

## شناسایی ترازهای آشوبی بیلارد استادیوم بر حسب شعاع گردش

مهدی بارزی، حمید مصدق و بهروز میرزا

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۴/۱۱/۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۶/۱۴)

### چکیده

امروزه مطالعه آشوب در بیلاردهای کوانتومی به علت ارتباط با تکنولوژی نانو مورد توجه زیادی قرار گرفته است. در این مقاله توزیع نقاط برخورد صفرهای تابع موج با مرز برای دو بیلارد به شکل دایره و استادیوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس با محاسبه شعاع گردش برای این نقاط به صورت کمی حالات آشوبی و غیرآشوبی بر حسب ترازهای انرژی متمایز می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: آشوب، شعاع گردش

### ۱. مقدمه

در مکانیک کلاسیک می‌توان با حل معادلات حرکت مسیر تحول دستگاه را در فضای فاز تعیین کرد. این دستگاهها با نامهای انتگرال پذیر، عادی و غیر آشوبی نیز معرفی می‌شوند. حل تحلیلی برای تمام دستگاههای کلاسیک وجود ندارد و معادله حرکت آنها با استفاده از روشهای عددی حل می‌شود. در این موارد رفتار دستگاه در فضای مکان و تکانه وابستگی شدیدی به شرایط اولیه دارد به طوری که در مدت زمان نسبتاً طولانی برخلاف دستگاههای عادی که قسمت کمی از فضای فاز را اشغال می‌کنند این دستگاهها به اکثر نقاط فضای فاز سرکشی می‌کنند و مسیرهای آنها به صورت نمایی از هم فاصله می‌گیرند. توصیف کمی این نوع رفتار توسط ابزارهایی هم چون نمای لیاپانوف<sup>۱</sup> [۱]، سطح مقطع پوانکاره<sup>۲</sup> [۲]، آنترپوی

متریک<sup>۳</sup> و توپولوژیک<sup>۴</sup> [۳] و بالاخره آنترپوی سینایی کلموگروف<sup>۵</sup> [۴] انجام می‌شود. از آنجایی که تعریف دقیق، جامع و مورد قبول همه از آشوب کوانتومی موجود نیست، بررسی کوانتومی دستگاههایی که از نظر مکانیک کلاسیک آشوبی هستند به عنوان آشوب کوانتومی معرفی می‌شود. بیلاردها مثالهای ساده‌ای هستند که به صورت کلاسیکی و کوانتومی مورد بررسی قرار می‌گیرند و الگوی مناسبی برای دستگاههای فیزیکی نیز می‌باشند. حرکت آزاد ذره‌ای درون یک فضای بسته با دیوارهای غیر قابل نفوذ به عنوان بیلارد معرفی می‌شود. غالباً منظور از دستگاه بیلارد حرکت آزاد جسمی در دو بعد با سطح صاف و با مرز بسته و غیر قابل نفوذ است. اگر مرز بیلارد دارای تقارن لازم برای جداسازی و حل معادله دیفرانسیل حرکت باشد حرکت ذره

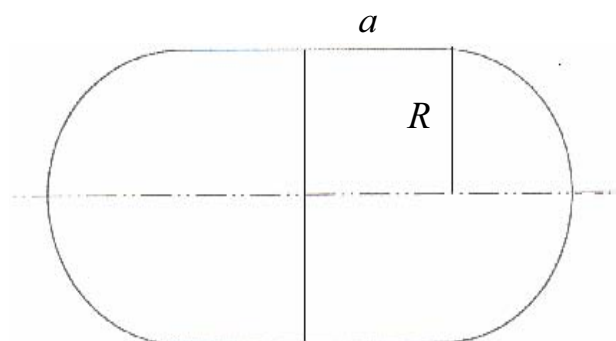
۳. The metric entropy

۴. The topological entropy

۵. Sinai, Kolmogorov

۱. Lyapounof exponent

۲. Poincare's surface section



شکل ۱. بیلارد استادیوم. شعاع و نصف طول پاره خط اتصال دهنده دو دایره نشان داده شده‌اند.

## ۲. آشوب در سیستمهای کوانتومی

چگونگی ظهور آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی موضوع تحقیقاتی جدیدی است که از عمر آن بیش از سه دهه نمی‌گذرد. در مکانیک کوانتومی به خاطر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ مفهوم مسیر در فضای فاز از بین می‌رود و بنابراین در مکانیک کوانتومی نمی‌توان آشوب را به صورت حساسیت نمایی مسیر در فضای فاز به شرایط اولیه تعریف کرد. برای بررسی آشوب در مکانیک کوانتومی توابع موج و ترازهای انرژی دستگاههای کوانتومی که در حد کلاسیک آشوبی هستند به دست می‌آیند و با توابع موج و ترازهای دستگاههایی که در حد کلاسیک غیرآشوبی هستند مقایسه می‌شوند. به علت اینکه برای به دست آوردن توابع موج و ترازهای انرژی در سیستمهای آشوبی نمی‌توان از حل تحلیلی معادله شرودینگر استفاده کرد، بنابراین این معادله به صورت عددی حل شده و جوابهای آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

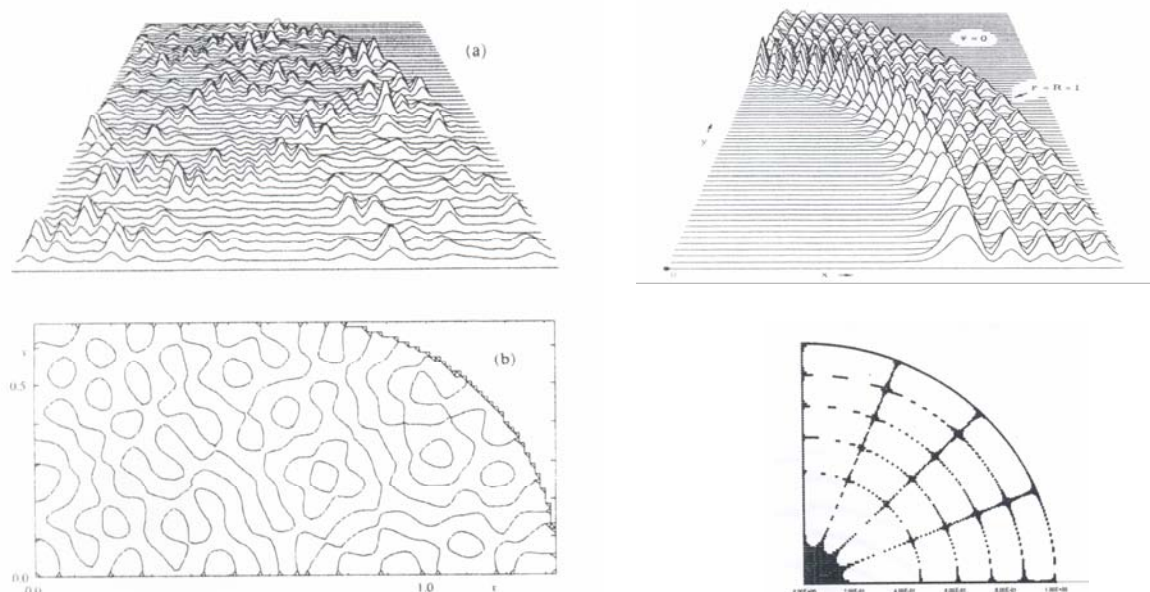
در دستگاههای غیر آشوبی توزیع تابع موج در بیلارد کاملاً منظم است و به خاطر اینکه معادله شرودینگر در این دستگاهها با جداسازی حل می‌شود منحنی صفرهای تابع موج همدیگر را قطع می‌کنند. اما در دستگاههای آشوبی هم شکل تابع موج نامنظم است و هم منحنی صفرهای تابع موج همدیگر را قطع نمی‌کنند. این منحنیها یا سطوح بسته‌ای داخل بیلارد تشکیل می‌دهند یا از روی مرز شروع شده و به مرز نیز ختم می‌شوند [۷] (شکل ۲).

داخل بیلارد قابل پیش بینی است، در غیر این صورت معادله به صورت تحلیلی قابل حل نمی‌باشد و بیلارد آشوبی است. بنابراین در بیلاردها عامل رفتار آشوبی رفتار نامنظم مرز این نوع سیستمها است. مرزهای مثلثهای متساوی الاضلاع، قائم الزاویه، با زاویه‌های ۳۰، ۶۰ و ۴۵ درجه، مربع، مستطیل، چند وجهیهای منظم، دایره و بیضی، بیلاردهای غیر آشوبی هستند. بیلاردهایی با مرزهای نامنظم بیلاردهای آشوبی هستند. مکان هندسی نقاطی از صفحه محدود به دو نیم دایره با شعاع مساوی که لبه‌های آن با دو پاره خط موازی به هم وصل شده باشد بیلاردی تشکیل می‌دهد که چون آشوبی بودن آن برای اولین بار توسط بونیموویچ<sup>۱</sup> اثبات شد آن را بیلارد بونیموویچ گویند. شکل این بیلارد شبیه مرز حاشیه زمین فوتبال است به همین دلیل این نوع بیلارد به استادیوم نیز معروف است (شکل ۱).

نسبت نصف طول پاره خط اتصال دهنده دو نیم دایره (a) به شعاع دایره، پارامتر دگرذیسی ( $\eta$ ) نامیده می‌شود. میزان آشوب در استادیوم به تغییر این پارامتر وابسته است. بیلارد استادیومی با  $\eta = 1$  استادیوم استاندارد نامیده می‌شود. چگونگی رفتار ذره در داخل بیلاردی در ابعاد کوانتومی به خاطر شباهتی که این دستگاهها به قطعات گوناگونی که در زمینه‌های مختلف تکنولوژی نانو کاربرد دارند بسیار مورد توجه قرار گرفته است. [۵ و ۶] اما به علت تعریفی که از آشوب بر حسب مسیر در فضای فاز شده است می‌توان گفت که آشوب یک مفهوم کلاسیکی است و مسئله آشوب در مکانیک کوانتومی هنوز به درستی شناخته شده نیست.

در این مقاله، ابتدا در بخش ۲ با آشوب کوانتومی آشنا می‌شویم و سپس در بخش ۳ روش عددی که با استفاده از آن ترازها و توابع موج بیلارد کوانتومی مورد نظر را به دست آورده‌ایم توضیح می‌دهیم. در بخش ۴ به بررسی حالت‌های منظم در سیستمهای کوانتومی آشوبی می‌پردازیم و در انتها در بخش ۵ معیاری را برای تعیین این حالات منظم ارائه می‌دهیم.

۱. Bunimovich



شکل ۲. تابع موج و منحنی صفرهای تابع موج. راست: بیلارد غیر آشوبی دایره، چپ: بیلارد آشوبی استادیوم.

که اصول کلی همه این روشها تقریباً یکسان است اما دقت و سرعت انجام محاسبات در هر یک از این روشها با هم فرق دارند. ما برای به دست آوردن توابع موج استادیوم در انرژیهای مختلف از روشی استفاده کرده‌ایم که در سال ۱۹۹۵ توسط ورجینی و ساراسنو<sup>۳</sup> ابداع شد [۱۲] و بارنت<sup>۴</sup> آن را بهینه کرده و با استفاده از آن برنامه‌ای تحت عنوان ورجینی نوشت که در حال حاضر برای تعیین توابع موج و ترازهای بیلاردهای کوانتومی مختلف مورد استفاده گروههای تحقیقاتی زیادی است [۱۳].

این روش سریعترین روشی است که تاکنون شناخته شده است و می‌تواند ترازهای انرژی حتی در ترازهای بالا را با دقت قابل قبولی محاسبه کند. همچنین در این روش با مشکل گم شدن ترازها که یکی از اشکالات اساسی روشهای قبلی است مواجه نخواهیم شد [۱۴].

برنامه ورجینی که برای محاسبه توابع موج و ترازهای انرژی مورد استفاده قرار گرفته است یک بسته نرم افزاری است که تحت سیستم عامل لینوکس اجرا می‌شود. این برنامه به زبان

توزیع آماری جدایی ترازهای انرژی در دستگاههای کوانتومی یکی دیگر از ابزارهای مفید در مطالعه آشوبی این دستگاهها است. در دستگاههای غیر آشوبی این توزیع آماری تقریباً یک توزیع نمایی است و هم چنین فاصله کوچک بین ترازها محتمل تر است در عین اینکه فواصل بزرگ هم دیده می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که در این دستگاهها ترازهای انرژی تمایل به جذب یکدیگر دارند. اما این بررسی در مورد دستگاههای آشوبی نتیجه کاملاً متفاوتی دربردارد در این دستگاهها فاصله‌های بزرگ با احتمال بیشتری ظاهر می‌شود و ترازهای انرژی از یکدیگر دور می‌شوند [۸ و ۹] (شکل ۳).

### ۳. روش عددی

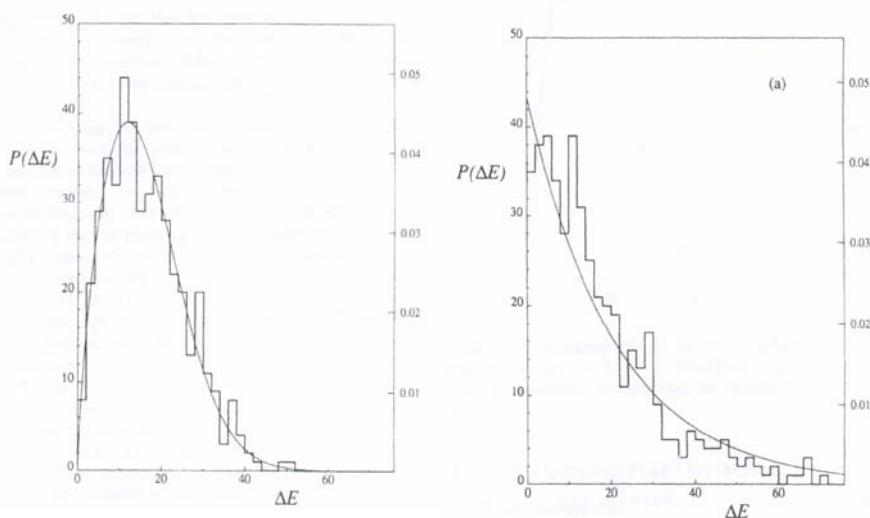
معادله شرودینگر برای یک ذره آزاد در داخل یک چاه پتانسیل بی‌نهایت به معادله هلمهولتز تبدیل می‌شود. به دلیل اهمیت تعیین خواص کوانتومی دستگاههای آشوبی روشهای مختلفی برای حل عددی معادله هلمهولتز پیشنهاد شده است مانند روش ترکیب امواج تخت<sup>۱</sup> [۱۰] و روش انتگرال مرزی<sup>۲</sup> [۱۱]. با این

۳. E. Vergini, M. Saraceno

۴. A. Barnett

۱. Plane wave decomposition method

۲. Boundary integral method



شکل ۳. (سمت راست) توزیع جدایی ترازهای انرژی برای بیلیارد کوانتومی به شکل دایره که نشان دهنده یک توزیع پواسون است. (سمت چپ) توزیع جدایی ترازهای انرژی برای بیلیارد کوانتومی استادیوم که دارای توزیع گوسی است.

تغییر این زاویه مسیر حرکت ذره منظم و یا غیر منظم می‌شود. در حل معادله شرودینگر برای دستگاه کوانتومی آشوبی به مواردی برخورد می‌کنیم که توزیع توابع موج آنها برخلاف انتظاری که از شکل تابع موج در دستگاههای آشوبی داریم یک توزیع تصادفی نیست. این ویژه حالات را که تابع موج آنها در راستای مدارهای کلاسیکی دوره‌ای چگالیده شده است، حالت‌های زخم‌دار<sup>۱</sup> نامیده‌اند [۱۵]. البته باید به این نکته توجه داشت که یک تناظر یک به یک بین توابع موج و مسیرهای کلاسیکی دوره‌ای وجود ندارد و ممکن است یک شکل در چندین تابع موج تکرار شود و یا در زخم‌های یک تابع موج چند مدار دوره‌ای با هم دیده شود [۱۶] (شکل ۴).

اگر طیف فاصله ترازهایی که تابع موج آنها به صورت توابع موج زخم‌دار شده است مورد بررسی قرار گیرد مشاهده می‌شود که دارای توزیع دستگاههای غیرآشوبی است. بنابراین در مطالعه کوانتومی بعضی دستگاههای آشوبی نیز انتخاب مناسب انرژی منجر به حالات منظم می‌شود. اما همان طور که از دستگاههای آشوبی انتظار داریم این حالت، ناپایدار است و با تغییر انرژی از بین می‌رود.

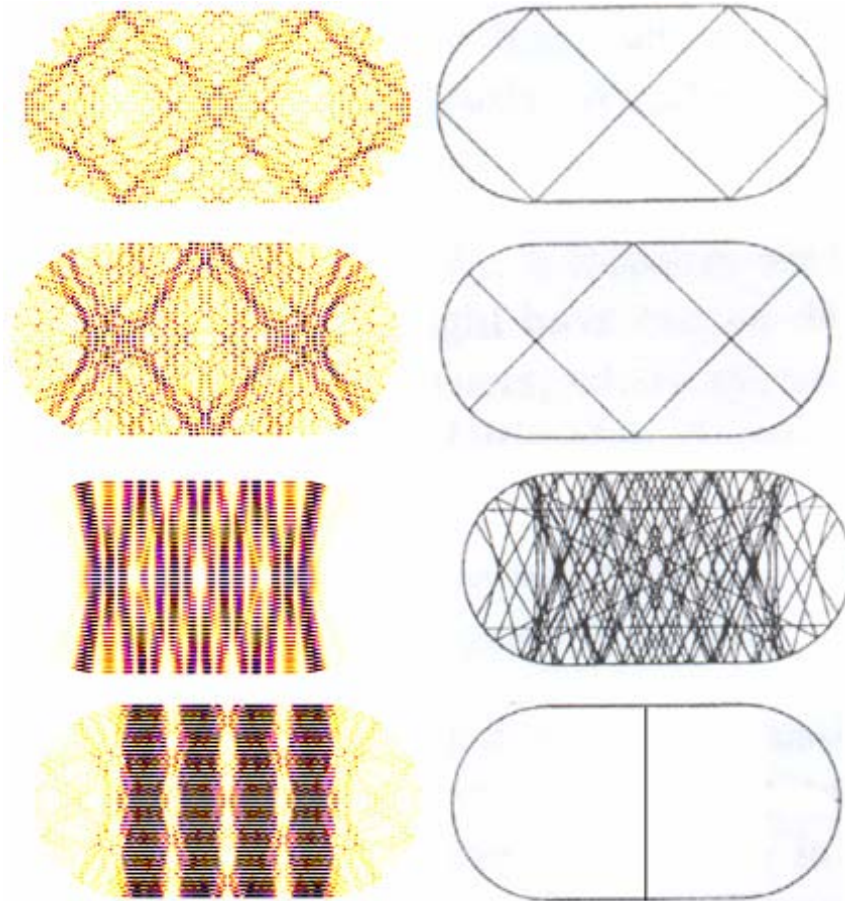
برنامه نویسی C++ نوشته شده است و از بسته LAPACK برای محاسبات ماتریسی استفاده می‌کند. ما این برنامه را روی رایانه‌ای با مشخصات (CPU: Intel Pentium, 4 ۱/۶GHz, RAM: ۵۱۲ MB) اجرا کرده‌ایم. هرچه انرژی تراز بیشتر باشد مدت زمان انجام محاسبات به علت افزایش ابعاد مسئله افزایش می‌یابد که این زمان از چند ثانیه تا چند ساعت متغیر است. زمان لازم برای محاسبه تابع موج به بزرگنمایی (تعداد نقاطی که تابع موج باید در آنجا محاسبه شود) که از برنامه خواسته‌ایم بستگی دارد.

#### ۴. ظهور حالات منظم در دستگاههای کوانتومی آشوبی

همان طور که در بخش قبل ذکر شد مرز بیلیارد مشخص کننده میزان آشوبی بودن دستگاه است. به عبارت دیگر اگر مرز منظم باشد دستگاه غیر آشوبی است و اگر مرز نا منظم باشد دستگاه آشوبی است.

اما حالتی را نیز می‌توان تصور کرد که مرز دستگاه به طور کامل تقارن خود را از دست نداده است و بنابراین با توجه به شرایط اولیه خصوصیات دستگاه از نظر آشوبی و یا غیر آشوبی تغییر می‌کند. به عنوان مثال مسیر پراکندگی در داخل بیلیاردی به شکل استادیوم وابستگی شدیدی به زاویه اولیه دارد و با

۵. Scar states



شکل ۴. تابع موجهای بیلبارد کوانتومی به شکل استادیوم که توزیع تابع موج در آنها در راستای مسیرهای کلاسیکی دوره‌ای چگالیده شده است و مسیرهای کلاسیکی دوره‌ای ذره معادل با این تابع موجها.

کسر به منظور حذف محاسبه مجدد یک فاصله قرار داده شده است) [۱۷].

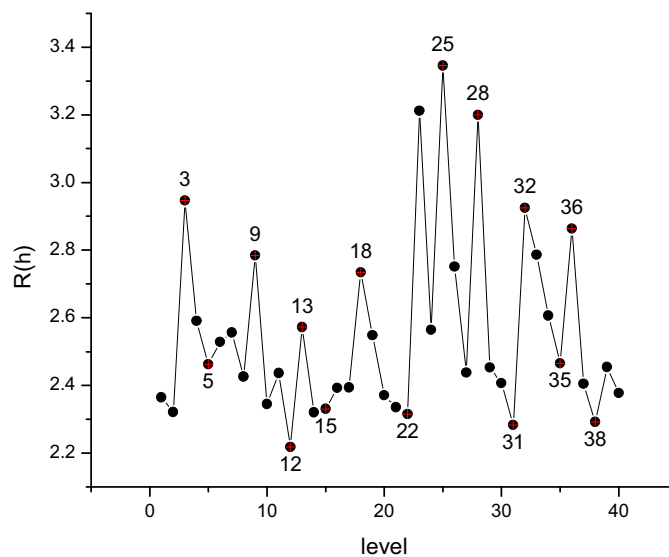
در بیلبارد منظم دایره‌ای به علت این که فاصله نقاط مختلف مرز تا مرکز بیلبارد یکسان است محاسبه شعاع گردش برای هر تعداد از نقاط با توزیعی منظم بر روی مرز، عددی ثابت به دست می‌آید که همان شعاع دایره است. در بیلباردهای آشوبی به دلیل شکل مرز، فاصله نقاط مختلف روی مرز تا مرکز یکسان نیست، بنابراین محاسبه شعاع گردش برای توزیعهای مختلف از این نقاط منجر به اعداد مختلفی می‌شود، از این رو می‌توان پیش بینی کرد تغییرات شعاع گردش این گونه دستگاهها برحسب تغییرات انرژی با افت و خیز همراه باشد. همچنین با بررسی تغییرات شعاع گردش و مقایسه توابع موج

### ۵. شعاع گردش بیلبارد

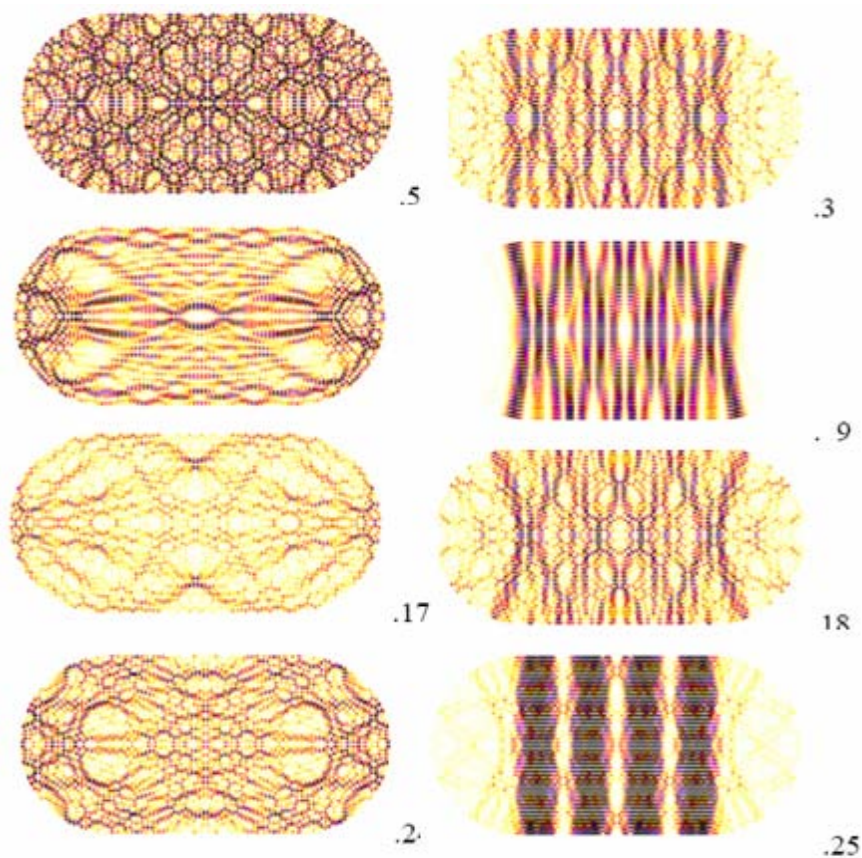
ما در این مقاله از پارامتر جدیدی به نام شعاع گردش برای تعیین میزان بی‌نظمی توزیع نقاط تقاطع منحنیهای صفر تابع موج با مرز در بیلباردها استفاده کرده‌ایم. نحوه توزیع این نقاط بر روی مرز نشان دهنده میزان نظم تابع موج است. شعاع گردش سطحی که به وسیله مرز بسته‌ای محدود می‌شود با رابطه

$$R^2 = \frac{1}{2l^2} \sum_{r_i, r_j} (r_i - r_j)^2, \quad (3)$$

تعریف می‌شود.  $r_i$ ها مکان نقاط روی مرز و  $l$  تعداد این نقاط است. این رابطه به معنی این است که مجذور شعاع گردش یک سطح بسته، مساوی مجموع مجذور فواصل نقاط روی مرز تقسیم بر مجذور تعداد آنها است. (عدد ۲ در مخرج



شکل ۵. تغییرات شعاع گردش برای ۴۰ تراز متوالی؛ هر شماره نشانگر یک تابع موج در شکل ۶ است.



شکل ۶. تعدادی از توابع موج استادیوم استاندارد که محاسبات مربوط به شکل ۵ برای آنها انجام شده است.

شده است (شکل ۵ و ۶). همان طور که از شکل ۵ پیدا است هرچه عدد شعاع گردش بیشتر باشد توزیع تابع موج در سطح استادیوم منظم تر است و

مربوط به نقاط بیشینه و کمینه دیده می شود که تغییر شعاع گردش با میزان نظم توزیع توابع موج رابطه دارد. در شکل ۵ نتایج محاسبات در مورد بیلاردی به شکل استادیوم نشان داده

مناسبی برای تعیین حالات آشوبی و غیر آشوبی بیلارد استادیوم تعریف کرد. هرچه عدد شعاع گردش بزرگتر باشد، تابع موج بیلارد توزیع منظم‌تری دارد. مزیت این روش این است که با معادل گرفتن این نقاط با نقاط برخورد مسیر ذره در بیلاردهای کلاسیکی این روش را می‌توان به عنوان یک ابزار مشترک در هر دو محدوده کلاسیکی و کوانتومی مورد استفاده قرار داد در حالی که روشهای دیگری که تا کنون معرفی شده‌اند چنین قابلیت ندارند. تعمیم این روش به مرزهای بسته‌ای با شکلهای هندسی متفاوت و همچنین حالت‌های وابسته به زمان مرز، دارای اهمیت بوده و می‌تواند به عنوان موضوعات بعدی مورد بررسی قرار گیرد.

این توزیعهای منظم در راستای مدارهای کلاسیکی دوره‌ای قرار می‌گیرند. مقدار میانگین این افت و خیزها عددی نزدیک شعاع گردش است که هرچه استادیوم آشوبی‌تر می‌شود (در مورد استادیوم افزایش پارامتر استادیوم) این مقدار میانگین از شعاع گردش فاصله می‌گیرد. بنابراین شعاع گردش می‌تواند پارامتر مناسبی برای تعیین آشوب در بیلارد استادیوم باشد.

## ۶. نتیجه‌گیری

توزیع نقاط برخورد صفرهای تابع موج با مرز در بیلاردی به شکل دایره که یک سیستم کوانتومی غیر آشوبی است یک توزیع یکنواخت است در حالی که در بیلارد آشوبی استادیوم این توزیع غیریکنواخت است. با محاسبه شعاع گردش نقاط برخورد منحنی صفرهای تابع موج با مرز بیلاردی می‌توان روش

## مراجع

1. M J Lichtenberg and M A Liberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, (1983) 262.
2. M Henon, *Numerical Exploration of Hamiltonian Systems* North-Holland P.C. (1983).
3. C Martin Gutzwiller, *Chaos in classical and Quantum Mechanics* Springer-Verlag, (1990).
4. M J Lichtenberg and M A Liberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag (1983) 277.
5. A Porter and L Liboff, *Chaos on the Quantum Scale*, <http://www.sigmaxi.org/amsci/articles/01articles/portercape6.html>.
6. *Q-SWITCH Electron Waveguides for Quantum-based Switching Applications*: <http://www.ftf.lth.se/coop/Qswitch.html>.
7. M V Berry, *J. Phys. A* **10** (1977) 2083.
8. S M McDonald and A N Kaufman, *Phys. Rev. A* **37**, 8 (1988) 3067-3086.
9. D L Kaufman, I Kosztin and K Schulten, *Am. J. Phys.* **67**, 2 (1999).
10. E J Heller, *Phys. Rev. Lett.*, **53** (1984) 1515.
11. B Li, M Robnik, *Phys. Rev. E* **57** (1998) 4095-4105.
12. E Vergini and M Saraceno, *Phys. Rev. E* **52** (1995) 2204-2207.
13. <http://www.math.dartmouth.edu/~ahb/software>.
14. A Barnett and E J Heller, *Dissipation in Deforming chaotic billiards*, Harvard University, Oct (2000).
15. L Kaplane, E J Heller, *Linear and Nonlinear theory of eigenfunction scars*, arXiv: chao-dyn/9809011 v1 11 Sep (1998).
16. E Heller, Patric J O'Connor, J Gehlen, *physica Scripta*, **40** (1989) 354-359.
17. J Cardy, *Geometrical Properties of Loops and Cluster Boundaries*, arXiv: cond-mat/9409094 v1 19 Sep (1994).