

## پایداری حل‌های منفرد معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم

مریم مرادی<sup>۱</sup> و محمد مهدی گلشن<sup>۲</sup>

۱. دانشگاه آزاد اسلامی واحد سپیدان

۲. بخش فیزیک، دانشگاه شیراز، شیراز

(دریافت مقاله: ۸۴/۱۲/۲۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۶/۷)

### چکیده

در این مقاله به بررسی تحلیلی پایداری حل‌های منفرد معادلات جفت شده شرودینگر مرتبه پنجم حاکم بر انتشار تپ‌های الکترومغناطیسی در فیبرهای نوری غیر خطی پرداخته می‌شود. برای این منظور حل‌های منفرد چنین معادلاتی را ارائه کرده، فرض می‌کنیم به هر یک اختلالی به صورت  $(i=1,2) u_i \rightarrow u_i + \delta u_i$  وارد می‌شود. با استفاده از نظریه عملگرها نشان می‌دهیم که حل‌های منفرد معادلات مذکور تحت اختلالات وارد شده پایدار خواهند ماند. همچنین نشان خواهیم داد که تحت اختلالات ذکر شده اولین مرتبه وردش هامیلتونی دو میدان جفت شده صفر و دومین مرتبه وردش آن مثبت خواهد بود. از این دو نکته نتیجه می‌شود که، با وجود جفتیگی میدانها، حل‌های منفرد این معادلات تحت اثر اختلال وارده پایداری دارند.

واژه‌های کلیدی: اثرات غیر خطی، CQCNLSE، حل‌های منفرد، پایداری

### ۱. مقدمه

امروزه به خاطر کوچکی اندازه و ظرفیت بزرگ اطلاعاتی که یک کابل نوری (کابل نوری از تعداد زیادی فیبر نوری تشکیل شده است) دارد آن را برای سیستم‌های مخابراتی مناسب‌تر از کابل مسی کرده است [۱]. از این رو اثر خصوصیات ذاتی فیبر بر انتشار تپ‌های الکترومغناطیسی در آن، موضوع اصلی مطالعات زیادی بوده است [۲ و ۳]. یکی از این ویژگیها، اثرات غیر خطی است که با افزایش شدت تپ امکان بروز می‌یابند. اگر تپ تک مدی در فیبر انتشار یابد، معادله حاکم بر آن، تا مرتبه پنجم جملات غیر خطی، معادله غیر خطی مرتبه پنجم شرودینگر است که حل‌های منفرد و پایداری آنها موضوع مرجع [۴] است. از طرف دیگر، اگر تپ‌هایی از مدهای مختلف در فیبر

وجود داشته باشند، هر یک به علت مدولاسیون عرضی فاز [۵] بر انتشار دیگری اثر می‌گذارد و بر حسب آنکه چه مرتبه‌ای از اثرات غیر خطی منظور شود، به معادلات جفت شده غیر خطی مرتبه سوم یا پنجم شرودینگر اختصار (CCNLSE) و (CQCNLSE) دست خواهیم یافت. هدف اصلی این گزارش ارائه حل‌های منفرد معادلات جفت شده غیر خطی مرتبه پنجم و تحلیل پایداری آنها خواهد بود.

بررسی پایداری حل‌های منفرد معادلات غیر خطی مرتبه سوم (CNLSE) و (CCNLSE) تحت اختلالاتی به شکل  $\delta u(\zeta, T) = (a(T) + ib(T))e^{i\mu\zeta}$  به روش تحلیلی و عددی صورت گرفته است [۶ و ۷ و ۸]. هدف در این مقاله شرایط

۱. Cross Phase Modulation

۲. Cubic Coupled Nonlinear Schrödinger Equation

۳. Coupled Nonlinear Schrödinger Equation Cubic- Quintic

## ۲. معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم

در محیطهای غیر خطی در نتیجه موازنه بین دو اثر غیر خطی پراکندگی سرعت گروه و مدوله شدن خود به خودی فاز [۵] و [۱۰] تب نوری بدون تغییر شکل از درون محیط عبور می کند [۵]. وقتی دو موج اپتیکی یا بیشتر درون محیط انتشار می یابند، به واسطه اثر غیر خطی فیبر، بر روی هم اثر می گذارند. غیر خطی بودن فیبر با ایجاد پدیده‌ای به نام مدولاسیون عرضی فاز (یا به اختصار XPM) [۵] منجر به جفت شدن امواج درون فیبر می شود. اگر فرض کنیم که دو میدان الکتریکی عمود بر هم به صورت:

$$\vec{E}_1(z,t) = U(z,t)e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}, \quad (1)$$

$$\vec{E}_2(z,t) = V(z,t)e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}, \quad (2)$$

وارد محیطی غیر خطی شوند، معادله انتشار برای هر کدام از این مؤلفه‌ها به صورت زیر است [۱۱]

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k_{nli}\right) U(z,t) = 0. \quad (3)$$

در این رابطه اثرات غیر خطی تا مرتبه پنجم و ناشی از میدان کل،  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ ، بوده و به صورت زیر منظور می شود

$$k_{nli} = \left[ n_2 |\vec{E}|^2 + n_3 |\vec{E}|^4 \right] \frac{\omega}{c}. \quad (4)$$

اگر دامنه میدانهای  $\vec{E}_1$  و  $\vec{E}_2$  را بر حسب متغیرهای جدید  $u$  و  $v$ ، به صورت زیر تعریف کرده،

$$U(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u(z,t) + v(z,t)], \quad (5)$$

$$V(z,t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} [u(z,t) - v(z,t)], \quad (6)$$

همراه با رابطه (۴) در معادلات (۳) جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - in_2 \frac{\omega}{c} (|u|^2 + |v|^2)\right) \cdot \quad (7)$$

$$- in_3 \frac{\omega}{c} (|u|^2 + |v|^2)^2 (u+v) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - in_2 \frac{\omega}{c} (|u|^2 + |v|^2)\right) \cdot \quad (8)$$

$$- in_3 \frac{\omega}{c} (|u|^2 + |v|^2)^2 (u-v) = 0,$$

پایداری حلهای منفرد معادلات CQCNLSE بررسی می شود. برای این منظور پس از معرفی CQCNLSE، حلهای منفرد آن را به شکل عمومی  $u(\zeta, T) = u_s(T)e^{i\beta\zeta}$  و  $v(\zeta, T) = v_s(T)e^{i\beta\zeta}$  که در آنها  $\zeta$  و  $T$  به ترتیب مختصه معرف محور فیبر و مختصه زمانی است، ارائه نموده،  $u_s(T)$  و  $v_s(T)$  را تعیین می نمایم. شکل این حلهای و نیز نمودار تحولی آنها نشان می دهد که هر یک در حقیقت یک موج منفرد است.

برای بررسی پایداری جوابهای منفرد CQCNLSE، فرض می کنیم که جوابها دچار اختلالی به شکل  $u_s(T) \rightarrow u_s(T) + (a_1(T) + ib_1(T))e^{i\mu\zeta}$  و  $v_s(T) \rightarrow v_s(T) + (a_2(T) + ib_2(T))e^{i\mu\zeta}$  از نظریه عملگرها [۷ و ۹] نشان می دهیم که  $\mu$  برای CQCNLSE منفی بوده که در نتیجه عامل اختلال در راستای محور فیبر نوسانی و فاقد رشد می باشد. به عبارت دیگر جوابهای CQCNLSE تحت این قبیل اختلالات در امتداد محور فیبر پایدار می باشند. همچنین این اختلالات را در هامیلتونی CQCNLSE به کار می بریم و نشان می دهیم که وردش مرتبه اول هامیلتونی CQCNLSE تحت این قبیل اختلالات صفر و وردش مرتبه دوم آن مثبت است، که این نتیجه تأییدی بر پایداری حلهای تحت اختلالات مذکور می باشد.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. پس از مقدمه در بخش ۱، معادلات جفت شده غیر خطی مرتبه پنجم، برای دو مد از میدان (تب) الکترومغناطیسی را در بخش ۲ به دست آورده و حلهای تحلیلی آنها در بخش ۳ ارائه می نمایم. در بخش ۴ از نظریه عملگرها و تکنیکهای مکانیک کوانتومی بهره گرفته معیاری برای پایداری حلهای منفرد CQCNLSE ارائه می کنیم. در این بخش همچنین خواهیم دید که حلهای منفرد این معادلات معیار مذکور را ارضاء کرده، پس پایدارند. در بخش ۵ پایداری این حلهای با وردش هامیلتونی میدانهای جفت شده بررسی و تأیید می شود. بخش آخر به نتیجه گیری اختصاص خواهد داشت.

حل این معادلات به صورت،

$$\tilde{u}(\xi, T) = \tilde{v}(\xi, T) = \frac{c_1}{[c_1 \cosh(\gamma c_1 T) + 1]^{\frac{1}{2}}} e^{i\beta\xi}, \quad (13)$$

خواهد شد که در اینجا،  $\gamma\beta = c_1^2$  و  $\beta = c_1^2$  و  $c_1 = (1 + \frac{1}{3}\delta c_1^2)^{\frac{1}{2}}$  می‌باشند. به سهولت می‌توان نشان داد که اگر  $\tilde{u}(\xi, T)$  و  $\tilde{v}(\xi, T)$  جواب‌های CQCNLSE باشند، با تغییر  $T \rightarrow T - W\xi$  و  $\beta\xi \rightarrow \beta\xi + WT$  معادلات خواهیم داشت. یعنی،

$$u(\xi, T) = v(\xi, T) = \frac{c_1}{[c_1 \cosh(\gamma c_1 (T - W\xi)) + 1]^{\frac{1}{2}}} e^{i(\beta\xi + WT)}, \quad (14)$$

که در اینجا نیز  $\gamma\beta = c_1^2 + W^2$ ،  $c_1 = (1 + \frac{1}{3}\delta c_1^2)^{\frac{1}{2}}$  می‌باشند. در شکل‌های ۱ و ۲ نمودار معادله (۱۳) بر حسب  $\xi$  و  $T$  و به ازای  $\delta < 0$  و  $\delta > 0$  نمایش داده شده است. توجه می‌شود که تنها به ازای  $\delta < 0$  حل‌ها منفرد هستند.

#### ۴. معیار پایداری

معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم (CQCNLSE) در حالت کلی حل‌هایی به شکل  $\tilde{u}(\xi, T) = u_s(T)e^{i\beta\xi}$  و  $\tilde{v}(\xi, T) = v_s(T)e^{i\beta\xi}$  را می‌پذیرد، که در واقع  $u_s(T)$  و  $v_s(T)$  حل‌های معادلات با مشتقات معمولی زیر می‌باشند،

$$(-\beta + \frac{1}{\gamma} \frac{d^2}{dT^2} + (|u_s(T)|^2 + |v_s(T)|^2)) \quad (15)$$

$$+ \delta (|u_s(T)|^2 + |v_s(T)|^2) u_s(T) = 0,$$

$$(-\beta + \frac{1}{\gamma} \frac{d^2}{dT^2} + (|u_s(T)|^2 + |v_s(T)|^2)) \quad (16)$$

$$+ \delta (|u_s(T)|^2 + |v_s(T)|^2) v_s(T) = 0.$$

برای بررسی پایداری حل‌های فوق فرض می‌کنیم هر دامنه به صورت زیر مختل شده باشد،

$$u_s(T) \rightarrow u_s(T) + e^{\mu\xi} (a_1(T) + ib_1(T)) \quad (17)$$

$$v_s(T) \rightarrow v_s(T) + e^{\mu\xi} (a_2(T) + ib_2(T)) \quad (18)$$

دو معادله اخیر را با تعریف مناسبی از دامنه‌ها،  $\tilde{u} = \sqrt{\gamma_1 z_c} u$  و  $\tilde{v} = \sqrt{\gamma_2 z_c} v$ ، استفاده از متغیرهای بدون بعد و در مختصاتی که همراه تپ حرکت می‌کند، همراه با کمی عملیات جبری، به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم.

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial T^2} + (|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2) \tilde{u} + \delta (|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2)^2 \tilde{u} = 0, \quad (9)$$

$$i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial T^2} + (|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2) \tilde{v} + \delta (|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2)^2 \tilde{v} = 0. \quad (10)$$

که در آن  $\xi = \frac{z}{z_c}$  و  $z_c$  طول پاشندگی (طولی که در آن

پاشندگی اهمیت پیدا می‌کند) و  $T = \frac{1}{t} (t - \frac{z}{v_g})$  [۵ و ۱۲]

است، همچنین  $\xi$  معرف مختصه‌ای در امتداد محور فیبر،  $T$

معرف زمان،  $\gamma_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ ،  $\gamma_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$  و  $\delta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2 z_c}$  است.

معادلات (۹) و (۱۰) جفت‌دگی دامنه‌های میدان الکتریکی در فیبرهای نوری غیر خطی را نمایش می‌دهد. این معادلات را معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم یا به اختصار CQCNLSE، می‌نامیم. معادلات (۹) و (۱۰) در صورتی که  $\delta$  صفر باشد (به عبارت دیگر اثر غیر خطی مرتبه پنجم در نظر گرفته نشود) به معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه سوم، معادلات ماناکف [۵]، تقلیل پیدا خواهند کرد.

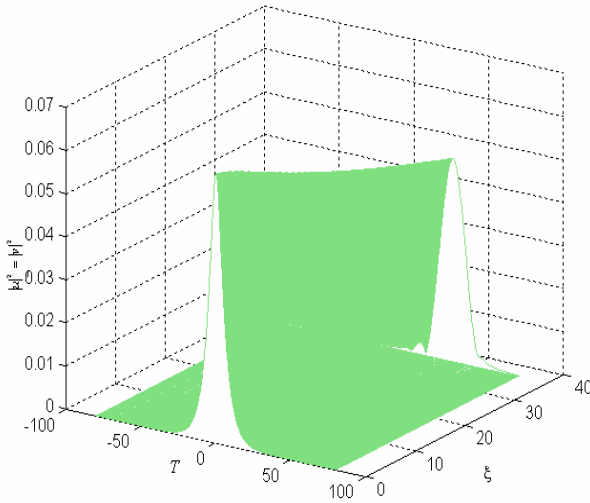
#### ۳. حل تحلیلی CQCNLSE

با توجه به شکل ظاهری معادلات (۹) و (۱۰) در می‌یابیم که این دو معادله کاملاً نسبت به  $\tilde{u}$  و  $\tilde{v}$  متقارن هستند. بنابراین جواب‌های بدیهی این معادلات جواب‌هایی به فرم  $\tilde{u} = \pm \tilde{v}$  می‌باشد.<sup>۱</sup> در این صورت دو معادله مذکور به صورت زیر در می‌آیند:

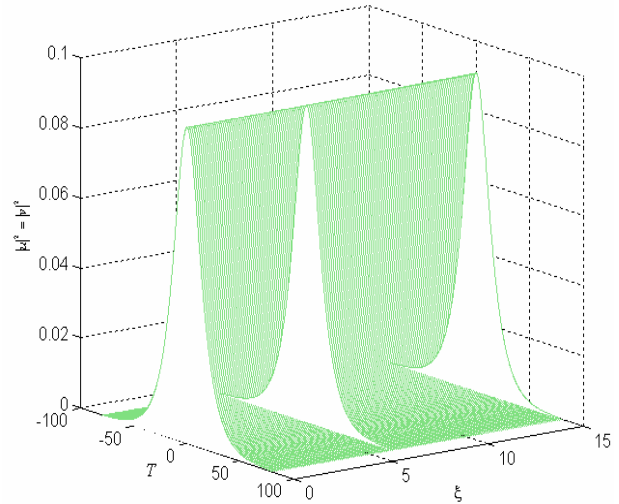
$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial T^2} + \gamma |\tilde{u}|^2 \tilde{u} + \delta |\tilde{u}|^4 \tilde{u} = 0, \quad (11)$$

$$i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial T^2} + \gamma |\tilde{v}|^2 \tilde{v} + \delta |\tilde{v}|^4 \tilde{v} = 0. \quad (12)$$

۱. در غیر این صورت برای  $\tilde{u} \neq \pm \tilde{v}$ ، CQCNLSE حل‌های تحلیلی نخواهد داشت [۸] و بایستی به روش‌های عددی متوسل شد.



شکل ۲. نمودار انتشار تپ الکترو مغناطیسی جفت شده در فیبر نوری غیر خطی مرتبه پنجم به ازای  $\delta > 0$ .



شکل ۱. نمودار انتشار تپهای الکترو مغناطیسی جفت شده در فیبر نوری غیر خطی مرتبه پنجم به ازای  $\delta < 0$ .

$$L_1 = \begin{bmatrix} -\beta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dT^2} + u_s^2 + v_s^2 & & & \\ + \delta u_s^2 + \delta v_s^2 + 2\delta u_s^2 v_s^2 & & & \\ & & -\beta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dT^2} + u_s^2 + v_s^2 & \\ & & + \delta u_s^2 + \delta v_s^2 + 2\delta u_s^2 v_s^2 & \end{bmatrix} \quad (22)$$

و

$$L_2 = \begin{bmatrix} -\beta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dT^2} + 2u_s^2 + v_s^2 & 2u_s v_s + 4\delta u_s^2 v_s^2 & & \\ + 5\delta u_s^2 + \delta v_s^2 + 6\delta u_s^2 v_s^2 & + 4\delta u_s v_s^2 & & \\ & & -\beta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dT^2} + u_s^2 & \\ 2u_s v_s + 4\delta u_s^2 v_s + 4\delta u_s v_s^2 & + 2v_s^2 + \delta u_s^2 + 5\delta v_s^2 & & \\ & + 6\delta u_s^2 v_s^2 & & \end{bmatrix} \quad (23)$$

اثر  $L_1$  روی معادله (۲۱) (از سمت چپ) و استفاده از رابطه (۱۹) نشان می‌دهد که قسمت حقیقی رابطه (۱۹) در معادله زیر صدق می‌کند،

$$L_1 L_2 A = -\mu^2 A. \quad (24)$$

با مشتق گیری از روابط (۱۵) و (۱۶) نسبت به  $T$  خواهیم

که در آن  $a_i e^{\mu \xi}$  و  $b_i e^{\mu \xi}$  ( $i=1,2$ ) حقیقتاً. برای سهولت در نوشتار و محاسبات، ماتریسهای دو مؤلفه‌ای زیر را تعریف می‌کنیم،

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = e^{\mu \xi} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\} \equiv e^{\mu \xi} (A + iB). \quad (19)$$

اگر معیار به کار برده شده برای بررسی پایداری معادله غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم [۴] را در اینجا به کار برده، با این تفاوت که عملگرها را به دلیل وجود دو دامنه میدان، به صورت عملگرهای ماتریسی در نظر بگیریم، علامت  $\mu^2$  تعیین کننده رفتار جوابهای منفرد CQCNLSE خواهد بود. بنابراین در ادامه بحث به تعیین علامت  $\mu^2$  خواهیم پرداخت. با جایگذاری جوابهای اختلال یافته در CQCNLSE و فرض آنکه اختلال به قدری کوچک است که می‌توان از توانهای مرتبه دوم و بالاتر آن صرف نظر کرد، خواهیم داشت:

$$L_2 B = -\mu A, \quad (20)$$

$$L_1 A = \mu B. \quad (21)$$

عملگرهای ماتریسی در معادلات فوق عبارت خواهند بود از:

داشت،

$$\mathbf{L}_1 \frac{d\mathbf{S}}{dT} = \mathbf{0}, \quad (25)$$

که در آن،  $\mathbf{S}^T = [u_s^*(T), v_s^*(T)]$  یک ماتریس دو مؤلفه‌ای است. همچنین اگر  $\mathbf{L}$  را روی  $\mathbf{S}$  اثر داده، خواهیم داشت:

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (26)$$

پس  $\frac{d\mathbf{S}}{dT}$  و  $\mathbf{S}$  به ترتیب ویژه ماتریسهای  $\mathbf{L}_1$  و  $\mathbf{L}$  با ویژه مقادیر صفر خواهند بود. از دیگر خواص ویژه ماتریس  $\mathbf{S}$  این است که بر  $\mathbf{A}$  عمود می‌باشد و این خاصیت را می‌توان با استفاده از رابطه (۲۰) و این خاصیت که  $\mathbf{L}$  هرمیتی است، مشاهده نمود.

$$\mu \langle \mathbf{A} | \mathbf{S} \rangle = -\langle \mathbf{B} | \mathbf{L}_1^\dagger | \mathbf{S} \rangle = -\langle \mathbf{B} | \mathbf{L} | \mathbf{S} \rangle = \mathbf{0}. \quad (27)$$

(توجه داشته باشید که در نماد گذاریها، هر کت به معنای ماتریس ستونی دو مؤلفه‌ای و هر برا به معنای ماتریس سطری دو مؤلفه‌ای با اعضایی که مزدوج مختلط شده‌اند (مزدوج هرمیتی ماتریسهای ستونی) خواهد بود). بنابراین به ازای  $\mu \neq 0$ ، حل‌های رابطه (۲۴) بر  $\mathbf{S}$  عمود می‌باشند. از آنجا که ما به دنبال حل‌هایی با  $\mu \neq 0$  می‌باشیم کافی است که رابطه ویژه مقادیری (۲۴) را در زیر فضایی عمود بر ویژه ماتریس  $\mathbf{S}$  حل کنیم که در این فضا عملگر  $\mathbf{L}^{-1}$  تعریف شده است. بنابراین از رابطه (۲۴) نتیجه می‌شود،

$$\mu^\dagger = \frac{\langle \mathbf{A} | \mathbf{L}_1 | \mathbf{A} \rangle}{-\langle \mathbf{A} | \mathbf{L}_1^{-1} | \mathbf{A} \rangle}. \quad (28)$$

از آنجا که ویژه مقادیر  $\mathbf{L}_1^{-1}$  منفی‌اند (به پیوست مراجعه شود) علامت  $\mu^\dagger$  همان علامت صورت کسر در معادله (۲۸) خواهد بود. بنابراین علامت  $\mathbf{G} = \max \langle \mathbf{A} | \mathbf{L}_1 | \mathbf{A} \rangle$  تعیین کننده علامت  $\mu^\dagger$  خواهد بود. اکنون اگر بیشینه صورت کسر منفی باشد، آنگاه کل کسر و در نتیجه  $\mu^\dagger$  منفی بوده و اختلال مورد بحث نوسانی خواهد بود. علامت بیشینه عبارت  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{L}_1 | \mathbf{A} \rangle$  علامت  $\lambda$  در رابطه،

$$\mathbf{L}_1 | \mathbf{A} \rangle = \lambda | \mathbf{A} \rangle + q | \mathbf{S} \rangle, \quad (29)$$

خواهد بود [۱۱] که  $\lambda$  و  $q$  ضرایب نامعین لاگرانژ هستند [۹].

با توجه به آنکه  $\mathbf{L}_1$ ، عملگری هرمیتی است، ویژه حالت‌های آن  $(\mathbf{L}_1 | \mathbf{F}_m \rangle = \lambda_m | \mathbf{F}_m \rangle)$  مجموعه کاملی را تشکیل می‌دهند.

بنابراین با استفاده از بسط‌های  $|\mathbf{A}\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} A_m | \mathbf{F}_m \rangle$  و

$$|\mathbf{S}\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m | \mathbf{F}_m \rangle$$

شرط تعامد  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{S} \rangle = 0$  خواهیم داشت:

$$\sum_m \frac{|c_m|^2}{\lambda_m - \lambda} \equiv g(\lambda) = 0. \quad (30)$$

رابطه (۳۰) بیانگر این واقعیت است که بزرگترین مقدار  $\lambda_{\max}$  بایستی بین دو ویژه مقدار بزرگتر  $\mathbf{L}_1$  واقع شود (در غیر این صورت جملات معادله (۳۰) هم علامت بوده جمع جبری آنها صفر نخواهد شد). با توجه به اینکه عملگر ماتریسی  $\mathbf{L}_1$  دارای سه ویژه مقدار  $-\beta$  و  $0$  و  $3\beta$  می‌باشد (به پیوست مراجعه شود) که ویژه مقدار صفر در رابطه (۳۰) ظاهر نمی‌شود [۱۱].  $\lambda_{\max}$  باید بین دو ویژه مقدار  $-\beta$  و  $3\beta$  قرار گیرد. برای تعیین علامت  $\lambda_{\max}$ ، اگر  $g(0) > 0$  باشد،  $\lambda_{\max} < 0$  است و در نتیجه  $\mu^\dagger$  منفی و حل‌ها پایداری ندارند و بالعکس. از طرفی،

$$g(0) = \langle \mathbf{S} | \mathbf{L}_1^{-1} | \mathbf{S} \rangle = \left\langle \mathbf{S} \left| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \beta} \right. \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{dP}{d\beta}, \quad (31)$$

که در این رابطه  $P = \int_{-\infty}^{\infty} (|u_s|^2 + |v_s|^2) dT$  معرف توان دو تپ

الکترومغناطیسی است [۷ و ۸]. با توجه به این مطلب که جوابهای CQCNLSE در حالتی که  $u_s = \pm v_s$  باشد را به دست

آورده‌ایم، برای این حالت متقارن  $P = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |u_s|^2 dT$  و با استفاده

از قسمت مستقل از  $\xi$  رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$\frac{dP}{d\beta} = \frac{-1}{(\beta)^2} - \frac{1}{3} \delta c_1^2. \quad (32)$$

با توجه به رابطه (۳۲) در صورتی که  $\delta < 0$  باشد (جوابهای

منفرد معادلات CQCNLSE)،  $\frac{dP}{d\beta} > 0$  و در نتیجه  $\lambda_{\max} < 0$

است و این بدان مفهوم می‌باشد که اختلال وارد شده بر حل‌های

CQCMLS، نوسانی بوده و رشد ندارد و در نتیجه حلهای مذکور پایدار خواهند بود.

### ۵. وردش هامیلتونی

امروزه استفاده از هامیلتونی در بررسی پایداری حلهای معادلات دیفرانسیل، خطی و غیر خطی، روشی بسیار کار آمد تلقی می شود [۱۳]. در اینجا نیز از وردش هامیلتونی معادله مذکور استفاده می کنیم.

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [(|u_T|^2 + |v_T|^2) - (|u|^4 + |v|^4) - \frac{2}{3} \delta (|u|^6 + |v|^6)] dT \quad (33)$$

می توان نشان داد که با استفاده از این هامیلتونی در قلابهای پواسون، به معادلات جفت شده غیرخطی شرودینگر خواهیم رسید [۱۱].

هامیلتونی معادلات (۱۵) و (۱۶) را نیز به صورت زیر می توان نوشت،

$$H_N = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [(|u_{sT}|^2 + |v_{sT}|^2) - (|u_s|^4 + |v_s|^4) - \frac{2}{3} \delta (|u_s|^6 + |v_s|^6)] dT + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} (|u_s|^2 + |v_s|^2) dT \quad (34)$$

اگر وردش مرتبه اول و مرتبه دوم  $H_N$  را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\delta H_N = 0, \quad (35)$$

$$\delta^2 H_N = -\langle \mathbf{B} | \mathbf{L}_1 | \mathbf{B} \rangle - \langle \mathbf{A} | \mathbf{L}_1 | \mathbf{A} \rangle, \quad (36)$$

که از جایگذاری  $u_s \rightarrow u_s + \delta u$  و  $v_s \rightarrow v_s + \delta v$  در رابطه (۳۴) به دست آمده است. با توجه به اینکه عملگر  $\mathbf{L}_1$  دارای ویژه مقادیر منفی است، جمله اول سمت راست رابطه (۳۶) مثبت است، از طرفی جمله دوم سمت راست این رابطه نیز صورت کسر رابطه (۲۸) است و در صورتی که جواب منفرد داشته باشیم این جمله نیز مثبت خواهد بود و در نتیجه  $\delta^2 H_N$  مثبت خواهد بود. در نتیجه این اختلالات باعث کمینه شدن  $H_N$  می شود. پس تحت اختلالات مطرح شده، جوابهای منفرد CQCMLS پایدار هستند.

### ۶. نتیجه گیری

در این مقاله معیار پایداری را برای معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم به دست آورده ایم. معادلات حاکم بر انتشار امواج در محیطهای دی الکتریک (فیبر نوری) که در آن بیش از یک مد وجود دارد (به دلیل وجود خاصیت شکست دو گانه محیطها و یا به خاطر وجود دو موج قطبیده عمود بر هم) معادلات جفت شده غیر خطی مرتبه پنجم (CQCNLSE) می باشد. این معادلات در حالت خاصی که دامنه های میدان در دو راستای عمود بر هم مساویند، دارای حل منفرد است که پایداری این حلها را به همان روشی که برای CQCNLSE به کار برده ایم [۴] بررسی و مشاهده شد که این حلها نیز پایدارند. به عنوان تأییدی بر نتایج به دست آمده، هامیلتونی CQCNLSE را نوشته و وردش مرتبه اول و دوم آن را تحت اختلالاتی که بر جوابها وارد شده بود، محاسبه کرده و مشاهده نمودیم که وردش مرتبه اول صفر و وردش مرتبه دوم آن مثبت است، در نتیجه حلهای اختلال یافته پایدار خواهند ماند.

### پیوست الف

#### محاسبه ویژه مقادیرهای اپراتور ماتریسی $\mathbf{L}_1$ و $\mathbf{L}_2$

در این پیوست به طور خلاصه، محاسبه ویژه مقادیر عملگر ماتریسی  $\mathbf{L}_1$  ارائه می شود. برای این منظور ابتدا  $\mathbf{L}_1$  را قطری و از آن، مطابق روشهای استاندارد، ماتریس تبدیل،  $\mathbf{R}$ ، به صورت زیر به دست می آید.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱})$$

در این صورت شکل قطری  $\mathbf{L}_1$ ، از تبدیل  $\mathbf{R}^T \mathbf{L}_1 \mathbf{R}$ ، برابر خواهد شد با،

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & L_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dT^2} + 2u_s^2 + 4\delta u_s^4 & 0 \\ 0 & -\beta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dT^2} + 6u_s^2 + 2\delta u_s^4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۲})$$

حال بایستی ویژه مقادیر دو عملگر  $L_{11}$  و  $L_{12}$ ،

$$\begin{cases} m=1 \\ n=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \lambda=0 \quad (\text{الف-۶})$$

$$\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda=3\beta \quad (\text{الف-۷})$$

هر چند که برای  $n$  های منفی نیز معادله ویژه مقادیری حل می شود ولی با توجه به حلهای منفرد CQCNLSE چنین حلهایی مناسب نخواهد بود) و نیز از معادله چهارم به وابستگی  $D$  بر حسب ثابتهای  $\delta$  و  $c_1 (= \sqrt{2\beta})$  پی خواهیم برد. به

عنوان مثال به ازای  $n = \frac{3}{2}$  به عبارت  $D = c_1 = (1 + \frac{1}{3} \delta c_1^2)^{\frac{1}{2}}$  خواهیم رسید که نتیجه موافق با رابطه (۲۵) است. بدین ترتیب ویژه مقادیر  $L_{22}$  برابر با صفر و  $3\beta$  می باشد. حال ویژه مقادیر عملگر  $L_{11}$  را نیز به همین روش به دست آورده و در مجموع عملگر ماتریسی  $L_1$  دارای سه ویژه مقدار  $-\beta$  و  $0$  و  $3\beta$  خواهد بود.

به همان روشی که ویژه مقادیر  $L_1$  را پیدا کردیم، عمل کرده و ویژه مقادیر عملگر  $L_2$  را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} m=0 \\ n=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lambda=0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-\beta \quad (\text{الف-۸})$$

8. Y Chen and J Atai, *Opt. Commun.* **150** (1998) 381-389.
9. E A Kuznetsov, A M Rubenchik and V E Zakharov, *Phys. Rep.* **142**, 3 (1986) 103-165.
10. A Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer verlag, Berlin (1989).
۱۱. م. مرادی، "بررسی پایداری حلهای منفرد معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم"، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه الزهرا (س)، شهریور ۱۳۸۱.
12. A Hasegawa, *Solitons in Optical Communication*, Clarendon Press (1995).
13. J M Arnold, *Phys. Rev. E.* **60**, 1 (1999) 979.

$$L_{ii}\psi_i = \lambda_i\psi_i \quad i=1,2 \quad (\text{الف-۳})$$

را به دست آوریم. برای سهولت، محاسبه ویژه مقادیر  $L_{22}$  را با جزئیات بیشتری ارائه خواهیم نمود. با توجه به شکل  $u_s(T)$  در رابطه (۱۳) (که حلی منفرد است)، فرض می کنیم که ویژه توابع  $L_{22}$  به صورت عمومی،

$$\psi = \frac{\sinh^m(\alpha c_1 T)}{(1 + D \cosh(\alpha c_1 T))^n} \quad n, m \geq 0 \quad (\text{الف-۴})$$

باشد. پس از جایگذاری معادله (الف-۴) در رابطه (الف-۳) و استفاده از استقلال خطی  $\sinh$  و  $\cosh$  به چهار معادله زیر می رسیم،

$$\begin{cases} \left[ \frac{m}{2} + \frac{m}{2}(m-1) - \frac{mn}{2} - \frac{n}{2}(m+1) + \frac{n}{2}(n+1) \right] (\alpha c_1)^2 - \beta = \lambda \\ \frac{m}{2}(m-1) = 0 \\ \frac{mn}{2} + \frac{n}{2}(m+1) - n(n+1) + \frac{3}{2} = 0 \\ \frac{n}{2}(n+1)D^2 - \frac{n}{2}(n+1) - 5\delta c_1^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{الف-۵})$$

از حل سه معادله اول (با توجه به  $c_1^2 = 2\beta$ )، دو دسته جواب نتیجه خواهد شد،

## مراجع

1. J C Palais, *Fiber Optics Communications*, 2nd ed., Englewood Chiffs, N. J., Prentice- Hall (1988).
2. N S Kapany, *Fiber Optics: Principles and Applications*, Academic, NewYork (1967).
3. N S Kapany, *J. Opt. Soc. Am.* **49** (1959) 779.
۴. م م گلشن و م مرادی "پایداری حلهای منفرد معادله غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم"، مجله پژوهش فیزیک **۴**، ۱ (۱۳۸۲).
5. G P Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press (1995).
6. D J Mitchell and A W Snyder, *J. Opt. Soc. Am. B* **10** (1993) 1572.
7. Y Chen, *Phys. Rev. E* **57**, 3 (1998) 3542.