآمیزیم و آنها را به عنوان زیرجبرهای یک جبر بزرگتر تلقی کنیم به روابط فرآمار نسبی طبیعی که در بخش ۳ معرفی شد نیازمند خواهیم بود. با شرط پیروی از این قرارداد، جبر مورد نظر با تعمیم تعریف فراکروشه به صورت:

$$\|\theta_{im}^{\alpha\mu}, \theta_{jn}^{\beta\nu}\| := \theta_{im}^{\alpha\mu} \theta_{jn}^{\beta\nu} - (-1)^{\mu\nu + \alpha + \beta} \theta_{im}^{\beta\nu} \theta_{jn}^{\alpha\mu} \quad (27-4)$$

و رابطه:

$$\|\theta_{im}^{\alpha\mu}, \theta_{jn}^{\beta\nu}\| = \hbar \delta_{ij} \delta^{\alpha\beta} [i(1-\mu)(1-\nu) \varepsilon_{mn} + \mu\nu \delta_{mn}] \quad (28-4)$$

حد کلاسیک جبر عملگرها با تبدیل آنها به اعضای یک جبر تعریف شده با رابطه (۴-۱۴) در حد $h = 0$ به دست می آید. در این حد برای تک جمله ایهای M_1 و M_2 نیز خواهیم داشت:

$$\|M_1^1, M_2^1\| = 0 \quad (21-4)$$

تعریف فراکروشه به شکل (۴-۱۷) کاربرد فراوانی در محاسبات دارد. مثلاً به راحتی می توان نشان داد که زیرمجموعه \tilde{B}^1 متشکل از چندجمله ایهای با درجه زوج یک زیرجبر جابه جایی است. این زیرجبر که آن را با \tilde{B}_e^1 نشان می دهیم، با زیرجبر Λ_e^∞ جبر گراسمان متناظر است، اما اعضای \tilde{B}_e^1 فقط بین خود جابه جا می شوند و با دیگر اعضای \tilde{B}^1 جابه جا نمی شوند.

ساختارهای فوق را می توان برای فرابوزونهای مرتبه ۲ نیز تکرار کرد. در این صورت تعریف فراکروشه به شکل:

$$\|\theta_{im}^{\alpha_0}, \theta_{jn}^{\beta_0}\| := \theta_{im}^{\alpha_0} \theta_{jn}^{\beta_0} - (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{jn}^{\beta_0} \theta_{im}^{\alpha_0} \quad (22-4)$$

در می آید و روابط عملگرهای آفرینش و نابودگر (۴-۸) و (۴-۱۰) به ازای $\mu = 0$ به صورت:

$$\|\theta_{im}^{\alpha_0}, \theta_{jn}^{\beta_0}\| = i\hbar \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij} \varepsilon_{mn} \quad (23-4)$$

نوشته می شود، که در آن ε_{mn} با رابطه (۳-۱۶) تعریف شده است. بار دیگر می توان تعریف (۴-۲۲) را به حلقه چندجمله ایها در $\theta_{im}^{\alpha_0}$ تعمیم داد. این فضا را با \tilde{B}^0 نشان می دهیم. $\|\|$ بر \tilde{B}^0 با فرض خطی بودن در هر دو ورودی کروسه و تعریف آن برای تک جمله ایها به صورت:

$$\|M_1^0, M_2^0\| := M_1^0 M_2^0 - (-1)^{\eta_0(M_1^0, M_2^0)} M_2^0 M_1^0 \quad (24-4)$$

آوردن لاگرانژی چنین سیستمی، ابتدا کلیترین لاگرانژی برای یک سیستم فرافرمیونی یک بعدی را به دست می آوریم. برای تحقق این امر نیز شرط تطابق کوانتشن به روش پایرلز و کوانتشن کانونیک را مبنا قرار می دهیم.

لاگرانژی یک سیستم فرافرمیونی یک بعدی به عنوان یک کمیت جبری باید جابه جاگر باشد، از این رو داریم

$$L = L(\psi, \dot{\psi}, t) \in \tilde{B}_c^1 \quad (۳۳-۴)$$

که در آن ψ مختصات فرافرمیونی حقیقی، t زمان و \tilde{B}_c^1 زیرفضای زوج \tilde{B}^1 (۴-۱۵) است. اگر ψ را که متغیر فیزیکی است در نمایش گرین نمایش دهیم، داریم

$$\psi = \theta^0 + \theta^1, \dot{\psi} = \dot{\theta}^0 + \dot{\theta}^1$$

$$\theta^\alpha = \theta_{11}^{\alpha 1} \quad (۳۴-۴)$$

با توجه به جبر ساده θ^α (روابط ۴-۱۴)، با $\hbar = 0$ می توان نشان داد که:

$$\psi^2 = \dot{\psi}^2 = 0 \quad (۳۵-۴)$$

$$\psi \dot{\psi}^2 = -\dot{\psi}^2 \psi \quad (۳۶-۴)$$

$$\psi^2 \dot{\psi} = -\dot{\psi} \psi^2 \quad (۳۷-۴)$$

$$\psi^2 \dot{\psi}^2 = \dot{\psi}^2 \psi^2 \quad (۳۸-۴)$$

در اثبات این تساویها θ^α به عنوان مختصات گرین ψ که متغیر غیروابسته به ψ است، مطرح می شود. با توجه به رابطه (۴-۳۰)، L باید به صورت چندجمله ایی زوج در متغیرهای ψ و $\dot{\psi}$ که فراگراسمان مرتبه ۲ نیز نامیده می شوند [۱۲]، انتخاب شود. جملات درجه دو در ψ و $\dot{\psi}$ عبارت اند از: ψ^2 و $\dot{\psi}^2$ و $\psi \dot{\psi}$ با استفاده از این جملات و روابط جبری (۴-۳۵) - (۴-۳۸) جملات واجد شرایط که مخالف صفرند عبارت اند از

$$\psi^2, \dot{\psi}^2, \psi^2 \dot{\psi}^2, (\psi \dot{\psi})^r, (\dot{\psi} \psi)^s$$

$$r, s \in \mathbb{N}$$

از طرفی نیز شرط حقیقی بودن L ایجاب می کند که:

$$L = \frac{A}{\psi} \psi^2 + \frac{B}{\dot{\psi}} \dot{\psi}^2 + \frac{C}{\psi^2} \psi^2 \dot{\psi}^2 + \sum_{r=1}^N \{ J_r [(\psi \dot{\psi})^r + (\dot{\psi} \psi)^r] + i K_r [(\psi \dot{\psi})^r - (\dot{\psi} \psi)^r] \} \quad (۳۹-۴)$$

برای مولدهای جبر، θ_{im}^{am} ، داده می شود. تعریف فراکروشه ها برای تک جمله ایهای:

$$M_1 := \theta_{i_1 m_1}^{\alpha_1 \mu_1} \dots \theta_{i_{d_1} m_{d_1}}^{\alpha_{d_1} \mu_{d_1}}, \quad M_2 := \theta_{j_1 n_1}^{\beta_1 \nu_1} \dots \theta_{j_{d_2} n_{d_2}}^{\beta_{d_2} \nu_{d_2}} \quad (۲۹-۴)$$

با رابطه:

$$\|M_1, M_2\| := M_1 M_2 - (-1)^{\eta(M_1, M_2)} M_2 M_1 \quad (۳۰-۴)$$

$$\eta(M_1, M_2) := \left[\sum_{k=1}^{d_1} \mu_k \right] \left[\sum_{l=1}^{d_2} \nu_l \right] + d_1 \sum_{l=1}^{d_2} \beta_l + d_2 \sum_{k=1}^{d_1} \alpha_k \quad (۳۱-۴)$$

داده می شود. این تعاریف برای همه اعضای جبر چندجمله ایها در θ_{im}^{am} که با \tilde{B} نشان می دهیم با شرط خطی بودن کروش در هر دو ورودی آن تعمیم می یابد و حد کلاسیک به صورت

$$\|f, g\| = 0 \quad f, g \in \tilde{B} \quad (۳۲-۴)$$

نشان داده می شود.

با توجه به اینکه θ_{im}^{am} مختصات گرین متغیرهای فیزیکی هستند تنها زیرفضایی از \tilde{B} به عنوان فضای فیزیکی مطرح است. در اینجا باید این مورد را نیز متذکر شد که گرچه تناظر نسبی بین جبر گراسمان در مورد $p = 1$ و جبر \tilde{B} برای $p = 2$ وجود دارد، اما این دو ساختار تفاوت بسیار عمده ای نیز دارند. به این ترتیب که جبر گراسمان Λ^∞ هر دو نوع متغیر مورد نیاز برای پدیده ابر تقارن را به صورت مشخصی به دست می داد. در واقع بین مولدهای Λ^∞ و ابر اعداد فرمیونی تفاوت بسیاری وجود داشت ولی در مورد \tilde{B} مولدهای آن همان "فرااعدادی" هستند که برای توصیف درجات آزادی فرافرمیونی و فراپوزونی مورد استفاده قرار می گیرند.

در ادامه این بخش به مبحث دستگاههای فرافرمیونی و کوانتشن به روش پایرلز برای آنها می پردازیم. برای به دست

$$\frac{d}{dt}(\psi^2) = \dot{\psi}\psi + \psi\dot{\psi} \quad (41-4)$$

در این رابطه، $N \in \mathbb{N}$ و $A, B, C, J, K, \in \mathbb{R}$. حال با استفاده

از نمایش گرین (۴-۳۴) و روابط جبری (۴-۱۴) در حد کلاسیک ($\hbar = 0$) می توان نشان داد که:

$$(\psi\psi)^2 = (\psi\psi)^2 = 0 \quad (40-4)$$

از طرف دیگر داریم:

$$L = \frac{A}{\gamma}\psi^2 + \frac{B}{\gamma}\dot{\psi}^2 + \frac{C}{\gamma}\psi^2\dot{\psi}^2 + i\frac{D}{\gamma}(\psi\dot{\psi} - \dot{\psi}\psi) \quad (42-4)$$

که در آن $\gamma K_1 = D$. رابطه (۴-۴۲) بر حسب مختصات گرین به صورت:

$$\begin{aligned} L &= A\theta^0\theta^1 + B\dot{\theta}^0\dot{\theta}^1 + C\theta^0\theta^1\dot{\theta}^0\dot{\theta}^1 + i\frac{D}{\gamma}(\theta^0\dot{\theta}^0 + \theta^1\dot{\theta}^1) \\ &= \frac{A}{\gamma}\sigma_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta + \frac{B}{\gamma}\sigma_{\alpha\beta}\dot{\theta}^\alpha\dot{\theta}^\beta + \frac{C}{\gamma}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}\theta^\alpha\theta^\beta\dot{\theta}^\gamma\dot{\theta}^\delta + i\frac{D}{\gamma}\delta_{\alpha\beta}\theta^\alpha\dot{\theta}^\beta \end{aligned} \quad (43-4)$$

نوشته می شود، که در آن

$$\sigma_{\alpha\beta} := \begin{cases} 0 & \text{اگر } \alpha = \beta \\ 1 & \text{اگر } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (44-4)$$

تعریف می کنیم. سپس می توان روابط حساب دیفرانسیل را به صورت:

$$\left\| \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_{im}^{\alpha\mu}}, \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_{jn}^{\beta\nu}} \right\| = \left\| \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_{im}^{\alpha\mu}}, \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_{jn}^{\beta\nu}} \right\| = 0 \quad (46-4)$$

$$\left\| \theta_{im}^{\alpha\mu}, \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_{jn}^{\beta\nu}} \right\| = \left\| \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_{im}^{\alpha\mu}}, \theta_{jn}^{\beta\nu} \right\| = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{mn}$$

$$(47-4)$$

خلاصه کرد. معادلات دینامیک برای لاگرانژی (۴-۴۳) به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned} 0 &= S[\theta] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} =: S_\alpha = L \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(L \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\dot{\theta}^\alpha} \right) \\ &= A\sigma_{\alpha\beta}\theta^\beta - B\sigma_{\alpha\beta}\dot{\theta}^\beta - \frac{C}{\gamma}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}(\dot{\theta}^\gamma\theta^\delta\dot{\theta}^\beta + \dot{\theta}^\gamma\dot{\theta}^\delta\theta^\beta + \dot{\theta}^\gamma\theta^\delta\dot{\theta}^\beta - \dot{\theta}^\gamma\dot{\theta}^\delta\theta^\beta) - iD\delta_{\alpha\beta}\dot{\theta}^\beta \end{aligned} \quad (48-4)$$

این معادلات با قراردادن $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ شکل ساده تری به خود می گیرند. در این صورت داریم

$$A\theta^1 - B\dot{\theta}^1 - C(\gamma\theta^1\dot{\theta}^0\dot{\theta}^1 + \theta^0\theta^1\dot{\theta}^1) - iD\dot{\theta}^0 = 0 \quad (49-4)$$

$$A\theta^0 - B\dot{\theta}^0 - C(\gamma\theta^0\dot{\theta}^0\dot{\theta}^1 + \theta^0\theta^1\dot{\theta}^0) - iD\dot{\theta}^1 = 0 \quad (50-4)$$

در حقیقت همان گونه که از شکل معادلات (۴-۴۹) و (۴-۵۰) برمی آید، مختصات گرین با اندیسه های مختلف به هم ربط داده شده اند و این با ساختار جبری مربوط در تناقض است. اما باید به یاد آورد که مختصات گرین درجات آزادی فیزیکی نیستند. معادله دینامیکی با مفهوم فیزیکی باید بر حسب ψ نوشته شود.

چنین معادله‌ای با جمع طرفین (۴-۴۹)، (۴-۵۰) به دست می‌آید: به دست می‌آیند که با استفاده از رابطه (۴-۳۵) ساده می‌شوند:

$$A\psi - B\ddot{\psi} - C \left(\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{\psi}\dot{\psi}^2\ddot{\psi} \right) - iD\dot{\psi} = 0 \quad (۵۱-۴)$$

این معادله را می‌توان به اجزای حقیقی و موهومی آن جدا کرد. در این صورت معادلات:

$$B\ddot{\psi} - A\psi = 0, \quad D\dot{\psi} - iC \left(\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{\psi}\dot{\psi}^2\ddot{\psi} \right) = 0 \quad (۵۲-۴)$$

برای تعیین ضرایب A, B, C, D می‌توان نتایج کوانتس دستگاه (۴-۴۲) را که به روش پایریلز انجام می‌شود با نتایج کوانتس کانونیک، یعنی رابطه (۴-۲۸) مقایسه کرد. برای انجام کوانتس به روش پایریلز ابتدا عملگر ژاکوبی سیستم را به دست می‌آوریم. پس از انجام محاسبات لازم، داریم:

$$\beta, S, \alpha = \left\{ \left[\sigma_{\alpha\beta} (-B + \frac{C}{\psi} \sigma_{\gamma\delta} \theta^\gamma \theta^\delta) \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left[-iD \delta_{\alpha\beta} - C \left((-1)^{\alpha+\beta} + 1 \right) \sigma_{\alpha\gamma} \sigma_{\delta\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} \right] \theta^\gamma \dot{\theta}^\delta \right\} \frac{\partial}{\partial t} + \left[A \sigma_{\alpha\beta} - C \left(\left[\sigma_{\alpha\delta} \sigma_{\gamma\beta} - \frac{1}{\psi} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} \right] \dot{\theta}^\gamma \dot{\theta}^\delta + \sigma_{\alpha\delta} \sigma_{\beta\gamma} \theta^\gamma \ddot{\theta}^\delta \right) \right] \delta(t-t') \quad (۵۴-۴)$$

سپس توابع گرین پیش‌افتاده و پس‌افتاده را که با روابط (۳-۲۲) تعریف می‌شوند، محاسبه می‌کنیم. به این منظور این توابع گرین را به صورت

$$G^{\pm\alpha\gamma'} = \left[G_0^{\pm\alpha\gamma'} + G_1^{\pm\alpha\gamma'} (t-t') + \frac{1}{\psi} G_2^{\pm\alpha\gamma'} (t-t')^2 + \dots \right] \theta(\pm t' \mp t) \quad (۵۵-۴)$$

بسط می‌دهیم، که در آن $G_i^{\pm\alpha\gamma'}$ توابعی از t' هستند. با قراردادن (۵۴-۴) و (۵۵-۴) در معادله (۴-۲۲) می‌توان $G_i^{\pm\alpha\gamma'}$ را به دست آورد. نتایج محاسبات به قرار زیر است اگر $B \neq 0$ یا $C \neq 0$ باشد، داریم $G_0^{\pm\alpha\gamma'} = 0$ در این صورت با توجه به رابطه (۳-۲۴):

$$\tilde{G}^{\alpha\gamma'} = O(t-t') \quad (۵۶-۴)$$

رابطه (۴-۵۶) نشان می‌دهد که فراکروشه پایریلز

$$\| \theta^\alpha(t), \theta^\beta(t') \|_p := \tilde{G}^{\alpha\beta'} \quad (۵۷-۴)$$

برای $t' = t$ مقدار صفر را اختیار می‌کند:

$$\| \theta^\alpha(t), \theta^\beta(t) \|_p = 0 \quad (۵۸-۴)$$

که بعد از کوانتس با نتایج کوانتس کانونیک یعنی

$$\| \tilde{\theta}^\alpha(t), \tilde{\theta}^\beta(t) \| = \hbar \delta^{\alpha\beta} \quad (۵۹-۴)$$

تناقص دارد. از این رو شرط تطابق نتایج این دو روش به شرط $B = C = 0$ می‌انجامد. در این صورت عملگر ژاکوبی به شکل ساده:

$$\beta, S, \alpha = \left\{ -iD \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} + A \sigma_{\alpha\beta} \right\} \delta(t-t') \quad (۶۰-۴)$$

در می‌آید و توابع گرین با توجه به بسط (۴-۵۵) به صورت:

$$G^{\pm\alpha\gamma'} = \left[\mp \frac{i}{D} \delta^{\alpha\gamma'} + O(t-t') \right] \theta(\pm t' \mp t)$$

داده می‌شوند. در این صورت داریم

$$\| \theta^\alpha(t), \theta^\beta(t') \|_p = -\frac{i}{D} \delta^{\alpha\beta} + O(t-t') \quad (۶۱-۴)$$

از طرف دیگر می‌توان با دوباره تعریف کردن مختصات ψ لاگرائژی (۴-۴۲)، مقدار D را ۱ فرض کرد. در این صورت، فراکروشه پایریلز به صورت:

$$\| \theta^\alpha(t), \theta^\beta(t') \|_p = -i \delta^{\alpha\beta} + O(t-t')$$

در می‌آید و بعد از کوانتس به ازای $t' = t$ رابطه

$$\| \tilde{\theta}^\alpha(t), \tilde{\theta}^\beta(t) \| := i \hbar \| \theta^\alpha(t), \theta^\beta(t) \|_p = \hbar \delta^{\alpha\beta} \quad (۶۲-۴)$$

است که شکل لاگرانژی آزاد و یا به عبارت دیگر شکل جمله (انرژی) جنبشی برای چنین دستگاههایی متناظر با دستگاههای بوزونی است.

۵- نتیجه گیری

همانگونه که نشان داده شد روش کوانتش پایریلز را که در چارچوب مکانیک لاگرانژی عمل می کند، می توان به دستگاههای فرامیونی و فرابوزونی مرتبه ۲ نیز تعمیم داد. علاوه بر این، لاگرانژی آزاد برای چنین دستگاههایی در تناظر کامل با دستگاههای فرمیونی و بوزونی است. در نتیجه، برای مطالعه چنین دستگاههایی فقط باید جملات پتانسیل گوناگونی را که البته الزاماً توابع زوجی از درجات آزادی هستند، به کار برد. با استفاده از نتایج مذکور می توان لاگرانژیهای مربوط به دستگاههای کلاسیک فرااثر تقارنی را با توجه به شکل لاگرانژیهای ابرتقارنی، به دست آورد و به بررسی ساختار گروهی فرااثر تقارن و فرمولبندی انتگرال مسیر برای کوانتش این دستگاهها پرداخت.

را نتیجه می دهد که با رابطه (۴-۵۹) کاملاً سازگار است. با این وصف، کلیترین لاگرانژی برای یک سیستم فرامیونی درجه ۲ با رابطه

$$L = \frac{i}{4}(\psi\dot{\psi} - \dot{\psi}\psi) + \frac{A}{4}\psi^2 \quad (۴-۶۳)$$

داده می شود. با در نظر گرفتن تساوی (۴-۴۱) لاگرانژی (۴-۶۳) را به صورت معادل:

$$L = \frac{i}{4}\psi\dot{\psi} + \frac{A}{4}\psi^2 \quad (۴-۶۴)$$

نیز می توان نوشت. در مقایسه با رابطه (۳-۱۵)، جمله اول لاگرانژی (۴-۶۴) را می توان جمله آزاد و یا جنبشی نامید. جمله دوم نیز مانند یک پتانسیل نوسانگر (۳-۱۷) عمل می کند که مشابه فرمیونی ندارد.

با تعمیم رابطه (۴-۶۴) به دستگاههای چندبعدی، لاگرانژی آزاد برای دستگاههای فرامیونی مرتبه ۲ نیز با رابطه (۳-۱۵) داده می شود.

برای دستگاههای فرابوزونی مرتبه ۲ نیز می توان به همین ترتیب به بررسی لاگرانژی آزاد پرداخت. نتیجه قابل ذکر آن

مرجعها

1. L. Alvarez-Gaume, *Commun. Math. Phys.* **90** (1983) 161.
2. F. Ardalan and F. Mansouri, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3341.
3. M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963)422; *Ann. Math* **87** (1968)546.
4. F. A. Berezin, *The Method of Second Quzntization* Academic Press, NewYork (1966).
5. B. S. Dewitt, *Supermanifolds* Cambridge Univ Press, Cambridge (1992).
6. A. B. Govorkov, *Sov. J. Part. Nucl.* **14** (1983)520.
7. H. S. Green, *Phys. Rev* **90** (1957)270.
8. O. W. Greenberg and A.M.L. Messiah, *Phys. Rev* **138,B** (1965)1155.
9. A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys* **35** (1994)1095.
10. A. Mostafazadeh, "Spectrum Degeneracy of General (p=2)-Parasupersymmetric Quantum Mechanics and Parasupersymmetric topological Invariants," *Int. J. Mod. Phys. A.*, to appear (1995).
11. A. Mostafazadeh, "Topological Aspects of Parasuper-symmetry," Submitted to *Mod. Phys. Lett.* (1995).
12. Y. Ohnuki and S. Kamefuechi, *Quantum Field Theory and Parastatistics*, Springer-Verlag, Berlin (1982).
13. R.E. Peierls, *Proc. Roy. Soc.*, (London) **A 214**, (1952)143.
14. V. A. Rubakov and V. P. Spiridonov, *Mod. Phys. Lett* **A3**, (1988)1334.
15. E. Witten, *Nucl. Phys.* **B202** (1982)263.
16. P. Windey, *Acta Physica Polonica* **B15** (1984)453.