مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۰، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۹

سیاه شامهٔ اینشتین- یانگ- میلز در فضای پاددوسیته و رسانندگی غیر آبلی جریان مستقیم رنگ

شاهرخ پرویزی[۱] و مهدی صادقی[۲]

۱. گروه فیزیک ذرات و میدان‌ها، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت ا... بروجردی، بروجرد

پست الکترونیکی: parvizi@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۲۵ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۹/۰۲/۰۲)

چکیده

سیاه شامهٔ اینشتین- یانگ- میلز در فضای پاددوسیته با میدان پیمانه‌ای $SU(2)$ معرفی شده و با استفاده از تناظر نظریه میدان- گرانش، رسانندگی غیر آبلی جریان مستقیم رنگ محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: رسانندگی رنگ، هولوگرافی، نظریهٔ پاسخ خطی، سیاه شامه

۱. مقدمه

تناظر نظریهٔ میدان- گرانش، دو نظریه را که چارچوب‌های ریاضی و فیزیکی مختلفی دارند، به هم مربوط می‌کند که در آن گرانش در n+1 بعد و نظریهٔ میدان کوانتومی در n بعد قرار دارد [۱، ۲، ۳ و ۴]. ارتباط این دو نظریه به ظاهر متفاوت، دوگانی نامیده می‌شود که در آن تابع مولد نظریهٔ میدان کوانتومی برابر با کنش نظریهٔ گرانشی در حد خاصی است و در نتیجه مشاهده‌پذیرهای نظریهٔ میدان بر حسب نظریهٔ گرانشی قابل توصیف یا محاسبه است .

اولین بار این تناظر، در سال ۱۹۹۷ میلادی توسط مالداسنا معرفی شد و بیان می‌کند که نظریهٔ ابر یانگ- میلز N =۴ $SU(N)$، با نظریهٔ ریسمان نوع IIB در فضای $AdS_5 \times S^5$ متناظر است. در اینجا AdS_5 فضای پاددوسیتهٔ پنج بعدی و S^5 کره پنج بعدی است که شعاع‌های مساوی دارند. این تناظر در واقع از مطالعهٔ دوگانی بین ریسمان‌های بسته و باز و با حدگیری‌های خاصی به‌دست می‌آید. اولین حد این است که شعاع انحنای فضای پاددوسیته نسبت به طول ریسمان $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$ بزرگ باشد. در این حد می‌توان از اثرات مدهای جرم‌دار ریسمانی چشم‌پوشی کرد و تنها مد صفر را در نظر گرفت که مد گرانشی است. در سمت نظریهٔ میدان که در یک

بعد کمتر در مرز فضای پاددوسیته تعریف می‌شود، این حد به معنای قوی بودن ثابت جفت‌شدگی توفت[۱] است که به صورت $\lambda = g_s N = g_{YM} N$ تعریف می‌شود و در آن g_s و g_{YM} به‌ترتیب جفت‌شدگی‌های ریسمان و نظریهٔ یانگ میلز هستند که هر دو باید کوچک باشند. بنابراین، در این تناظر از یک سو نظریهٔ گرانشی در حد کلاسیک ($g_s \to ۰$) و از سوی دیگر نظریهٔ یانگ میلز در حد $N \gg ۱$ و ثابت توفت قوی $\lambda \gg ۱$ با یکدیگر دوگان هستند.

در حال حاضر، مثال بالا به صورت عام‌تر دوگانی گرانش– پیمانه تعمیم یافته است که در آن گرانش به طور عمده در فضای پاددوسیته یا فضاهایی که مجانبی پاددوسیته هستند و نظریهٔ پیمانه‌ای در مرز آن تعریف می‌شود. در این حالت، همچنان نظریهٔ میدان در جفت‌شدگی قوی متناظر نظریهٔ گرانش کلاسیک است. با توجه به این که حل تحلیلی و اختلالی برای نظریه‌های پیمانه‌ای جفت شده قوی پاسخگو نیست، یکی از بهترین راه‌های ممکن برای حل این نظریه‌ها، استفاده از تناظر گرانش– پیمانه است. با استفاده از این تناظر می‌توان اطلاعات نظریهٔ جفت شده قوی را از نظریهٔ گرانش کلاسیک در یک بعد بالاتر به‌دست آورد. در این مقاله رفتار میدان یانگ– میلز بررسی می‌شود که تعمیم میدان ماکسول است. هر دو نظریهٔ پیمانه‌ای هستند با این تفاوت که نظریهٔ ماکسول گروه تقارنی آبلی $U(1)$ و نظریهٔ یانگ– میلز گروه تقارنی غیر آبلی دارد. تفاوت در گروه پیمانه‌ای آبلی و غیر آبلی منجر به تفاوت‌های مهمی در پیامدهای فیزیکی دو نظریه می‌شود. مهم‌ترین تفاوت در رفتار ثابت جفت‌شدگی دو نظریه است. در الکترومغناطیس در انرژی‌های پایین، ثابت جفت‌شدگی افزایش می‌یابد در حالی که در نظریهٔ یانگ– میلز برعکس است و با افزایش انرژی، ثابت جفت‌شدگی کاهش می‌یابد. بدین ترتیب، نیروی الکترومغناطیسی نیرویی بلند برد است و در خارج از هسته هم اثر می‌گذارد اما میدان یانگ– میلز فقط در داخل هسته عمل می‌کند. تفاوت دیگر در محبوس‌شدگی است که به این معناست که در دماهای پایین، نظریهٔ یانگ– میلز در فاز محبوس است و کوارک آزاد وجود ندارد اما در دماهای بالا که در آزمایشگاه‌های ذرات قابل دسترسی است، تغییر فاز اتفاق می‌افتد و ماده به‌صورت پلاسمای گلئون– کوارک ظاهر می‌شود. این فازی است که در تناظر گرانش– پیمانه مورد مطالعه ماست.

در حد طول موج بلند، نظریهٔ میدان رفتاری مانند یک شاره دارد، بنابراین تناظر مورد نظر در این حد، تناظر شاره– گرانش است. هر سیال با ضرایب ترابرد شناخته می‌شود [۵ و ۶]. این ضرایب، ویژگی‌های میکروسکوپی شاره زیربنایی نظریهٔ میدان را در برهم‌کنش‌های قوی، شناسایی می‌کند. بنابراین دوگانی شاره– گرانش ابزار مناسبی برای محاسبهٔ این ضرایب است. پایستگی انرژی– تکانه و جریان در هیدرودینامیک نسبیتی به صورت زیر است:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = ۰, \quad (۱)$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p\, g^{\mu\nu}, \quad (۲)$$

که در آن، ρ چگالی، p فشار و u سرعت است. در اینجا شارهٔ نسبیتی به معنای این نیست که شاره با سرعت نور حرکت کند بلکه به معنای این است که تقارن لورنتس در شاره نسبیتی حفظ می‌شود. اگر پتانسیل شیمیایی در سیستم وجود داشته باشد به این معناست که بقای جریان برقرار است.

$$\nabla_\mu J^\mu = ۰, \quad (۳)$$

$$J^\mu = \rho u^\mu, \quad (۴)$$

یک پارامتر بسط $\varepsilon = \ell_{mfp} / L$ معرفی می‌کنیم که ℓ_{mfp} و L مسافت آزاد میانگین و طول مشخصهٔ سیستم یا مقیاس افت‌وخیزهای میدان است. برای برقراری نظریهٔ هیدرودینامیک باید مقیاس تغییرات میدان نسبت به مسافت آزاد میانگین خیلی بزرگ باشد. هنگامی که شاره در مرز فضای پاددوسیته وجود داشته باشد با یک نظریه حاوی سیاه‌چالهٔ بزرگ در فضای پاددوسیته متناظر می‌شود. اگر ε کوچک‌تر از یک باشد در این صورت تانسور انرژی– تکانه را بر حسب ε بسط می‌دهیم. این بسط در واقع معادل با کوچک گرفتن مشتقات میدان‌هاست. بنابراین بسط را تا مشتق مرتبهٔ اول در نظر می‌گیریم و از مشتقات بالاتر میدان‌ها صرفنظر می‌کنیم [۷].

۱. 'tHooft

$$T^{\mu\nu}=(\rho+p)u^{\mu}u^{\nu}+pg^{\mu\nu}- P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\left[\eta\left(\nabla_{\alpha}u_{\beta}+\nabla_{\beta}u_{\alpha}\right)+\left(\zeta-\frac{۲}{۳}\eta\right)g_{\alpha\beta}\nabla.u\right], \quad (۵)$$

که در آن ρ چگالی، p فشار، u چاربردار سرعت، g متریک و شاخص‌ها مختصات فضا زمانی را نشان می‌دهند. همچنین

$$P^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}+u^{\mu}u^{\nu}, \quad (۶)$$

عملگر تصویر در جهت سرعت است. به همین ترتیب جریان پایستار را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$J^{\mu}=\rho u^{\mu}-\sigma T\,\partial_{\nu}\left(\frac{\mu}{T}\right), \quad (۷)$$

در روابط (۵) و (۷) کمیات η، ζ و σ به‌ترتیب چسبندگی برشی، حجمی و رسانندگی بار هستند و این ضرایب باید از نظریهٔ میکروسکوپی تعیین شوند [۷ و ۸].

رسانندگی در نظریهٔ ماکسول از قانون اهم به‌دست می‌آید که ضریب نسبت جریان به میدان الکتریکی است. در نظریهٔ غیر آبلی، رسانندگی را می‌توان از طریق قانون اهم غیر آبلی به‌صورت زیر به تانسور رسانندگی رنگ تعمیم داد [۹]:

$$\sigma_{ab}^{ij}\ (x,y)=\frac{\delta J_{a}^{i}\ (x)}{\delta E_{j}^{b}\ (y)}, \quad (۸)$$

که در آن E میدان الکتریکی غیر آبلی است که برحسب تانسور شدت میدان که در (۱۱) تعریف شده است، به صورت $E_{j}^{b}=F_{۰j}^{b}$ به‌دست می‌آید که در آن j جهت فضایی میدان و b شاخص داخلی گروه پیمانه‌ای است که در مقالهٔ حاضر گروه $SU(۲)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین J_{a}^{i} جریان پایستار غیر آبلی در جهت فضایی i و شاخص داخلی a است. حضور مختصات x و y در رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که رابطهٔ بین J و E اگرچه خطی است اما ممکن است موضعی نباشد؛ یعنی ممکن است J به‌صورت انتگرالی از E باشد. به لحاظ فیزیکی این به این مفهوم است که تغییرات میدان الکتریکی در نقطهٔ x ممکن است جریان را در نقطه‌ای دیگر مانند y تغییر دهد. بدین معنا رسانندگی در رابطهٔ بالا غیر موضعی است.

رسانندگی σ_{ab} از این نظر رسانندگی رنگ نامیده می‌شود که متعلق به یک نظریهٔ غیر آبلی است. آن‌طور که در نظریهٔ کرومودینامیک با گروه پیمانه‌ای $SU(۳)$ متداول است بار ذرات به‌جای بار الکتریکی، رنگ نامیده می‌شود. در اینجا نیز این بار رنگ و رسانندگی آن، رسانندگی رنگ نامیده می‌شود، البته گروه تقارنی در اینجا $SU(۲)$ است.

واضح است که در حالتی که تقارن دورانی وجود داشته باشد، رسانندگی از نظر فضایی نرده‌ای می‌شود و می‌توان شاخص‌های i و j را حذف کرد. همچنین مشابه نظریهٔ آبلی می‌توانیم میدان‌ها را متناوب با بستگی زمانی $e^{i\omega t}$ با بسامد ω و یا مستقیم متناظر با حد $\omega\to۰$ در نظر بگیریم. در این مقاله هدف محاسبهٔ رسانندگی مستقیم رنگ است.

برای محاسبهٔ رسانندگی از طریق تناظر شاره- گرانش، باید در نظریهٔ گرانشی، میدان‌های برداری متناظر را وارد کرد. اضافه کردن میدان ماکسول به گرانش، از لحاظ تاریخی با متریک رایزنر- نوردستورم شروع شد که سیاه‌چاله‌ای است در حضور میدان‌های گرانشی و ماکسول و بار الکترو مغناطیسی و جرم دارد. پس از آن با توسعه به ابعاد بالاتر، به‌عنوان سیاه‌چاله‌های اینشتین- ماکسول شناخته شده است. همچنین تعمیم به میدان‌های غیر آبلی نیز به‌عنوان سیاه‌چالهٔ اینشتین- یانگ- میلز در ابعاد مختلف انجام شده است. این سیاه‌چاله‌ها می‌توانند دارای بارهای الکتریکی و یا مغناطیسی باشند.

در مطالعهٔ سیاه‌چاله‌ها با میدان‌های ماکسول (آبلی) حد زیر برای رسانندگی به‌دست می‌آید [۱۰]:

$$\sigma\geq\frac{۱}{e^{۲}}=۱, \quad (۹)$$

اینجا در واحدهایی کار می‌شود که $e=۱$ است. نامساوی فوق برای سیاه‌چاله‌های بدون بار اشباع می‌شود: $\sigma=۱$. البته لازم به ذکر است که در برخی مدل‌های خاص با میدان‌های زمینهٔ اضافی یا در گرانش جرم‌دار، این حد نقض می‌شود [۱۱، ۱۲ و ۱۳]. حال در این کار، ما قصد داریم رسانندگی رنگ را با روش هولوگرافی از یک نظریهٔ گرانشی اینشتین- یانگ- میلز به‌دست بیاوریم و تحقیق کنیم که آیا نامساوی فوق برای حالت غیر آبلی هم برقرار است یا خیر. نظریهٔ میدان را در سه بعد (دو بعد فضایی و یک زمانی) با گروه غیرآبلی $SU(۲)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین نظریهٔ گرانشی در فضا زمان چهار بعدی

تعریف می‌شود.

۲. سیاه شامهٔ اینشتین- یانگ- میلز

کنش اینشتین- یانگ- میلز را در فضای پاددوسیته در چهار بعد، در نظر بگیرید:

$$S = \int d^{۴}x \sqrt{-g} \ [\frac{۱}{۱۶\pi G}(R - ۲\Lambda) -$$

$$\frac{۱}{۲} Tr \ F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}], \quad (۱۰)$$

که در آن g دترمینان متریک، G ثابت نیوتن، R نرده‌ای ریچی، Λ ثابت کیهان‌شناسی و $F_{\mu\nu}$ تانسور شدت میدان یانگ- میلز است

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\left[A_\mu, A_\nu\right], \quad (۱۱)$$

که در آن A_μ چاربردار پتانسیل است که در نمایش الحاقی گروه $SU(۲)$ قرار دارد.

با وردش از کنش نسبت به $g_{\mu\nu}$ و A_ν معادلات حرکت اینشتین و یانگ- میلز را به‌دست می‌آوریم

$$R_{\mu\nu} - \frac{۱}{۲} g_{\mu\nu}(R - ۲\Lambda) = ۸\pi G T_{\mu\nu}, \quad (۱۲)$$

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} + \left[A_\mu, F_{\mu\nu}\right] = ۰, \quad (۱۳)$$

که در معادلهٔ اخیر، ∇_μ نشان دهندهٔ مشتق همورد است .

این معادلات جواب‌های متنوعی دارند. ما جواب رایزنر- نوردشتروم پاد دوسیته را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۴]:

$$ds^{۲} = -f(r)dt^{۲} + \frac{dr^{۲}}{f(r)} + r^{۲}\left(d\theta^{۲} + sin^{۲}\theta d\phi^{۲}\right), \quad (۱۴)$$

که جواب بدیهی (رابطهٔ (۳.۲) در [۱۴]) نام گرفته است و در آن r مختصهٔ شعاعی فضای پاددوسیته و زوایای θ و ϕ زوایای کروی پاددوسیته هستند. تابع f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(r) = ۱ - \frac{۲M}{r} + \frac{Q^{۲}}{r^{۲}} - \frac{\Lambda r^{۲}}{۳}, \quad (۱۵)$$

و میدان یانگ- میلز $SU(۲)$ به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۴]:

$$A = \frac{i}{۲}\left(\left(a_۰ - \frac{q}{r}\right)dt - cos\theta d\phi\right)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \quad (۱۶)$$

که در آن M، Q، q و $a_۰$ ثابت هستند و

$$Q^{۲} = ۱ + q^{۲}. \quad (۱۷)$$

از (۱۶) مشخص است که این حل شامل میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی غیر آبلی است. در عبارت (۱۷)، q نشان دهندهٔ بار الکتریکی و ۱ نمایندهٔ بار مغناطیسی است. بنابراین این سیاه‌چاله دایونیک به حساب می‌آید.

برای این سیاه‌چاله، دمای هاوکینگ برابر است با:

$$T = \frac{f'(r_h)}{۴\pi}, \quad (۱۸)$$

که r_h شعاع افق است، $f(r_h) = ۰$.

برای به دست آوردن ضرایب ترابرد از جمله رسانندگی رنگ، لازم است که از یک سیاه شامه استفاده کنیم. بنابراین در (۱۴) زاویهٔ θ را کوچک در نظر می‌گیریم، در نتیجه مختصات (θ, ϕ) به مانند مختصات قطبی در یک صفحه تخت می‌شوند و به حل زیر می‌رسیم:

$$ds^{۲} = -f(r)dt^{۲} + \frac{dr^{۲}}{f(r)} + r^{۲}\left(dx^{۲} + dy^{۲}\right), \quad (۱۹)$$

$$A = \frac{i}{۲}\left(\left(a_۰ - \frac{q}{r}\right)dt\right)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \quad (۲۰)$$

که برای به دست آوردن آن فرض کردیم $cos\theta \cong ۱$ و بنابراین میدان مغناطیسی را تقریباً صفر فرض کردیم. حل (۱۹) یک سیاه شامهٔ دو بعدی در جهت‌های x و y همراه با میدان‌های یانگ- میلز است. توجه کنید که میدان (۲۰) در معادلهٔ یانگ- میلز با متریک زمینه (۱۹) صدق می‌کند.

۳. رسانندگی جریان مستقیم رنگ

برای محاسبهٔ رسانندگی الکتریکی جریان مستقیم رنگ از نظریهٔ پاسخ خطی استفاده می‌کنیم که باید نظریهٔ میدان پیمانه‌ایی را به‌صورت زیر مختل کنیم [۱۵-۲۱]:

$$A_\mu \to A_\mu + \tilde{A}_\mu, \quad (۲۱)$$

کنش را تا مرتبهٔ دوم بر حسب $\tilde{A}_\mu$ بسط می‌دهیم و جریان‌های J_a^μ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$S \to S + \int d^{۴}x \ A_\mu^a \ J_a^\mu, \quad (۲۲)$$

تابع گرین تأخیری از تناظر گرانش- پیمانه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G^{\mu\nu}(\omega) = < J^\mu(\omega) J^\nu(-\omega) > = \frac{\delta^{۲} S}{\delta \tilde{A}_\mu \delta \tilde{A}_\nu}, \quad (۲۳)$$

کـه درآن ω بسـامد میـدان اسـت. مـا می‌تـوانیم رسـانندگی جریان رنگ را با استفاده از فرمول گرین- کوبو به دست آوریم

$$\sigma_{ab}^{ij}(\omega)=-\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}Im<J_a^i(\omega)J_b^j(-\omega)>=$$

$$-\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}Im\frac{\delta^2 S}{\delta\tilde{A}_i^a\delta\tilde{A}_j^b}, \qquad (۲۴)$$

حد $\omega\to 0$ مربوط به این است کـه رسـانندگی جریـان مسـتقیم مدنظر است که در آن بسامد را صفر می‌گیریم. در رابطـهٔ فـوق، شاخص‌های a و b مربوط به گروه $SU(2)$ و شـاخص‌های i و j جهت‌های x و y هستند. با توجه به تقارن دورانی در صفحه xy انتظار می‌رود رسانندگی کمیتی نردهای باشد $\sigma_{ab}^{ij}=\sigma_{ab}\delta^{ij}$.

حـــال میـــدان‌ها را به‌صـــورت $\tilde{A}_x=\tilde{A}_x(r)e^{i\omega t}$ درنظـــر می‌گیریم. در حد هیدرودینامیک، کافی است میدان‌های $\tilde{A}$ را در حد ω خیلی کوچک به دست آوریم. برای این منظور ابتدا رابطهٔ (۲۱) را در کنش قرار می‌دهیم و تا مرتبهٔ دوم $\tilde{A}$ نگه می‌داریم.

$$S^{(2)}=-\int d^4x\,\frac{2}{r^2 f}\Bigg[-r^2f^2\left(\left(\partial_r\tilde{A}_x^{(1)}\right)^2+\left(\partial_r\tilde{A}_x^{(2)}\right)^2+\left(\partial_r\tilde{A}_x^{(3)}\right)^2\right)$$
$$+\left(\left(\tilde{A}_x^{(1)}\right)^2+\left(\tilde{A}_x^{(2)}\right)^2\right)\left(r^2\omega^2+(ra_0-q)^2\right)+r^2\omega^2\left(\tilde{A}_x^{(3)}\right)^2\Bigg], \qquad (۲۵)$$

با وردش گرفتن از این کنش به معادلات زیر می‌رسیم:

$$r^2f\left(f\,\tilde{A}_x^{(1)\prime}\right)'+\left(r^2\omega^2+(ra_0-q)^2\right)\tilde{A}_x^{(1)}=0, \qquad (۲۶)$$

$$r^2f\left(f\,\tilde{A}_x^{(2)\prime}\right)'+\left(r^2\omega^2+(ra_0-q)^2\right)\tilde{A}_x^{(2)}=0, \qquad (۲۷)$$

$$f\left(f\,\tilde{A}_x^{(3)\prime}\right)'+\omega^2\tilde{A}_x^{(3)}=0, \qquad (۲۸)$$

ابتـدا حـل معـادلات را در نزدیکـی افـق بـه دسـت مـی‌آوریم. برای این منظور از بســط نزدیک افق $f\sim 4\pi T\,(r-r_h)$ و

$$\tilde{A}_x^{(a)}\sim(r-r_h)^{z_a}, \qquad a=1,2,3 \qquad (۲۹)$$

استفاده می‌کنیم و در نتیجه:

$$z_1=z_2=\pm i\,\frac{\sqrt{(a_0-q/r_h)^2+\omega^2}}{4\pi T}, \qquad (۳۰)$$

$$z_3=\pm i\,\frac{\omega}{4\pi T}, \qquad (۳۱)$$

حال جواب در کل دامنه r را، بسطی از ω به‌صـورت زیـر فـرض می‌کنیم:

$$\tilde{A}_x^{(1)}=\tilde{A}_\infty^1\left(\frac{-3}{\Lambda r^2}f\right)^{z_1}\left(1+i\,\omega h_1(r)+\cdots\right), \qquad (۳۲)$$

$$\tilde{A}_x^{(2)}=\tilde{A}_\infty^2\left(\frac{-3}{\Lambda r^2}f\right)^{z_2}\left(1+i\,\omega h_2(r)+\cdots\right), \qquad (۳۳)$$

$$\tilde{A}_x^{(3)}=\tilde{A}_\infty^3\left(\frac{-3}{\Lambda r^2}f\right)^{z_3}\left(1+z_3\,h_3(r)+\cdots\right), \qquad (۳۴)$$

کــه در آن ضــرایب $\tilde{A}_\infty^{(a)}$ مقـدار میـدان‌ها در مـرز هسـتند و پارامترهای z_a را از (۳۰) و (۳۱) با علامت‌های منفی انتخـاب می‌کنیم. در حد ω کوچک معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$8\pi r\,r_hTf\left[h_1'\left(\left(rf'-2f\right)(q-a_0r_h)+2i\,\pi r_hT\,rf'\right)+2i\,\pi r\,r_hTf\,h_1''\right]$$
$$+i\,h_1\Big[\left(4rff'-r^2f'^2-4f^2\right)(q-a_0r_h)^2-16\pi^2r_h^2T^2(q-a_0r)^2$$
$$-4i\,\pi r_hTf\left(r^2f''-2rf'+2f\right)(q-a_0r_h)\Big]=0, \qquad (۳۵)$$

$$-2\left(\frac{f}{r}\right)'+f''+\left(fh_3'\right)'=0. \qquad (۳۶)$$

معادلهٔ h_2 دقیقاً با معادلهٔ h_1 یکسـان اسـت. معادلـهٔ (۳۶) حـل دقیقی برای h_3 دارد:

$$h_3=-log\left(\frac{f}{C_2r^2}\right)+C_1\int\frac{dr}{f(r)}, \qquad (۳۷)$$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری هسـتند. بـا شـرط $h_3\to 0$ در مرز خواهیم داشت $C_2=-\frac{\Lambda}{3}$ و برای این که h_3 در روی افق تکین نباشد، مقدار C_1 را به صـورت زیـر انتخـاب می‌کنیم:

$$C_1=4\pi T. \qquad (۳۸)$$

با جایگذاری جواب‌ها در (۲۵) و دوبار مشتق گیری نسـبت بـه مقدار مرزی $\tilde{A}_\infty^3$، تابع گرین اقلیدسی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$G_{xx}^{(33)}(\omega)=\left(\tilde{A}_x^{(3)}\right)^*f(r)\partial_r\tilde{A}_x^{(3)}\Big|_{r\to\infty}=-\frac{i\,\omega C_1}{4\pi T}, \qquad (۳۹)$$

رسانندگی با استفاده از فرمول کوبو (۲۴) و بـا توجـه بـه (۳۸) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{xx}^{(33)}=1. \qquad (۴۰)$$

برای حل معادلهٔ (۳۵)، از بسط در نزدیکی مرز $r\to\infty$ اسـتفاده می‌کنیم:

$$h_1(r)\approx h_{10}+\frac{h_{11}}{r}+\frac{h_{12}}{r^2}+\cdots, \qquad (۴۱)$$

با جایگذاری در (۳۵)

$$h_{11} = -\frac{h_{10}}{16\pi\Lambda^2 r_h T\left(\pi r_h T\left(\Lambda M - a_0 q\right) + i\Lambda M\left(a_0 r_h - q\right)\right)}$$
$$\times[3a_0^2\Lambda^2 r_h^2 + 36\pi^2 a_0^2 r_h^2 T^2(2\Lambda - a_0^2) +$$
$$+36i\pi a_0^2\Lambda r_h T(a_0 r_h - q) + 8i\pi\Lambda^3 Q^2 r_h T(q - a_0 r_h)$$
$$+\Lambda^2(3q(q - 2a_0 r_h) + \pi^2 r_h^2 T^2(8q^2 + 20))], \qquad (۴۲)$$

به طریقی مشابه با $\sigma_{xx}^{(33)}$ ، برای $\sigma_{xx}^{(11)}$ و $\sigma_{xx}^{(22)}$ داریم:

$$\sigma_{xx}^{(11)} = \sigma_{xx}^{(22)} = -\frac{\Lambda}{3}\left(h_{11} + h_{11}^*\right), \qquad (۴۳)$$

اما با توجه به شرط مرزی $\lim_{r\to\infty} h_1 \to 0$ در نزدیکی مـرز $h_{10} = 0$ بهدست میآید که در نتیجه $h_{11} = 0$ میشود و

$$\sigma_{xx}^{(11)} = \sigma_{xx}^{(22)} = 0, \qquad (۴۴)$$

بـدینترتیب رسـانندگی رنـگ $\sigma_{xx}^{(ab)}$ برحسـب شـاخصهای $SU(2)$، قطری است و تنها در جهت سه، مقدار غیر صفر دارد. این جهت همان جهت میدان زمینه در (۲۰) اسـت. بـه عبـارت دیگر، قانون اهم کاملاً بهصورت قطری در میآید:

$$\sigma_{aa} = \frac{\delta J_a^x}{\delta E_x^a}, \qquad (۴۵)$$

که در آن $a = 3$ از طرفـی رابطـه (۴۰) نامسـاوی (۹) را اشـباع میکند.

۴. نتیجهگیری

ما برای یک مدل غیر آبلی یانگ- میلز با گروه پیمانهای $SU(2)$ در ۲+۱ بعـــد، رســـانندگی رنـــگ را بـــا اســـتفاده از تنـــاظر گرانش/نظریهٔ پیمانهای بهدست آوردیم. دوگان گرانشـی را یـک نظریهٔ اینشتین با سیاه شامه رایزنر- نوردشتروم در ۳+۱ بعـد در نظر گرفتیم که جوابهـای آن در [۱۴] معرفـی شـدهاند. بـرای محاسبهٔ رسانندگی از فرمول گرین– کوبو (۲۴) که به حالت غیر آبلی تعمیم یافته است، استفاده کـردیم. نتیجـهٔ بـه دسـت آمـده برای $\sigma_{xx}^{(ab)}$ برحسب شاخصهای $SU(2)$، قطری اسـت. بـرای $a,b = 1,2$ رسـانندگی $\sigma_{xx}^{(33)}$ نتیجهٔ یک به دست آمد اما برای رنگ صفر میشود. بدینترتیب رسـانندگی بـه دسـت آمـده در فضای $SU(2)$ در جهت میـدان زمینـه (۲۰) اسـت. بـه عبـارتی قانون اهم غیر آبلی کاملاً قطری میشود یعنی رسانندگی σ چه از نظر شاخصهای فضایی و چـه از نظـر شـاخصهای گـروه پیمانهای، یک کمیت نردهای است.

از طرفی نامساوی (۹) که حدی برای رسانندگی آبلی اسـت در این مدل غیر آبلی اشباع میشود. از این نظر، مقایسهٔ مدل مـا با محاسبات مرجع [۱۰] قابل توجه اسـت. در آن مرجـع نشـان داده شده است که در یک سیاهچاله ماکسول- اینشتین بدون بار هنگامی که میدان زمینه صفر است و میدان اختلالی یـک میـدان ثابت الکتریکی است، حد (۹) اشباع میشـود. در مـدل مـا نیـز شرایط مشابهی برقرار است. میدان زمینه (۲۰) در مـرز $r \to \infty$ به سمت مقداری ثابت میرود کـه معـادل میـدان صـفر اسـت. تفاوت در غیر آبلی بودن میدان است که با توجه به قطری شدن روابط از نظر شاخصهای گروه $SU(2)$، میتوان نتیجـه گرفـت که در این محاسبه، تنها یک زیرگروه $U(1)$ تأثیرگذار بوده است و همان نتیجهٔ اشباع نامساوی (۹) به دست آمده است. بنـابراین با توجه به این که این نتیجه از مدل و روشی کاملاً متفـاوت بـه دست آمده، نتیجهای غیر بدیهی و در عین حال سازگار با مرجع [۱۰] است.

مراجع

1. J M Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113.
2. O Aharony, S S Gubser, J M Maldacena, H Ooguri, and Y. Oz, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183.
3. J Casalderrey-Solana, H Liu, D Mateos, K Rajagopal and U A Wiedemann, "Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions," arXiv:1101.0618.
4. D Mateos, *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) S713.
5. S Bhattacharyya, V E Hubeny, S Minwalla, and M Rangamani, *JHEP* **045** (2008) 0802.
6. M Rangamani, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224003.
7. J Bhattacharya, S Bhattacharyya, S Minwalla, and A Yarom, *JHEP*, **147** (2014) 1405.
8. P Kovtun, *J. Phys.* **A45** (2012) 473001.
9. D F Litim and C Manuel, *Nucl. Phys.* B **562** (1999) 237.

10. S Grozdanov, A Lucas, S Sachdev, and K Schalm, *Phys. Rev. Lett.* **115,** 22 (2015) 221601.
11. M Baggioli and O Pujolas, *JHEP* **040** (2017) 1701.
12. B Goutéraux, E Kiritsis and W J Li, *JHEP* **122** (2016) 1604.
13. K Bitaghsir Fadafan, *Phys. Lett.* B **762** (2016) 399.
14. B L Shepherd and E Winstanley, *Phys. Rev.* D 93, **6** (2016) 064064.
15. N Banerjee and S Dutta, arXiv:1112.5345 [hep-th]..
16. D T Son, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **192-193** (2009) 113.
17. D T Son and A O Starinets, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57** (2007) 95.
18. G Policastro, D T Son, and A O Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 081601.
19. G Policastro, D T Son, and A O Starinets, *JHEP* **043** (2002) 0209.
20. A Donos and J P Gauntlett, *JHEP* **081** (2014) 1411.
21. S A Hartnoll, C P Herzog and G T Horowitz, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 031601.