

## حالت زمینه ابرشاره گاز فرمی نزدیک تشدید فشاخ موج-d

مرتضی خادمی پور صمدی و محمدعلی شاهزمانیان

دانشکده فیزیک، دانشگاه اصفهان، خیابان هزار جریب، اصفهان

### چکیده

ما جفت شدگی موج d را نزدیک تشدید فشاخ بررسی خواهیم کرد. با استفاده از پتانسیل نوزبرز و اشمیت - رینک که دامنه پراکندگی انرژی- پایین دو جسمی را ایجاد می کند با کمینه سازی انرژی به پاسخ تحلیلی معادله گاف و حالت زمینه در دمای  $T=0$  خواهیم رسید.

واژه های کلیدی: جفت شدگی موج d، ابرشاره، معادله گاف، حالت پایه

### ۱. مقدمه

در حال حاضر شواهد قابل ملاحظه ای برای شکل گیری جفت فرمیونی نزدیک تشدید فشاخ وجود دارد [۱]. تشدید فشاخ ناحیه ای است که این جفتهای فرمیونی دارای برهم کنش قویند. معمولاً برهم کنش در گازهای اتمی با یک پارامتر به نام طول پراکندگی موج s یعنی  $a_0$  توصیف می شود. این کمیت را می توان نزدیک تشدید فشاخ تنظیم نمود. علامت و اندازه  $a_0$  را می توان با استفاده از یک میدان مغناطیسی خارجی تعیین کرد [۲]. با توجه به طول پراکندگی  $a_0$ ، برهم کنش های اتمی در تشدید فشاخ به دو بخش تقسیم می شوند. بخش  $a_0 < 0$  دارای برهم کنش جفتهای کوپر (BCS) و بخش  $a_0 > 0$  دارای برهم کنش مولکولی جفتهای فرمیونی یعنی چگالش بوز - اینشتین (BEC) می باشد [۳]. در این مقاله با توجه به ابر شارگی گاز فرمی در دمای  $T=0$ ، با به کارگیری مدل پتانسیلی که دامنه پراکندگی دو جسمی را فراهم می آورد به پاسخ تحلیلی مسئله BCS به ازای جفت شدگی موج d خواهیم رسید.

### ۲. دامنه پراکندگی دو جسمی بر حسب ماتریس پراکندگی

دامنه پراکندگی پاره موج  $\mathbf{l}$  ام  $f_{\mathbf{l}}(k)$  از طریق ماتریس پراکندگی  $T_{\mathbf{l}}(k, k'; E)$  با پتانسیل  $V(r)$  به این صورت در ارتباط است [۴]:

$$f_{\mathbf{l}}(k) = -\frac{m}{4p\hbar^2} T_{\mathbf{l}}(k, k; 2e_k + i0^+) \quad (1)$$

که در آن  $T_{\mathbf{l}}(k, k'; E_+)$  معادله انتگرالی (۲) را برآورده می کند:

$$T_{\mathbf{l}}(k, k'; E_+) = V_{\mathbf{l}}(k, k') + \int \frac{dk''}{2p^2} \times \frac{k''^2 V_{\mathbf{l}}(k, k'') T_{\mathbf{l}}(k'', k'; E_+)}{E_+ - \frac{\hbar^2 k''^2}{m}} \quad (2)$$

به منظور یافتن ماتریس پراکندگی از بسط  $V_{k-k'}$  بدین شکل استفاده کرده ایم [۵]:

$$V_{k-k'} = 4p \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{l}}(k, k') \sum_{m=-1}^1 Y_{\mathbf{l}m}(\hat{k}) Y_{\mathbf{l}m}^*(\hat{k}') \quad (3)$$

۳. پتانسیل نوزیرز و اشمیت - رینگ

برای جلوگیری از پیچیدگیهای فنی از مدل پتانسیل نوزیرز و اشمیت - رینگ بهره می‌بریم [۶]:

$$V_I(k, k') = I_1 w_1(k) w_1(k') \quad ;$$

$$w_1(k) = \frac{\left(\frac{k}{k_0}\right)^I}{\left[1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right]^{I+1}} \quad (۴)$$

که در آن  $k_0$  بردار موجی قطع است.

برای به دست آوردن دامنه پراکندگی، تابع  $t_1(E_+)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{t_1(E_+)} = \frac{1}{I_1} - \frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{w_1^2(k)}{E_+ - 2e_k} \quad (۵)$$

که در آن  $\Omega$  حجم است. حال اگر قرار دهیم:

$$T_1(k, k'; E_+) = w_1(k) w_1(k') t_1(E_+) \quad (۶)$$

به رابطه (۲) دست خواهیم یافت. اکنون معادله (۵) را به ازای  $I=2$  حل نموده، از این روش  $T_2(k, k'; 2e_k + i0^+)$  را به دست می‌آوریم. پاسخ معادله (۵) با استفاده از حساب مانده‌ها این گونه است:

$$\frac{1}{t_1(E_+)} = \frac{1}{I_1} + \frac{mk_0^2}{4p^2 \hbar^2} (2\pi i) \left\{ a_{-1} \Big|_{z=ik_0} + a_{-1} \Big|_{z=\sqrt{\frac{mE_+}{\hbar^2}}} \right\} \quad (۷)$$

سرانجام با استفاده از رابطه‌های (۱)، (۵) و (۶) دامنه  $f_1(k)$  برابر خواهد بود با:

$$f_1(k) = -\frac{m}{4p\hbar^2} w_1(k) w_1(k') \times \frac{1}{\frac{1}{I_1} + \frac{mk_0^2}{4p^2 \hbar^2} (2\pi i) \left\{ a_{-1} \Big|_{z=ik_0} + a_{-1} \Big|_{z=\sqrt{\frac{mE_+}{\hbar^2}}} \right\}} \quad (۸)$$

بنابراین، دامنه پراکندگی به ازای  $I=2$  در انرژیهای پایین این گونه به دست می‌آید:

$$f_2(k) = \frac{k^4}{-\left(\frac{4p\hbar^2 k_0^4}{mI_2} + \frac{3}{8} k_0^5\right) - \left(\frac{12p\hbar^2 k_0^2}{mI_2} + \frac{5}{4} k_0^3\right) k^2 - ik^5} \quad (۹)$$

۴. برد مؤثر و طول پراکندگی به ازای  $I=2$

دامنه پراکندگی دو جسمی پاره موج  $I=1$  در انرژیهای پایین چنین خواهد بود [۷]:

$$f_1(k) = \frac{(kb)^{2I}}{-a_1^{-1} + \frac{\hbar^2 k^2}{2} - i(kb)^{2I} k} \quad (۱۰)$$

که در آن  $a_1$ ،  $\hbar^2$  و  $b$  به ترتیب دامنه پراکندگی، برد مؤثر و برد پتانسیل می‌باشند. انرژی حالت مقید وقتی  $k$  ادامه تحلیلی محور موهومی محض باشد به عنوان یک قطب در تابع  $f_1(k)$  ظاهر می‌شود [۸]. به ازای  $I \geq 1$  برد مؤثر در معادله (۱۰) بر بخش موهومی غالب می‌شود. آنگاه انرژی حالت مقید برابر است با [۹]:

$$E_b = \frac{2\hbar^2}{ma_1 \hbar^2} \quad I \geq 1 \quad (۱۱)$$

با قرار دادن  $I=2$  در رابطه (۱۰) و مقایسه آن با رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$-\frac{a_2^{-1}}{b^4} = -\left(\frac{4p\hbar^2 k_0^4}{mI_2} + \frac{3}{8} k_0^5\right) \quad (۱۲)$$

$$\frac{\hbar^2}{2b^4} = -\left(\frac{12p\hbar^2 k_0^2}{mI_2} + \frac{5}{4} k_0^3\right) \quad (۱۳)$$

با حذف  $I_2$  در دو معادله بالا،  $\hbar^2$  این گونه به دست می‌آید:

$$\frac{\hbar^2}{2b^4} = -\left[\frac{3}{a_2 b^4 k_0^2} + \frac{1}{8} k_0^3\right] \quad (۱۴)$$

از سوی دیگر در تشدید فشاخ  $a_2$  به سمت بی نهایت میل می‌کند [۱۰] آنگاه:

$$\hbar^2 = -\frac{1}{4} k_0^3 b^4 \quad (۱۵)$$

$$\frac{\langle H \rangle}{\Omega} = n\mu - \frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{|\Delta_k|^2}{8\varepsilon_k^3} \quad (24)$$

$$n = \frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{|\Delta_k|^2}{2\varepsilon_k^2} \quad (25)$$

از سوی دیگر، تعداد الکترونها در زیر سطح فرمی برابر است با:

$$n = \frac{1}{3\pi^2} k_F^3 \quad (26)$$

با استفاده از روابط (۲۵) و (۲۶)،  $n$  را به ازای  $\mathbf{l}=2$  به شکل دیگر می‌توان نوشت:

$$n = \frac{m^2 C_2^2}{64\pi^2 \hbar^4 k_0} \Rightarrow k_0 = \frac{m^2 C_2^2}{64\pi^2 \hbar^4 n} \quad (27)$$

حال رابطه (۲۷) را در رابطه (۱۵) قرار داده، به کمک رابطه (۲۶)، و با اندکی محاسبه می‌رسیم به

$$C_2 = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{(k_0 b)^2}{\sqrt{k_F}} \frac{1}{\sqrt{|r_2|}} E_F \quad (28)$$

با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۲) و (۲۸)،  $\frac{C_2^2}{4\pi\lambda_2}$  به این صورت در می‌آید:

$$\frac{C_2^2}{4\pi\lambda_2} = \left[ -\frac{E_{2b}}{2} - \frac{3}{2} \frac{\hbar^2 k_0^2}{m} \right] n \quad (29)$$

با جایگذاری رابطه (۲۹) در روابط (۲۳) و (۲۴) خواهیم داشت:

$$\mu = \mu_0 + \frac{E_{2b}}{2} = \frac{19\gamma \hbar^2 k_F^3}{3mk_0} + \frac{E_{2b}}{2} \quad (30)$$

$$\frac{\langle H \rangle}{\Omega} = \frac{n}{2} (\mu_0 + E_{2b}) = \frac{n}{2} \left( \frac{19\gamma \hbar^2 k_F^3}{3mk_0} + E_{2b} \right) \quad (31)$$

که در آن  $\gamma = \int dk \tilde{\Delta}_k^4$  است و گاف انرژی را بدین شکل تغییر دادیم:

$$\Delta_k = w_1(k) C \tilde{\Delta}(\hat{k}) \quad ; \quad \tilde{\Delta}(\hat{k}) = \sum_m \alpha_m Y_{1m}(\hat{k}) \quad (32)$$

$$\alpha_m = \frac{C_m}{C_1} \quad \text{که در آن}$$

## ۶. بحث و نتیجه‌گیری

برای یافتن حالت زمینه باید انرژی سیستم را کمینه کرد. اگر به انرژیهای به دست آمده توجه کنیم، تنها  $m_0$  یا  $g$  متغیر است؛

## ۵. انرژی سیستم و گاف انرژی در زیر دمای گذار

با استفاده از نظریه BCS، انرژی میانگین و گاف انرژی را می‌توان نوشت [۱۱]:

$$\langle H - mN \rangle = 2 \sum_k (e_k - m) |v_k|^2 - \Omega^{-1} \sum_{k,k'} V_{k-k'} u_k v_{k'}^* u_{k'} \quad (16)$$

$$D_k = - \sum_{k'} v_{k-k'} u_{k'} v_{k'} = - \sum_{k'} \frac{v_{k-k'} D_{k'}}{2E_{k'}} \quad (17)$$

که در آن

$$x_k = e_k - m, \quad v_k = \sqrt{\frac{1 - \frac{x_k}{E_k}}{2}}, \quad u_k = \sqrt{\frac{1 + \frac{x_k}{E_k}}{2}}$$

با  $\mu$  پتانسیل شیمیایی است.  $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$  حجم و  $\Omega$  پتانسیل شیمیایی است. با استفاده از پارامترهای ذکر شده و جایگذاری آنها در روابط (۱۶) و (۱۷)، انرژی سیستم و گاف انرژی را به این شکل بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\langle H \rangle}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \sum_k \left\{ \varepsilon_k - E_k + \frac{|\Delta_k|^2}{2E_k} \right\} + n\mu \quad (18)$$

که  $n$ ، تعداد ذرات در واحد حجم، برابر است با:

$$n = \frac{N}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \sum_k \left( 1 - \frac{\varepsilon_k - \mu}{E_k} \right) \quad (19)$$

و

$$\Delta_k = w_1(k) \sum_m C_m Y_{1m}(\hat{k}) \quad (20)$$

که در آن ضرایب  $\{C_m\}$ ، معادلات (۲۱) را برآورده می‌کنند:

$$-\frac{C_m}{\lambda_1} = 4\pi\Omega^{-1} \sum_{k,m'} w_1(k) Y_{1m}^*(\hat{k}) Y_{1m'}(\hat{k}) \frac{C_{m'}}{E_k} \quad (21)$$

با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) خواهیم داشت:

$$-\frac{C_1^2}{4\pi\lambda_1} = \sum_k \frac{|\Delta_k|^2}{2E_k} \quad (22)$$

در زیر دمای گذار ( $T_c$ )،  $\mu \ll \varepsilon_k$  [۱۲] بوده، با توجه به اینکه

گاف نیز کوچک است  $\frac{C_1^2}{4\pi\lambda_1}$ ، انرژی سیستم و  $n$  به این صورت نوشته می‌شوند:

$$n\mu = n\mu_0 - \frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{|\Delta_k|^2}{2\varepsilon_k} - \frac{C_1^2}{4\pi\lambda_1} \quad ; \quad n\mu_0 = \frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{|\Delta_k|^4}{4\varepsilon_k^3} \quad (23)$$

$$\frac{\langle H \rangle}{\Omega} = \frac{n}{2} (\mu_0 + E_{1b})$$

و

$$\mu = \mu_0 + \frac{E_{1b}}{2}$$

که در آن  $m_0$  نیز به ازای  $\mathbf{1}$  های مختلف متفاوت خواهد بود. کمینه‌سازی انرژی سیستم و حالت زمینه ابرشاره گاز فرمی به ازای  $\mathbf{1} = 3$  در جای دیگر ارائه خواهد شد.

از آنجا که  $\text{Tr}A = 0$  و  $A$  یک ماتریس متقارن است،  $\gamma_{\mathbf{1}=2} \propto 2(\text{Tr}A^\dagger A)^2 + |\text{Tr}A|^2$  بنابراین حالت زمینه دارای یک تبهگنی کاتوره‌ای است؛ یعنی دو حالت  $\Delta(\hat{k}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)^2$  و  $\tilde{\Delta}(\hat{k}) \propto \left( \hat{k}_x^2 + e^{\frac{2\pi}{3}i} \hat{k}_y^2 + e^{\frac{4\pi}{3}i} \hat{k}_z^2 \right)$  را کمینه می‌کنند.

نتایج ذکر شده با روشی که در این مقاله بدان پرداخته شد با نتایج مقاله مرجع [۹] مشابه است.

بنابراین، برای یافتن حالت زمینه باید  $g$  را کمینه کرد. برای این کار، از نمایش دکارتی هماهنگهای کروی بهره می‌گیریم و  $\sum_m \alpha_m Y_{\mathbf{1}m}(\hat{k})$  را به این صورت می‌نویسیم:

$$\tilde{\Delta}(\hat{k}) = \sum_m \alpha_m Y_{2m}(\hat{k}) = \sum_{[i]} A_{i_1, i_2, \dots, i_l} \hat{k}_{i_1} \hat{k}_{i_2} \dots \hat{k}_{i_l}$$

به ازای  $\mathbf{1} = 2$  داریم:

$$\sum_m \alpha_m Y_{\mathbf{1}m}(\hat{k}) = \sum_{a,b=x,y} A_{a,b} \hat{k}_a \hat{k}_b$$

با محاسبات در بسط گاف انرژی به ازای  $\mathbf{1} = 3$  یک رابطه کلی برای  $C_{\mathbf{1}} \left( C_{\mathbf{1}}^2 = \sum_m |C_m|^2 \right)$  نیز می‌توان به دست آورد:

$$C_3 = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{(k_0 b)^3}{\sqrt{k_F}} \frac{1}{\sqrt{|r_3|}} E_F$$

که می‌توان رابطه کلیتری از سه مقدار  $\mathbf{1} (1, 2, 3)$  بدین شکل نوشت:

$$C_{\mathbf{1}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{(k_0 b)^{\mathbf{1}}}{\sqrt{k_F}} \frac{1}{\sqrt{|r_{\mathbf{1}}|}} E_F$$

همچنین انرژی سیستم و  $m$  نیز به ازای  $\mathbf{1}$  های مختلف به این صورت حاصل شد:

### مراجع

1. M W Zwierlein, C A Stan, C H Schunk, S M F Raupach, S Gupta, Z Hadzibabic and W K Kettle; *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 250401.
2. T Bourdel, J Cubizolles, L Khaykovich, K M F Magalhaes, S J J M F Kokkelmans, G V Shlyapnikov, and C Salomon; *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 020402.
3. C A Regal, M Griener, and D S Jin; *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 040403.
4. C J Pethic, H smith; *"Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases"*; Cambridge University Press (2002).
5. V P Mineev, K V Samokhin; *"Introduction to Unconventional Superconductivity"*; Gordon and Breach (1998).
6. P Nozieres and S Schmitt-Rink; *J. Low Temp. Phys.* **59** (1985) 195.
7. L D Landau and E M Lifshitz; *"Quantum Mechanics"*; Pergamon, Oxford (1994).
8. J J Sakurai; *"Modern Quantum Mechanics"*; Addison Wesley, Inc (1994).
9. T L Ho and R B Diener; *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 090402.
10. M E Gehm, S L Hammer, S R Granade, K M O'hara and J E Thomas, *Phys. Rev. A* **68** (2003) 011401.
11. P G De Gennes; *"Superconductivity of Metals and Alloys"* Faculte Des Sciences, Orsay, France, P. A. Pincus University of California (1966).
12. L Pitaevski and S Stringari; *"Bose-Einstein Condensation"*; Clarendon, Oxford (2003).
13. N D Mermin; *Phys. Rev. A* **9** (1974) 868.