

## وزنه‌های پوچ توان در نظریه میدانهای همدیس

شاهین روحانی، مهدی سعادت و سامان مقیمی عراقی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

دریافت نسخه نهایی: ۸۰/۶/۲۸

دریافت مقاله: ۷۹/۱۲/۲۲

### چکیده

نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی را می‌توان با استفاده از تبدیلات مقیاس پوچ توان به دست آورد. با استفاده از این نوع تبدیل مقیاس خصوصیات مختلف نظریه‌های میدان همدیس لگاریتمی، از جمله توابع همبستگی دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای را صرفاً با استفاده از قیود تقارن محاسبه می‌کنیم. توابع همبستگی چهارنقطه‌ای نیز به محاسبه بردارهای تکین دارد که در این مقاله با استفاده از روش وزنه‌های پوچ توان، دترمینان کچ، بردارهای تکین و نهایتاً توابع چهارنقطه‌ای محاسبه می‌شوند. این نتیجه منجر به تعمیم معادله فوق هندسی به یک مجموعه معادلات ناهمگن می‌شود، که جوابهایی برای آنها ارائه می‌شود. در ادامه با استفاده از همین روش، نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی نزدیک مرز را تحلیل می‌کنیم. در پایان ابرمیدانهایی با وزن همدیس  $\Delta=0$  و  $\Delta=2$  معرفی می‌شوند که یکی در بردارنده جفت لگاریتمی عملگر واحد و دیگری شامل جفت لگاریتمی تانسور انرژی تکانه است. سرانجام مبادرت به استنتاج OPE اعضای هر یک از این ابرمیدانها می‌ورزیم.

واژه‌های کلیدی: نظریه میدان، همدیس، پوچ توان

### ۱. مقدمه

لگاریتمی، عملگرهای تبهگن (با وزن همدیس یکسان) وجود دارند که تحت تبدیلات همدیس یک سلول جوردن تشکیل می‌دهند. در ساده‌ترین حالت، دو میدان  $\phi$  و  $\psi$  با وزن همدیس  $\Delta$  تحت تبدیل مقیاس به شکل زیر رفتار می‌کنند:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda z) &= \lambda^{-\Delta} \phi(z), \\ \psi(\lambda z) &= \lambda^{-\Delta} [\psi(z) - \phi(z) \ln \lambda].\end{aligned}\quad (1)$$

توابع بستگی دونقطه‌ای شامل  $\phi$  و  $\psi$  با استفاده از خاصیت ناوردایی آنها تحت عمل مولدهای  $L_0$  و  $L_{\pm 1}$  قابل استنتاج است [۳]. محاسبه توابع بستگی سه نقطه‌ای شامل  $\phi$  و  $\psi$  و تعمیم به سلولهای جوردن بزرگتر در [۴ و ۵] انجام گرفته است.

نظریه میدانهای همدیس در دو بعد با کار بلاوین، پولیاکوف و زامولودچیکوف [۱] مورد توجه قرار گرفت و از آن پس به طور وسیعی در شاخه‌های مختلف فیزیک مانند نظریه ریسمان، پدیده‌های بحرانی و ماده چگال مورد استفاده واقع شد. همچنین نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی (LCFTs) در ابتدا به وسیله گوراری [۲] در مدل  $c=-2$  معرفی شد. تفاوت نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی با دسته اول این است که توابع بستگی چندنقطه‌ای این میدانها علاوه بر تکنیکی‌های توانی، دارای تکنیکی‌های لگاریتمی نیز می‌باشند. در یک نظریه میدان

در این مقاله با معرفی متغیر پوچ توان  $\theta$  با خواص:

$$\begin{aligned} \langle \phi(z_1)\phi(z_r) \rangle &= 0 \\ \langle \psi(z_1)\phi(z_r) \rangle &= \frac{a_1}{(z_1 - z_r)^{\Delta}} \\ \langle \psi(z_1)\psi(z_r) \rangle &= \frac{1}{(z_1 - z_r)^{\Delta}} (-\nu a_1 \ln(z_1 - z_r) + a_{1r}) \quad (8) \end{aligned}$$

که با [۳] سازگار است.

اکنون به محاسبه توابع بستگی سه نقطه‌ای می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} G(z_1, z_r, z_r, \theta_1, \theta_r, \theta_r) &= \\ \langle \Phi_1(z_1, \theta_1)\Phi_r(z_r, \theta_r)\Phi_r(z_r, \theta_r) \rangle. \quad (9) \end{aligned}$$

پس از محاسبه تابع بستگی سه نقطه‌ای اخیر، کلیه توابع بستگی سه نقطه‌ای شامل  $\phi_i$  و  $\psi_i$  ها به سادگی با بسط معادله (۹) برحسب  $\theta_1, \theta_r, \theta_r$  به دست می‌آیند. برخلاف توابع بستگی دو نقطه‌ای، توابع بستگی سه نقطه‌ای می‌توانند شامل میدانهایی متعلق به سلولهای جورده مختلف باشند. مشابه با آنچه در مورد توابع بستگی دونقطه‌ای انجام شد، ناوردایی تحت تبدیلات همدیس ایجاب می‌کند:

$$\begin{aligned} G(z_1, z_r, z_r, \theta_1, \theta_r, \theta_r) &= \\ f(\theta_1, \theta_r, \theta_r) z_1^{-a_{1r}} z_r^{-a_{rr}} z_r^{-a_{rr}} \quad (10) \end{aligned}$$

که  $z_{ij} = (z_i - z_j)$  و  $a_{ij} = \Delta_i + \Delta_j - \Delta_k + (\theta_i + \theta_j - \theta_k)$  برای یک سلول جورده رتبه ۲:

$$\begin{aligned} f(\theta_1, \theta_r, \theta_r) &= \sum_{i \neq j \neq k} C_i (\theta_j + \theta_k) + \\ &\sum_{1 \leq i < j \leq r} C_{ij} \theta_i \theta_j + C_{rr} \theta_r \theta_r. \quad (11) \end{aligned}$$

توجه کنید که  $f(\theta_1, \theta_r, \theta_r)$  فاقد جمله مستقل از  $\theta$  است. البته این خصوصیت از ملاحظات تقارن تحت تبدیلات همدیس نتیجه نمی‌شود، بلکه قیدی است که سازگاری OPEها تحمیل می‌کند [۶ و ۸] (برای توضیح بیشتر به ضمیمه مراجعه شود). با قرار دادن معادلات (۱۰) و (۱۱) در معادله (۹) و بسط برحسب  $\theta_1, \theta_r, \theta_r$ ، کلیه توابع بستگی سه نقطه‌ای ممکن به دست می‌آیند. از جمله اینکه  $\langle \phi_1 \phi_r \phi_r \rangle = 0$  (چنانکه در کلیه LCFTهایی که می‌شناسیم باید برقرار باشد).

## ۲. بردارهای تکین در LCFT و توابع بستگی چهارنقطه‌ای

تبدیل بی‌نهایت کوچک و سازگار با معادله (۳)

$$\begin{aligned} \theta_i^z &= 0, \\ \theta_i \theta_j &= \theta_j \theta_i. \quad (2) \end{aligned}$$

به بررسی LCFTs می‌پردازیم که چنانچه خواهیم دید ابزاری است که به ساده‌ترین شکل منجر به نتایج قبلی و پاره‌ای نتایج جدید می‌شود. با افزودن یک جزء پوچ توان مانند  $\theta$  به وزن همدیس  $\Delta$  و این فرض که میدان اولیه  $\Phi(z, \theta)$  تحت تبدیل مقیاس به صورت:

$$\Phi(\lambda z, \theta) = \lambda^{-(\Delta+\theta)} \Phi(z, \theta). \quad (3)$$

رفتار می‌کند و  $\Phi(z, \theta) = \phi(z) + \theta \psi(z)$  (  $\theta^z = 0$  ) مشخص کننده یک سلول جورده رتبه ۲ است) به روابط تبدیل (۱) می‌رسیم. برای تعمیم به سلول جورده با رتبه  $n$  کافی است بسط دو طرف معادله (۳) را با

$$\begin{aligned} \Phi(z, \theta) &= \phi_0(z) + \phi_1(z)\theta + \phi_2(z)\theta^2 + \dots \\ &+ \phi_{n-1}(z)\theta^{n-1}. \quad (4) \end{aligned}$$

و  $\theta^n = 0$  در نظر بگیریم. البته در تمام این مقاله با سلول جورده رتبه ۲ کار خواهیم کرد چرا که تعمیم آن به رتبه‌های بالاتر سراسر است. برای به دست آوردن توابع بستگی دونقطه‌ای شامل  $\phi$  و  $\psi$ ، تابع بستگی دونقطه‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G(z_1, z_r, \theta_1, \theta_r) = \langle \Phi_1(z_1, \theta_1)\Phi_r(z_r, \theta_r) \rangle. \quad (5)$$

ناوردایی تحت انتقال و دوران ایجاب می‌کند که بستگی  $G$  به  $z_1$  و  $z_r$  به صورت  $(z_1 - z_r)$  باشد. تحت تبدیل مقیاس داریم:

$$\begin{aligned} G(\lambda(z_1 - z_r), \theta_1, \theta_r) &= \\ \lambda^{-(\Delta_1+\theta_1)} \lambda^{-(\Delta_r+\theta_r)} G((z_1 - z_r), \theta_1, \theta_r), \quad (6) \end{aligned}$$

و برای ناوردایی تحت تبدیل همدیس خاص  $z \rightarrow \frac{z}{1+bz}$  در کلی‌ترین حالت باید  $\Delta_1 = \Delta_r$  و  $G$  شامل جملاتی از مرتبه صفر  $\theta_1$  و  $\theta_r$  نباشد و  $\theta_1$  و  $\theta_r$  با ضرایب یکسان در  $G$  ظاهر شوند، یعنی:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(z_1, \theta_1)\Phi(z_r, \theta_r) \rangle &= \\ \frac{1}{(z_1 - z_r)^{\Delta+(\theta_1+\theta_r)}} (a_1(\theta_1 + \theta_r) + a_{1r}\theta_1\theta_r). \quad (7) \end{aligned}$$

بسط طرفین این معادله برحسب  $\theta_1$  و  $\theta_r$  منجر به توابع بستگی دونقطه‌ای زیر می‌شود:

$$\langle \Delta' + \theta | L_{\vec{n}'} | \chi_{\Delta, c}^n \rangle_S = 0, \quad \forall \vec{n}': |\vec{n}'| = n. \quad (18)$$

یک بردار تکین در سطح  $n$  نه تنها بر تمام بردارهای دلخواه در سطح  $n$  بلکه بر کلیه بردارهای سطوح بالاتر نیز عمود است. از آنجا که تعداد  $L_{\vec{n}'}$  ها  $p(n)$  تا است شرط (۱۸) برای تکین بودن بردار  $\left| \chi_{\Delta, c}^n \right\rangle_S$  معادل  $p(n)$  تا شرط است. از طرف دیگر در سطح  $n$  یک بردار تکین دارای  $p(n)$  ضریب مجهول  $b^{\vec{n}}$  است که باید تعیین شوند. برای چگونگی تعیین آنها معادله (۱۸) را به صورت:

$$\langle \Delta' + \theta | L_{\vec{n}'} | \chi_{\Delta, c}^n \rangle_S = \sum_{|\vec{n}'|=n} b^{\vec{n}'} \langle \Delta' + \theta | L_{\vec{n}'} L_{-\vec{n}'} | \Delta + \theta \rangle = 0, \quad \forall \vec{n}': |\vec{n}'| = n \quad (19)$$

می‌نویسیم. از آنجا که (برای  $k \geq 1$ )  $L_k | \Delta + \theta \rangle = 0$ ، با استفاده از جبر ویراسورو می‌توان  $\langle \Delta' + \theta | L_{\vec{n}'} L_{-\vec{n}'} | \Delta + \theta \rangle$  را به شکل  $\sum_{m=0}^{\vec{n}', \vec{n}} \alpha_m^{\vec{n}', \vec{n}}(c) L_0^m | \Delta + \theta \rangle$  تبدیل کرد. ضرایب  $\alpha_m^{\vec{n}', \vec{n}}(c)$  که اعداد ثابت یا وابسته به  $c$  هستند، معلوم‌اند. بنابراین معادله (۱۹) منجر به یک دستگاه معادله همگن، با  $p(n)$  مجهول  $b^{\vec{n}}$  خواهد شد:

$$\sum_{|\vec{n}'|=n} b^{\vec{n}'} \left( \sum_{m=0}^{\vec{n}', \vec{n}} \alpha_m^{\vec{n}', \vec{n}}(c) (\Delta + \theta)^m \right) \langle \Delta' + \theta | \Delta + \theta \rangle = 0 \quad \forall \vec{n}': |\vec{n}'| = n \quad (20)$$

شرط جواب غیر صفر برای  $b^{\vec{n}}$  ها این است که دترمینان ضرایب  $\sum_{m=0}^{\vec{n}', \vec{n}} \alpha_m^{\vec{n}', \vec{n}}(c) (\Delta + \theta)^m$  صفر نشود که دقیقاً همان دترمینان کچ در LCFTs است. بنابراین در اینجا نیز همانند CFTs بردار تکین برای مقادیری از  $\Delta$  و  $c$  که دترمینان کچ به ازای آنها صفر می‌شود وجود دارد. واضح است که به خاطر همگن بودن دستگاه معادلات (۲۰) حداقل یکی از ضرایب اختیاری خواهد بود. به عنوان مثال در سطح  $2$  ( $n=2$ ):

$$\left| \chi_{\Delta, c}^2(\theta) \right\rangle_S = \left( b^{(1,1)} L_{-1} + b^{(2)} L_{-2} \right) | \Delta + \theta \rangle, \quad (21)$$

و برای برقراری معادله (۲۰) باید  $\Delta = 0$ ،  $\Delta = \frac{1}{4}$  و  $\Delta = -\frac{5}{4}$  که به ترتیب متناظر با  $c=0$ ،  $c=1$  و  $c=25$  است. قدم بعدی به دست آوردن ضرایب  $b^{(1,1)}$  و  $b^{(2)}$  است. برای  $\Delta = \frac{1}{4}$

$$\Delta = -\frac{5}{4}$$

$$\delta \Phi = -\epsilon \left( z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + (n+1)(\Delta + \theta) z^n \right) \Phi \quad (12)$$

را در نظر بگیرید که اثر مولدهای جبر ویراسورو را روی میدانهای اولیه تعریف می‌کند. اگر  $|\Delta + \theta\rangle$  بالاترین وزن با ویژه مقدار وابسته به متغیر پوچ توان باشد، داریم:

$$L_0 | \Delta + \theta \rangle = (\Delta + \theta) | \Delta + \theta \rangle, \quad (13)$$

$$L_n | \Delta + \theta \rangle = 0, \quad n \geq 1.$$

حال اگر  $|\Delta + \theta\rangle$  را به صورت:

$$|\Delta + \theta\rangle = |\phi\rangle + \theta |\psi\rangle \quad (14)$$

تعریف کنیم اثر  $L_0$  روی  $|\phi\rangle$  و  $|\psi\rangle$  از مقایسه دو معادله اخیر به دست می‌آید.

$$L_0 |\phi\rangle = \Delta |\phi\rangle, \quad (15)$$

$$L_0 |\psi\rangle = \Delta |\psi\rangle + |\phi\rangle.$$

علاوه بر بالاترین حالت  $|\Delta + \theta\rangle$ ، حالت‌های ثانویه‌ای وجود دارند که با اعمال  $L_{-n}$  ها روی بالاترین حالت به دست می‌آیند. این حالتها را با  $L_{-\vec{n}} | \Delta + \theta \rangle = L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_k} | \Delta + \theta \rangle$  نمایش می‌دهیم که ترکیبات مختلف  $n_1, n_2, \dots, n_k$  و  $n = n_1 + \dots + n_k$  می‌توان از  $p(n)$  حالت متفاوت در سطح  $n$  ساخت. از هر ترکیب خطی دلخواه این  $p(n)$  حالت، یک حالت عمومی فضای هیلبرت در سطح  $n$  به صورت

$$\left| \chi_{\Delta, c}^n(\theta) \right\rangle = \sum_{\{n_1, n_2, \dots, n_k\}} b^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_k} | \Delta + \theta \rangle$$

$$= \sum_{|\vec{n}'|=n} b^{\vec{n}'} L_{-\vec{n}'} | \Delta + \theta \rangle \quad (16)$$

ساخته می‌شود.

یک بردار (حالت) تکین در سطح  $n$  در LCFTs را با  $\left| \chi_{\Delta, c}^n \right\rangle_S$  نمایش می‌دهیم و آن را به این صورت تعریف می‌کنیم که بر کلیه بردارهای هم سطح خودش عمود باشد که در نتیجه دارای نرم صفر هم خواهد بود:

$$\left\langle \chi_{\Delta, c}^n \left| \chi_{\Delta, c}^n \right\rangle_S = 0. \quad (17)$$

با توجه به معادله (۱۶) شرط برقراری معادله اخیر این است که:

و  $\beta_1, \beta_r, a, b, c$  در معادلات زیر صدق می‌کنند.

$$\alpha = \frac{1}{r} [r(\Delta_r + 1) + r\theta_r], \quad \beta_1(\beta_1 - 1) + \alpha(\alpha_1 - \Delta_1 - \theta_1) = 0$$

$$i = 1, r$$

$$ab = (\beta_1 + \beta_r)(\beta_1 + \beta_r + r\alpha - 1) + \alpha(\Delta_r - \Delta_r + \theta_r - \theta_r),$$

$$a + b + 1 = r(\beta_1 + \beta_r + \alpha),$$

$$c = r\beta_1 + \alpha \quad (29)$$

معادله (۲۷) یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ فوق هندسی است که جواب آن برحسب سری فوق هندسی به صورت زیر قابل بیان است:

$$H(a, b, c; \eta) = K(\theta_1, \theta_r, \theta_r, \theta_r) h(a, b, c; \eta), \quad (30)$$

که

$$h(a, b, c; \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} \eta^n,$$

$$(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1), (x)_0 = 1$$

$$K(\theta_1, \theta_r, \theta_r, \theta_r) = \sum_{i=1}^r k_i \theta_i + \sum_{1 \leq i < j \leq r} k_{ij} \theta_i \theta_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} k_{ijk} \theta_i \theta_j \theta_k + k_{1rrr} \theta_1 \theta_r \theta_r \theta_r. \quad (31)$$

چنانچه از معادلات (۲۹) دیده می‌شود، ضرایب  $a, b, c$  در معادله (۳۱) بستگی به پارامترهای پوچ توان  $\theta_i$  دارند. بنابراین معادله اول (۳۱) در بردارنده ۱۶ تابع وابسته به  $\eta$  است که طبیعی است. زیرا رابطه (۲۳)، خود شامل ۱۶ تابع بستگی چهارنقطه‌ای مختلف است. همچنین  $K$  در معادله (۳۱) فاقد جمله مستقل از  $\theta$  است زیرا همان طور که قبلاً ذکر شد تابع بستگی چهارنقطه‌ای که فقط شامل  $\theta_i$ ها است صفر می‌باشد. همچنین معادله (۲۷) معادل ۱۶ معادله دیفرانسیل است که به چهار دسته کلی تقسیم می‌شوند. یک دسته شامل چهار معادله فوق هندسی همگن و سه دسته دیگر شامل معادلات فوق هندسی غیرهمگن است.

به عنوان مثال در حالت خاص  $\Delta_1 = \Delta_r = \Delta_r = \Delta_r = \frac{1}{r}$  پس از محاسبه ضرایب  $\beta_1, \beta_r, a, b, c$  برحسب  $\Delta_i$ ها و  $\theta_i$ ها از مجموعه معادلات (۲۹)، شکل صریح توابع بستگی چهارنقطه‌ای شامل  $\theta_i$ ها و  $\psi_i$ ها به دست می‌آید. به عنوان نمونه:

$$b^{(1)} = r, \quad b^{(r)} = -[r(\Delta + \theta) + r]. \quad (22)$$

برای  $\Delta = 0$  ضرایب  $b^{(1)}$  و  $b^{(r)}$  فقط می‌توانند متناسب با  $\theta$  باشند و لذا منجر به بردار تکین لگاریتمی نمی‌شوند. این نتایج با [۷] توافق دارد. به طور مشابه می‌توان بردارهای تکین در سطوح بالاتر را به دست آورد. برای به دست آوردن اطلاعات بیشتری از نظریه‌ای که با آن سر و کار داریم دانستن توابع بستگی چهارنقطه‌ای ضروری است. مانند قبل و در تشابه با CFTها شکل کلی توابع بستگی چهارنقطه‌ای به صورت:

$$G(z_1, z_r, z_r, z_r, \theta_1, \theta_r, \theta_r, \theta_r) = \langle \Phi_1(z_1, \theta_1) \dots \Phi_r(z_r, \theta_r) \rangle = f(\eta, \theta_1, \theta_r, \theta_r, \theta_r) \prod_{1 \leq i < j \leq r} z_{ij}^{\mu_{ij}}. \quad (23)$$

است که:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (\Delta_k + \theta_k) - (\Delta_i + \theta_i) - (\Delta_j + \theta_j),$$

$$\eta = \frac{z_{r1} z_{r3}}{z_{r2} z_{r1}} \quad (24)$$

و  $G$  در معادله (۲۳) تحت کلیه تبدیلات همدیس ناوردا است. اگرچه ملاحظات مربوط به تقارن قید دیگری را روی  $G$  ایجاد نمی‌کند ولی سازگاری OPEها لازم می‌دارد که  $\langle \phi\phi\phi\phi \rangle$  صفر شود [۶] و [۸]. بنابراین  $f$  باید فاقد جمله مستقل از  $\theta$  باشد. به واسطه وجود یک بردار تکین در سطح ۲،  $f$  در یک معادله دیفرانسیل صدق می‌کند. بنا بر معادلات (۲۱) از  $\Phi_r(z_r, \theta_r)$  می‌توان یک میدان ثانویه مانند:

$$\chi^{(r)}(z_r, \theta_r) = [rL_{-1} - (r(\Delta_r + 1) + r\theta_r)L_{-r}] \Phi_r(z_r, \theta_r). \quad (25)$$

ساخت که بنا بر خاصیت بردارهای تکین داریم:

$$\langle \Phi_1 \Phi_r \Phi_r \chi^{(r)} \rangle = 0. \quad (26)$$

شکل توابع بستگی چهارنقطه‌ای در معادله (۲۳) به همراه قید (۲۶) ایجاب می‌کند:

$$\eta(1-\eta) \frac{d^r H}{d\eta^r} + [c - (a+b+1)\eta] \frac{dH}{d\eta} - abH = 0. \quad (27)$$

که در آن

$$H(\eta, \theta_1, \theta_r, \theta_r, \theta_r) = \eta^{-\beta_1 + \mu_{1r}} (1-\eta)^{-\beta_r + \mu_{rr}} f(\eta, \theta_1, \theta_r, \theta_r, \theta_r), \quad (28)$$

$$\det_n(c, \Delta + \theta) = \prod_{r,s=1; r+s \leq n}^n (\Delta + \theta - \Delta_{r,s}(c))^{p(n-rs)}, \quad (33)$$

است که:

$$\Delta_{r,s}(c) = \frac{1}{96} \left[ (r+s)\sqrt{1-c} + (r-s)\sqrt{1-c} \right] - \frac{1-c}{24}. \quad (34)$$

و  $p(n-rs)$  تعداد تقسیمهای  $n-rs$  بر حسب اعداد صحیح مثبت است. برای داشتن بردار تکین لازم است دترمینان کج صفر شود که این صفر شدن ممکن است (برای سلولهای جوردن رتبه ۲) به دو صورت اتفاق افتد.

الف) اگر برای مقادیری از  $r$  و  $s$  داشته باشیم  $p(n-rs) \geq 2$  آنگاه به ازای همه مقادیر  $\Delta$  که  $\Delta = \Delta_{r,s}(c)$ ، دترمینان کج صفر است.

ب) اگر به ازای جفتی از  $(r,s)$  مانند  $(r_1, s_1)$ ،  $(r_2, s_2)$ ، ... داشته باشیم  $p(n-rs) = 1$  دترمینان کج صفر می شود اگر لااقل  $\Delta = \Delta_{r_1, s_1}(c) = \Delta_{r_2, s_2}(c)$  در این حالت برخلاف الف) به ازای مقادیر خاصی از  $c$  و  $\Delta$  شرط صفر شدن دترمینان محقق می شود. این نتایج با [۷] سازگار است.

#### ۴. مرز

در این بخش به بررسی LCFT نزدیک مرز می پردازیم. برای CFT معمولی نشان داده شده است [۹] که اگر محور حقیقی را به عنوان مرز در نظر بگیریم با شرط مرزی  $T = \bar{T}$  روی محور حقیقی، معادله دیفرانسیل حاکم بر یک تابع بستگی  $n$  نقطه ای در حضور مرز، همان معادله دیفرانسیلی است که یک تابع بستگی  $2n$  نقطه ای در غیاب مرز، در آن صدق می کند. با این ترفند می توان توابع بستگی یک LCFT را نزدیک مرز به دست آورد [۱۰ و ۱۱]. در اینجا این نتایج را با استفاده از فرمالیزم پارامتر پوچ توان و برای یک سلول جوردن رتبه ۲ به دست می آوریم. ابتدا توابع بستگی تک نقطه ای را برای یک میدان اسکالر  $\Delta = \bar{\Delta}$  در نزدیکی مرز به دست می آوریم. با اعمال  $L_0$  و  $L_{\pm 1}$  بر این توابع بستگی به معادلات دیفرانسیل زیر می رسم:

$$\begin{aligned} (\partial_z + \partial_{\bar{z}}) \langle \Phi(z, \bar{z}, \theta) \rangle &= 0, \\ (z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}} + \nu(\Delta + \theta)) \langle \Phi(z, \bar{z}, \theta) \rangle &= 0, \\ (z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}} + \nu(\Delta + \theta) + \nu\bar{z}(\Delta + \theta)) \langle \Phi(z, \bar{z}, \theta) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\langle \psi(z_1) \phi(z_2) \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle = k, \eta^{\frac{1}{2}} (1-\eta)^{\frac{1}{2}} h_0(\eta) \prod_{1 \leq i < j \leq 4} z_{ij}^{-\frac{1}{6}} \quad (32)$$

که  $h_0(\eta) = F_{\text{hyp}}(2, 1, 2, \eta)$ . سایر توابع چهار نقطه ای شامل ۲، ۳ یا ۴ تا  $\psi$ ، به روش مشابهی به دست می آیند. قابل ذکر است که بسته به اینکه چه تعداد  $\psi$  در تابع همبستگی ظاهر شود، توابع مختلفی در سمت راست ظاهر می شود. همان طور که در ضمیمه به آن اشاره شده است، تابع همبستگی فاقد  $\psi$  برابر صفر است. اگر تابع همبستگی فقط شامل یک  $\psi$  باشد، در طرف راست فقط  $H_i$  ظاهر می شود و اگر تابع بستگی فقط شامل دو تا از  $\psi$ ها باشد، در طرف راست،  $H_i$  و  $H_{ij}$  ظاهر می شود و الی آخر  $(H_{ij}, H_i)$ ،  $H_{ijk}$  و  $H_{ijkl}$  به ترتیب ضرایب  $\theta_i, \theta_j, \theta_k, \theta_l$  و  $\theta_i \theta_j, \theta_i \theta_k, \theta_i \theta_l, \theta_j \theta_k, \theta_j \theta_l, \theta_k \theta_l$  در بسط معادله (۳۲) دیده می شود همیشه تکنیکی های لگاریتمی در توابع بستگی چهار نقطه ای در بستگی هایی که شامل بیش از یک  $\psi$  باشند ظاهر می شوند. این گفته در مورد توابع بستگی  $n$  نقطه ای هم صحیح است.

#### ۳. دترمینان کج در LCFT

به طور کلی در نظریه میدانهای غیر هم دیس غیر لگاریتمی CFT شرط وجود بردار تکین فقط وجود رابطه خاصی بین  $c$  و  $\Delta$  است [۱]. بر حسب دترمینان کج، این رابطه خاص همان ریشه های دترمینان کج می باشند. در LCFT همان طور که در سطح ۲ دیدیم (و البته برای سطوح بالاتر)، به ازای مقادیر خاصی از  $c$  و  $\Delta$  بردار تکین وجود دارد. بنابراین انتظار می رود که این مقادیر خاص  $c$  و  $\Delta$  از یک دترمینان کج در LCFT قابل استنتاج باشد.

در نظریه میدانهای هم دیس معمولی، عناصر دترمینان کج به صورت  $\langle \Delta | L_{\bar{n}}' L_{-n} | \Delta \rangle$  است که با استفاده از جبر ویراسورو قابل تبدیل به  $\sum_{m=0}^{\bar{n}, n} \alpha_m^{\bar{n}, n}(c) \Delta^m$  است. در LCFT نیز چنین است با این تفاوت که عناصر دترمینان کج به شکل  $\langle \Delta + \theta | L_{\bar{n}}' L_{-n} | \Delta + \theta \rangle$  می باشند. از آنجا که  $\langle \Delta + \theta | L_0 | \Delta + \theta \rangle = (\Delta + \theta) | \Delta + \theta \rangle$  کافی است در دترمینان کج مربوط به CFT معمولی  $\Delta$  را با  $\Delta + \theta$  جایگزین کنیم. بنابراین در سطح  $n$ ، دترمینان کج به صورت:

### ۵. جبر جریان وابسته به LCFT

تانسور انرژی تکانه  $T_0$  با وزن همدیس  $\Delta=2$  و عملگر یکسانی  $\Omega$  با وزن همدیس  $\Delta=0$  میدانهایی هستند که در هر CFT وجود دارند.  $T_0 = L_{-1}\Omega$  در یک LCFT عملگرهای تبهگنی وجود دارند که تحت تبدیلات همدیس یک سلول جورد تشکیل می‌دهند. بنابراین طبیعی است که برای  $T_0$  و  $\Omega$  نیز جفت‌های لگاریتمی در نظر بگیریم [۲، ۱۲ و ۱۳]. در اینجا این مفهوم را تعمیم بیشتری می‌دهیم و یک ابر میدان چهار مؤلفه‌ای وابسته به متغیر گراسمونی  $\eta$  را به صورت:

$$\Phi(z, \eta) = \phi(z) + \bar{\alpha}(z)\eta + \bar{\eta}\alpha(z) + \bar{\eta}\eta\psi(z). \quad (43)$$

معرفی می‌کنیم که  $\alpha(z)$  یک میدان فرمیونی با وزن همدیس یکسان با  $\phi$  و  $\psi$  است.  $\bar{\eta}\eta$  در اینجا نقش متغیر پوچ توان  $\theta$  را دارد. توجه کنید که  $\alpha$  و  $\bar{\alpha}$  هر دو متعلق به قسمت هولومورفیک نظریه می‌باشند. اگر تحت تبدیل مقیاس،  $\Phi(z, \eta)$  به صورت:

$$\Phi(\lambda z, \theta) = \lambda^{-(\Delta + \bar{\eta}\eta)} \Phi(z, \eta). \quad (44)$$

رفتار کند،  $\psi$  و  $\phi$  مانند معادله (۱) تبدیل می‌شوند و  $\alpha(z)$  و  $\bar{\alpha}(z)$  که دارای وزن همدیس  $\Delta$  هستند مانند  $\phi$  رفتار می‌کنند. چنین مدل‌هایی در یک نظریه  $c=-2$  نیز معرفی شده است [۱۴].

برای ساختن یک ابر میدان با وزن همدیس  $\Delta=0$  علاوه بر  $\Omega$  و جفت لگاریتمی آن یعنی  $\omega$  به دو میدان دیگر با وزن همدیس صفر نیازمندیم که آنها را با  $\xi(z)$  و  $\bar{\xi}(z)$  معرفی می‌کنیم.

$$\Phi_0(z, \eta) = \Omega + \bar{\xi}(z)\eta + \bar{\eta}\xi(z) + \bar{\eta}\eta\omega(z). \quad (45)$$

$\Omega$  دارای این خاصیت است که برای هر میدان  $S$  داریم:  $\Omega S = S$ .  $\Phi_0(z, \eta)$  تحت تبدیل مقیاس، به صورت  $\Phi_0(\lambda z, \theta) = \lambda^{-\bar{\eta}\eta} \Phi_0(z, \eta)$  تبدیل می‌شود و دارای خاصیت  $\langle \Phi_0(z, \eta) \rangle = \bar{\eta}\eta$  نیز می‌باشد زیرا  $\langle \bar{\xi} \rangle = \langle \xi \rangle = 0$  و  $\langle \omega \rangle = 1$ . وجود  $\Phi_0$ ، یک میدان ثانویه با وزن همدیس  $\Delta=2$  مانند  $T(z, \eta) = L_{-1}\Phi_0(z, \eta)$  را به دنبال دارد که آن را به عنوان ابر تانسور انرژی تکانه به صورت

$$T(z, \eta) = T_0(z) + \bar{\eta}\xi(z) + \bar{\xi}(z)\eta + \bar{\eta}\eta t(z) \quad (46)$$

نمایش می‌دهیم. اکنون با توجه به خاصیت  $\Phi_0(z, \eta)$  تحت تبدیل مقیاس و از آنجا که OPE میدان  $\Phi_0$  با خودش تا پایتترین مرتبه مجبور است متناسب با خودش باشد، می‌توان نوشت:

از دو معادله اول خواهیم داشت:

$$\langle \Phi(y, \theta) \rangle = \frac{f(\theta)}{y^{\Delta+\theta}}, \quad (36)$$

که  $y = z - \bar{z}$  و  $\langle \Phi(y, \theta) \rangle$  خود به خود در معادله سوم نیز صدق می‌کند. اما  $\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \theta\psi(y)$  و  $f(\theta) = a + b\theta$ . بنابراین:

$$\langle \phi(y, \theta) \rangle = \frac{a}{y^{\Delta}},$$

$$\langle \psi(y, \theta) \rangle = \frac{1}{y^{\Delta}} (b - \theta a \ln y). \quad (37)$$

در ادامه این بخش به ارزیابی توابع بستگی دونقطه‌ای  $G(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \theta_1, \theta_2) = \langle \Phi(z_1, \bar{z}_1, \theta_1) \Phi(z_2, \bar{z}_2, \theta_2) \rangle$  حضور مرز می‌پردازیم. ناوردایی تحت  $L_{-1}$  ایجاب می‌کند:

$$(\partial_{z_1} + \partial_{\bar{z}_1} + \partial_{z_2} + \partial_{\bar{z}_2}) G = 0. \quad (38)$$

کلی‌ترین جواب  $G$  به صورت  $G = G(y_1, y_2, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)$  است که در آن  $y_i = z_i - \bar{z}_i$  و  $x_i = z_i + \bar{z}_i$  است. برای ناوردایی تحت  $L_0$  باید:

$$\left[ y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x \frac{\partial}{\partial x} + \nu(\Delta + \theta_1) + \nu(\Delta + \theta_2) \right] G = 0, \quad (39)$$

که با معرفی  $x = x_2 - x_1$  و  $\alpha_1 = \frac{y_1}{x}$  و  $\alpha_2 = \frac{y_2}{x}$  جواب معادله اخیر به صورت زیر است:

$$G = \frac{1}{x^{\Delta + \nu\theta_1 + \nu\theta_2}} f(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2). \quad (40)$$

اما ناوردایی تحت  $L_1$  لازم می‌دارد که  $G$  در معادله دیفرانسیل

$$\left[ xy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - xy_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + (y_1' - y_2') \frac{\partial}{\partial x} + \nu x(\theta_1 - \theta_2) \right] G = 0, \quad (41)$$

صدق کند که از اینجا شکل  $f$  تعیین می‌شود. سرانجام تابع بستگی دونقطه‌ای

$$\langle \Phi(z_1, \bar{z}_1, \theta_1) \Phi(z_2, \bar{z}_2, \theta_2) \rangle = \frac{1}{(y_1 y_2)^{\Delta + \theta_1 + \theta_2}} \left( \frac{y_1}{y_2} \right)^{\theta_1 - \theta_2} h \left( \frac{x^2 + y_1^2 + y_2^2}{y_1 y_2} \right), \quad (42)$$

برحسب تابع اختیاری  $h$  به دست می‌آید که همان عبارت به دست آمده برای تابع بستگی دونقطه‌ای در [۱۰] در نزدیکی مرز است.

$$T_0(z)\zeta(\circ) = \frac{1}{z^2} \frac{c_1 \xi}{z^2} + \frac{d_1 \sigma}{z^2} + \frac{\nu \zeta}{z^2} + \frac{\partial_z \zeta}{z}$$

$$\zeta(z)t(\circ) = -\frac{1}{z^2} \frac{c_1 \xi \log z}{z^2} - \frac{d_1 \log z \sigma}{z^2} - \frac{\nu \zeta \log z}{z^2} - \frac{\partial_z (\zeta \log z)}{z}$$

$$\bar{\zeta}(z)\zeta(\circ) = -\frac{1}{z^2} \frac{c_1 (\omega + \Omega \log z) + c_1 \Omega}{z^2} - \frac{d_1 J}{z^2}$$

$$-\frac{\nu (t + T_0 \log z) + T_0}{z^2} - \frac{\partial_z (t + T_0 \log z)}{z} \quad (50)$$

و

$$t(z)t(\circ) = -\frac{1}{z^2} \frac{\log z (c_1 \log z + \nu c_1) \Omega + \nu c_1 \omega}{z^2} - \frac{\nu d_1 \log z J}{z^2}$$

$$-\frac{\nu \log z (\nu t + T_0 \log z) + \nu \log z T_0}{z^2}$$

$$-\frac{\partial_z (\log z (\nu t + T_0 \log z))}{z} \quad (51)$$

از آنجا که  $\langle \Omega \rangle = 0$  و  $\langle \omega \rangle = 1$  از روابط فوق داریم:

$$\langle T_0(z)T_0(\circ) \rangle = 0 \quad (52)$$

$$\langle T_0(z)t(\circ) \rangle = \frac{c_1}{z^2} \quad (53)$$

که با [۱۵] سازگاری دارد.

### ۶. جمع‌بندی

در این مقاله مشاهده کردیم که کلیه نتایج شناخته شده در نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی را می‌توان با استفاده از ابزار متغیرهای پوچ‌توان به دست آورد. ممکن است این نتیجه صرفاً ابزاری باشد ولی از طرف دیگر احتمال دارد که این توانایی ناشی از وجود ساختاری در پشت نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی باشد.

### ۷. ضمیمه

در یک نظریه میدان همدیس لگاریتمی با سلول جردن رتبه  $n$  که  $\phi_{(\Delta, \circ)}(z)$  یک میدان معمولی با بالاترین وزن  $\Delta$  و  $\phi_{(\Delta, k)}(z)$  ( $0 < k < n$ ) شریکهای لگاریتمی آن می‌باشند تابع همبستگی تک‌نقطه‌ای  $G_{(\Delta, k)}(z) = \langle \phi_{(\Delta, k)}(z) \rangle$  را در نظر می‌گیریم. اتحاد وارد در LCFT تنها امکان  $G_{(\circ, n-1)} \neq 0$  را می‌دهد و منجر به صفر شدن سایر توابع همبستگی تک‌نقطه‌ای می‌شود. اتحادهای وارد در LCFT برای  $G_{(\Delta, k)}(z)$  به صورت زیر است:

$$\Phi_0(z_1, \eta_1)\Phi_0(z_2, \eta_2) \sim z_1^{-\bar{\eta}_1 \eta_2 + \bar{\eta}_2 \eta_1} \Phi_0(z, \eta_r) \quad (47)$$

که  $z_r = \circ$  و  $z_1 = z$  و  $\eta_r = \eta_1 + \eta_2$  پس از بسط طرفین، علاوه بر خاصیت بدیهی  $\Omega S = S$  به سایر OPE‌های ممکن یعنی:

$$\bar{\xi}(z)\xi(\circ) = \nu i(\omega + \Omega \log z)$$

$$\xi(z)\omega(\circ) = -\xi \log z$$

$$\omega(z)\omega(\circ) = -\log z (\nu \omega + \Omega \log z) \quad (48)$$

می‌رسیم که با [۱۴] سازگار است.

همچنین در تشابه با CFT معمولی و سازگار با معادله (۴۷) حاصلضرب عملگری زیر را برای ابر تانسور انرژی تکانه پیشنهاد می‌کنیم:

$$T(z, \eta_1)T(\circ, \eta_2) = z^{-\bar{\eta}_1 \eta_2 + \bar{\eta}_2 \eta_1} \left\{ \frac{c(\eta_r)}{z^2} \Phi_0(\eta_r) + \frac{d(\eta_r)\chi(\eta_r)}{z^2} + \frac{e(\eta_r)T(\eta_r)}{z^2} + \frac{f(\eta_r)T(\eta_r)}{z} \right\} \quad (49)$$

چند نکته در مورد این OPE لازم به ذکر است. الف: برعکس OPE تانسور انرژی تکانه در نظریه میدانهای همدیس معمولی،

در اینجا جمله  $\frac{1}{z^3}$  وجود دارد. در OPE‌های معمولی این جمله وجود ندارد زیرا  $L_{-1}\Omega = 0$ . در اینجا دلیلی وجود ندارد که  $L_{-1}\xi$ ،  $L_{-1}\bar{\xi}$  و  $L_{-1}\omega$  همگی صفر باشند. همچنین در معادله (۴۹)  $L_{-1}\Phi_0(\eta)$  را با  $\chi(\eta) = \bar{\eta}\sigma + \bar{\sigma}\eta + \bar{\eta}\eta J$  تعریف کرده‌ایم. ب: ثابت  $c(\eta)$  را به صورت  $c(\eta) = c_1 + c_2 \bar{\eta}\eta$  اختیار می‌کنیم تا از مواجهه با ثابتهای غیراسکالر جلوگیری کرده باشیم. توجه کنید  $c_1$  همان بار مرکزی است که در CFT معمولی وارد می‌شود. ثابت  $e(\eta)$  به صورت  $e(\eta) = \nu + \bar{\eta}\eta$  انتخاب می‌شود تا هم با بعد همدیس  $T_0(z)$  سازگار باشد و هم نشان‌دهنده این واقعیت باشد که  $t(z)$  جفت لگاریتمی  $T_0(z)$  است. همچنین  $f(\eta)$  را برابر واحد می‌گیریم تا به روابط آشنای حاصل از اثر  $T_0$  روی سایر اعضای ابر تانسور  $T$  برسیم. پس از بسط طرفین معادله (۴۹):

$$T_0(z)T_0(\circ) = \frac{c_1 \Omega}{z^2} + \frac{\nu T_0}{z^2} + \frac{\partial_z T_0}{z}$$

$$T_0(z)t(\circ) = \frac{c_2 \Omega + c_1 \omega}{z^2} + \frac{d_1 J}{z^2} + \frac{\nu t + T_0}{z^2} + \frac{\partial_z t}{z}$$

اکنون یک سلول جردن رتبه  $n=2$  در نظر می‌گیریم. مطابق با نمادگذاری به کار رفته در معادله  $(\lambda)$   $\phi(z) = \phi_{(\Delta, \circ)}$  و  $\psi(z) = \phi_{(\Delta, 1)}$ . بنابراین OPE‌های سازگار با معادله  $(\lambda)$ ، با توجه به اینکه فقط  $\phi_{(\circ, 1)}(z) \neq 0$  به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \phi_{(\Delta, \circ)}(z)\phi_{(\Delta, \circ)}(\circ) &\sim \sum_{\Delta'} a_1(\Delta, \Delta', \circ)\phi_{(\Delta', \circ)}(\circ)z^{\Delta'-\tau\Delta} \\ \phi_{(\Delta, \circ)}(z)\phi_{(\Delta, 1)}(\circ) &\sim \sum_{\Delta'} [a_1(\Delta, \Delta', \circ)\phi_{(\Delta', 1)}(\circ) + a_r(\Delta, \Delta', \circ)\phi_{(\Delta', \circ)}(\circ)]z^{\Delta'-\tau\Delta} \\ \phi_{(\Delta, 1)}(z)\phi_{(\Delta, 1)}(\circ) &\sim \sum_{\Delta'} [a_{1r}(\Delta, \Delta', \circ) - \tau a_1(\Delta, \Delta', \circ) \ln z] \phi_{(\Delta', 1)}(\circ) \\ &+ a_r(\Delta, \Delta', z)\phi_{(\Delta', \circ)}(\circ)z^{\Delta'-\tau\Delta}. \end{aligned} \quad (58)$$

پس سازگاری OPE‌ها در LCFT ایجاب می‌کند که

$$G(z_1, \dots, z_n) = \langle \phi_{(\Delta, \circ)}(z_1), \dots, \phi_{(\Delta, \circ)}(z_n) \rangle = 0. \quad (59)$$

$$\begin{aligned} L_{-1}G_{(\Delta, k)}(z) &= \partial_z G_{(\Delta, k)}(z) = 0 \\ L_0 G_{(\Delta, k)}(z) &= (z\partial_z + \Delta + \hat{\delta}_\Delta)G_{(\Delta, k)}(z) = 0 \\ L_1 G_{(\Delta, k)}(z) &= [z^2\partial_z + \tau z(\Delta + \hat{\delta}_\Delta)]G_{(\Delta, k)}(z) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\hat{\delta}_\Delta \phi_{(\Delta, k)}(z) = (1 - \delta_{k0})\phi_{(\Delta, k-1)}(z) \text{ که}$$

اتحاد اول ایجاب می‌کند که  $G_{(\Delta, k)}(z) = \text{const.}$  از اتحاد

دوم داریم:

$$\Delta G_{(\Delta, k)} + (1 - \delta_{k0})G_{(\Delta, k-1)} = 0 \quad (55)$$

که به ازای  $k=0$ :

$$\Delta G_{(\Delta, 0)} = 0 \quad (56)$$

و به ازای  $0 < k < n$ :

$$\Delta G_{(\Delta, k)} + G_{(\Delta, k-1)} = 0 \quad (57)$$

اگر  $\Delta \neq 0$  آنگاه  $G_{(\Delta, k)} = 0$  ( $0 \leq k < n$ ) و اگر  $\Delta = 0$  آنگاه فقط امکان  $G_{(\circ, n-1)} \neq 0$  وجود دارد و بقیه  $G_{(\circ, k)} = 0$  ( $0 \leq k < n-1$ ). اتحاد سوم منجر به قید دیگری نمی‌شود.

### مراجع

1. A A Belavin, A M Polyakov and A B Zamolodchikov, Nucl. Phys. B241 (1984) 333.
2. V Gurarie, Nucl. Phys. B410 (1993) [hep-th/9303160].
3. J S Caux, I I Kogan and A M Tsevelik, Nucl. Phys. B466 (1996) 444 [hep-th/9511134].
4. M R Rahimi-Tabar, A Aghamohammadi and M Khorrami, Nucl. Phys. B497 (1997) 555 [hep-th/9610168].
5. A M Ghezelbash and V Karimipour, Phys. Lett. B402 (1997) 2.
6. S Moghimi-Araghi, S Rouhani and M Sadaat, Lett. Math. Phys. 55 (2001) 71 [hep-th/0012149].
7. M Flohr, Nucl. Phys. B514 (1998) 523 [hep-th/9707090].
8. M Flohr, [hep-th/0009137].
9. J Cardy, Nucl. Phys. B240 [FS12] (1984) 514.
10. S Moghimi-Araghi and S Rouhani, Letters in Math. Phys. 53 (2000) 49 [hep-th/0002142].
11. I I Kogan and J F Wheeler [hep-th/0003184].
12. I I Kogan and A Lewis, Nucl. Phys. B509 (1998) 687 [hep-th/9705240].
13. J S Caux, I I Kogan, A Lewis and A M Tsevelik, Nucl. Phys. B489 (1997) 469 [hep-th/9606138].
14. H G Kausch, Nucl. Phys. B583 (2000) 513.
15. V Gurarie, A W W Ludwig, [cond-mat/9911392].