مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۱، شمارهٔ ۱، بهار ۱۴۰۰
DOI: 10.47176/ijpr.21.1.51054

رهیافت برزین در تعیین عملگرهای نردبانی وابسته به حرکت ذره روی حلقه و کره

سودابه رضایی و اردشیر رابعی

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه

پست الکترونیکی: rabeie@razi.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۲۴ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۹/۱۰/۰۳)

چکیده

صورت‌بندی کوانتومی یک سامانهٔ فیزیکی اصولاً بر اساس عملگرهای خلق و نابودی انجام می‌شود. ما در این مقاله با استفاده از روش کوانتش برزین به تعیین این عملگرهای نردبانی برای ذرهٔ متحرک روی حلقه و کرهٔ دو بعدی می‌پردازیم. این روش کوانتش برگرفته از رابطهٔ تفکیک واحد روی حالت‌های همدوس است. در واقع حالت‌های همدوس یک طرح کوانتش مستقیم از یک حالت کلاسیکی به همتای کوانتومی آن را فراهم می‌کنند. در این مقاله حالت‌های همدوس مربوط به سیستم‌های ذکر شده را از نقطه‌نظر تابع هستهٔ گرمایی مورد بحث قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: حالت‌های همدوس، کوانتش برزین، عملگر خلق، عملگر نابودی

۱. مقدمه

از نقطه نظر فیزیکی، حالت‌های همدوس به عنوان نزدیک‌ترین حالت‌های کوانتومی به همتای کلاسیکی خود شناخته می‌شوند. به طور کلی، این حالت‌ها از سه ویژگی اساسی پیوستگی، بهنجارش‌پذیری و برآورده کردن رابطهٔ تفکیک واحد برخوردارند [۱ و ۲]. مشخصهٔ سوم پل ارتباطی بین جهان مکانیک کلاسیک و جهان مکانیک کوانتومی را فراهم می‌کند. یکی از سیستم‌های کوانتومی که به صورت موفقیت‌آمیزی از منظر حالت‌های همدوس استاندارد مورد بررسی قرار گرفته است، نوسانگر هماهنگ ساده است. به نظر می‌رسد، نتایج تعمیم این مفهوم در توصیف حرکت دوره‌ای ذره کوانتومی، به ویژه ساده‌ترین موارد آن یعنی حرکت ذرهٔ کوانتومی روی حلقه و کره S^2، نیز رضایت‌بخش بوده باشد. به عنوان مثال، کوالسکی و رمبیلسکی با الهام از نوسانگر هماهنگ سادهٔ کوانتومی، عملگر نابودی و حالت‌های همدوس مربوط به حرکت ذرهٔ کوانتومی روی حلقه، که ویژه بردار عملگر نابودی هستند، را تعیین کرده‌اند [۳]. حالت‌های همدوس وابسته به حرکت ذره روی کره S^2 نیز توسط رادکلیفت، گیلمور و پریلموف ارائه شده‌اند [۴]. مشخصهٔ مهم این حالت‌ها این است که توسط نقاطی روی کره، فضای پیکربندی، برچسب‌گذاری می‌شوند. در مطالعهٔ دیگر، کوالسکی و رمبیلنسکی حالت‌های همدوس مربوط به ذره روی کرهٔ S^2 را، متناظر با نقاطی روی فضای فاز کلاسیکی

مشخص کردند نه فضای پیکربندی [۵]. حالت‌های معرفی شده مشابه با روش باروت و جیراردلو [۶] ویژه بردار عملگر نابودی (عملگر غیر هرمیتی) هستند. همچنین علی‌رغم این که از بردار خلأ ساخته می‌شوند اما توسط عمل غیر یکانی گروه تعیین می‌شوند (در تضاد با ساختار نظریهٔ گروه پریلموف).

هدف ما در این مقاله، تعیین عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت ذره روی حلقه و کره با اعمال کوانتش روی فضای فاز وابسته است. می‌دانیم فریند کوانتش، گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی است، طوری که سیستم کوانتومی در حد $\hbar \to 0$ به سیستم کلاسیکی متناظر تبدیل شود. برای سیستم‌های کلاسیکی با فضای فاز تخت از نوع $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$، با مختصات q_i و p_i، روش کوانتش استاندارد به کار می‌رود اما برای سیستم‌هایی با فضای فاز از نوع $\mathbb{R}^n \times S^n$، این روش کوانتش کارآمد نخواهد بود. کوانتش برزین یا کوانتش به روش حالت‌های همدوس، روشی مناسب برای توصیف کوانتومی سیستم‌هایی است که فضای فازشان صفحه نیست. در این روش کوانتش، به هر مشاهده پذیرکلاسیکی در فضای فاز، مثل تابع f، یک مشاهده‌پذیر کوانتومی، مثل عملگر O_f، به صورت زیر نسبت داده می‌شود[۷] :

$$O_f = \int_X f\,|\psi\rangle\langle\psi|\,d\mu(\psi), \qquad (۱)$$

که X معرف فضای فاز و $|\psi\rangle$ و $d\mu(\psi)$ به ترتیب حالت‌های همدوس و سنجهٔ مناسب روی فضای فاز هستند. در واقع رابطهٔ انتگرالی کوانتش برزین در (۱) از رابطهٔ تفکیک واحد روی حالت‌های همدوس نشأت می‌گیرد.

به بیان دیگر، شرط لازم جهت اعمال کوانتش برزین در رابطه با سیستم‌های مورد بررسی در این مقاله، ارائهٔ یک زیر فضای هیلبرت (حالت‌های همدوس) و سنجهٔ مناسب روی فضای فاز کلاسیکی مربوط به سیستم‌هایی است که ما در تعیین آنها از مقالهٔ هال و میتچل بهره می‌بریم [۸]. در مرجع مذکور، خانواده‌ای از حالت‌های همدوس و رابطهٔ تفکیک واحد مربوط به آنها، برای سیستمی با فضای پیکربندی کلاسیکی از نوع فضای متقارن فشرده و به طور خاص کرهٔ d- بعدی معرفی شده است. مشخصهٔ این حالت‌ها این است که ۱- توسط نقاطی روی فضای فاز کلاسیکی وابسته یعنی $T^*(S^d)$ یا به صورت معادل کرهٔ مختلط $S^d{}_C$ برچسب‌گذاری می‌شوند. ۲- ویژه بردار عملگر نابودی هستند، بنابراین از نوع حالت‌های همدوس پریلموف نیستند. ۳- بر حسب هستهٔ گرمایی[۱]، جواب معادلهٔ گرما، که تابعی تحلیلی روی کره است، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\rho^d{}_\tau(\vec{a},\vec{x}) = \langle\delta_x|\psi_d{}^\tau(\vec{a})\rangle, \vec{a}\in S^d{}_C, x\in S^d, \qquad (۲)$$

که $\langle\delta_x|$ و $|\psi_d{}^\tau(\vec{a})\rangle$ به ترتیب ویژه بردار بهنجارش ناپذیر و حالت‌های همدوس وابسته به کرهٔ مختلط d- بعدی هستند. سنجهٔ مناسب روی کرهٔ مختلط نیز به صورت ضرب سنجه روی هستهٔ گرمایی هذلولی‌وار d - بعدی در سنجهٔ ناوردا روی کره S^d در نظر گرفته می‌شود [۸].

ما در این کار، ابتدا به تعیین حالت‌های همدوس و عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت ذره روی حلقه بر اساس تحلیل کوالسکی و رمبیلنسکی و مختلط کنندهٔ تیمن [۹ و ۱۰] می‌پردازیم. سپس سعی می‌کنیم با استخراج حالت‌های همدوس روی حلقه از هستهٔ گرمایی مربوطه و اعمال کوانتش برزین روی مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی مناسب، عملگرهای نابودی و خلق را در این مورد تعیین کرده و نتایج حاصل از این دو روش را با هم مقایسه کنیم. در پایان روش کوانتش برزین را در مورد حرکت ذره روی کره به کار می‌بریم و عملگرهای نابودی و خلق تعیین شده را با آنهایی که توسط کوالسکی و رمبیلنسکی تعیین شده‌اند، مقایسه می‌کنیم.

۲. تحلیلی بر کار کوالسکی و رمبیلنسکی در حرکت ذره روی حلقه

کوالسکی و رمبیلنسکی با توجه به معادلهٔ ویژه مقداری حالت‌های همدوس استاندارد و تعریف عملگر یکانی $\hat{U} = e^{i\hat{\varphi}}$ به عنوان عملگر موقعیت و استفاده از لم بیکر هاسدورف در

۱. هدف از حل معادله گرما، تعیین تابعی است که در فیزیک کوانتومی از آن با عنوان انتشارگر یاد می‌شود. این تابع به صورت پیچش هستهٔ گرمایی و یک تابع پیوسته وکراندار است که هستهٔ گرمایی برای گروه‌ها و رویهٔ وابسته به آنها کاملاً تعریف شده است.

یک محاسبهٔ صریح، عملگر نابودی را برای حرکت ذره روی حلقه به صورت زیر:

$$\hat{Z} = e^{i(\hat{\varphi}+i\hat{J})} = \hat{U}e^{-\hat{J}-\frac{1}{2}}, \quad (۳)$$

تعیین کرده‌اند [۳] که با اندکی محاسبه می‌توان آن را در نمایش فوک به صورت زیر نوشت:

$$Z\,|\,j\rangle = e^{-j-\frac{1}{2}}\,|\,j+1\rangle, \quad (۴)$$

که $\{|\,j>\}$ مجموعه‌ای از بردارهای متعامد هستند که رابطهٔ بستاری را برآورده می‌کنند :

$$\sum_j |\,j\rangle\langle j\,| = \hat{I}, \quad (۵)$$

همچنین آنها، حالت‌های همدوس مربوطه را به عنوان ویژه بردار عملگر نابودی، به صورت زیر:

$$|\,l,\varphi\rangle = |\,\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{lj-ij\varphi} e^{-\frac{j^2}{2}}\,|\,j\rangle, \quad (۶)$$

و با رابطهٔ تفکیک واحد

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-l^2}\,|\,l,\varphi\rangle\langle l,\varphi\,| = \hat{I}, \quad (۷)$$

تعیین کردند که $\xi = e^{-l+i\varphi}$.

با نگاهی به رابطهٔ (۴) واضح است که عملگر معرفی شده در مقاله کوالسکی و رمبیلسکی، مشابه با عملگر خلق عمل می‌کند نه عملگر نابودی. به راحتی می‌توان نشان داد که $\hat{Z}' = e^{-i(\hat{\varphi}+i\hat{J})}$ گزینهٔ مناسبی برای عملگر نابودی است طوری که:

$$\hat{Z}' = \sum_j e^{j-\frac{1}{2}}\,|\,j-1\rangle\langle j\,|.$$

برای این انتخاب جدید می‌توان رابطهٔ جبری به صورت زیر را تحقیق کرد:

$$[\hat{J},\hat{Z}'] = -Z',\quad [\hat{J},\hat{Z}'^{\dagger}] = Z'^{\dagger}, \quad (۸)$$

که همتای جبر نوسانگر هماهنگ ساده به صورت

$$[\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a},\quad [\hat{N},\hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}^{\dagger}, \quad (۹)$$

برای عملگرهای بوزونی خلق و نابودی و عملگر تعداد است با این تفاوت که $[\hat{Z}',\hat{Z}'^{\dagger}] = 0$. همچنین بین عملگر نابودی $\hat{Z}'$ و عملگر معرفی شده در رابطهٔ (۲) می‌توان نوشت:

$$\hat{Z}' = \hat{T}\hat{Z}\hat{T}^{-1}, \quad (۱۰)$$

که $\hat{T}$ عملگر پاد یکانی وارونی زمانی است. از رابطهٔ بالا واضح است که هر چیزی که در یک جهت زمانی خلق شود در جهت مخالف نابود می‌شود.

به راحتی می‌توان نشان داد که با این انتخاب جدید برای عملگر نابودی، حالت‌های همدوس باروت جیراردلو یعنی:

$$|\,l,\varphi\rangle = |\,\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ij(\varphi+il)} e^{-\frac{j^2}{2}}\,|\,j\rangle.$$

نقش ویژه بردار عملگر نابودی ایفا می‌کنند.

در اینجا نشان می‌دهیم که می‌توان مباحث بالا را بر اساس ارتباط عملگرهای خلق ونابودی با مختلط ساز تیمن ثابت کرد. مزیت روشی که ما اینجا ارائه می‌دهیم در این است که این روش قابل تعمیم به ابعاد بالاتر است.

مختلط کننده ابزاری ریاضی است که توسط تیمن معرفی شده است. این تابع به ما این امکان را می‌دهد که یک قطبش مختلط روی فضای فاز از فضای پیکربندی ایجاد کنیم.

تیمن در مقالهٔ خود به هر تابع روی فضای فاز که برای آن $exp\{.,C\}$ همگرا است، اجازه می‌دهد که مختلط کننده باشد طوری که C معرف تابع مختلط کننده است و به صورت نسبت انرژی جنبشی بر بسامد زاویه‌ای تعریف می‌شود [۹ و ۱۰].

بر این اساس اگرمختصات موضعی روی رویهٔ دوتایی M (که در فیزیک می‌تواند فضای فاز باشد) را با x_k نشان دهیم مختصات مختلط شده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$z_k(m) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\{x_k,C\}_n(m), \quad (۱۱)$$

که در اینجا از کروشه پواسون با نمادگذاری زیر استفاده شده است:

$$m := (x_k, p_k), \{C,x_k\}_0 = x_k, \{C,x_k\}_{n+1} = \{C,\{C,x_k\}_n\},$$

و

$\{ z_k , z_k \} = \{ \bar{z}_k , \bar{z}_k \} = 0.$

تیمن همتای کوانتومی این نقطه از فضای فاز، یعنی

$$\hat{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n [\hat{x}, \hat{C}]_{(n)}}{n!} = e^{-\frac{\hat{C}}{\hbar}} \hat{x} e^{\frac{\hat{C}}{\hbar}}, \tag{۱۲}$$

را به عنوان عملگر نابودی معرفی می‌کند ($\hat{C}$ همتای کوانتومی مختلط کننده تیمن است).

اکنون با توصیفی که از مختلط کننده تیمن ارائه شد، در موقعیتی هستیم که از این ابزار ارزشمند ریاضی در تعیین عملگرهای خلق و نابودی مربوط به حرکت ذره روی حلقه بهره ببریم. با انتخاب تابع مختلط کنندهٔ کوانتومی به صورت $\hat{C} = \frac{\hat{J}^2}{2}$ می‌توان نوشت:

$$\hat{Z}'_1 = e^{-\frac{\hat{J}^2}{2}} \hat{x}_1 e^{\frac{\hat{J}^2}{2}},$$
$$\hat{Z}'_2 = e^{-\frac{\hat{J}^2}{2}} \hat{x}_2 e^{\frac{\hat{J}^2}{2}},$$

که

$$\hat{x}_1 = \frac{\hat{U} + \hat{U}^{\dagger}}{2}, \tag{۱۳}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\hat{U} - \hat{U}^{\dagger}}{2i}. \tag{۱۴}$$

با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد:

$$\hat{Z}'_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_j e^{-j-\frac{1}{2}} | j+1 \rangle \langle j | + \sum_j e^{j-\frac{1}{2}} | j-1 \rangle \langle j | \right\}, \tag{۱۵}$$

$$\hat{Z}'_2 = \frac{1}{2i} \left\{ \sum_j e^{-j-\frac{1}{2}} | j+1 \rangle \langle j | - \sum_j e^{j-\frac{1}{2}} | j-1 \rangle \langle j | \right\}. \tag{۱۶}$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۳) و (۱۴) مؤلفه‌های عملگر خلق نیز به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\hat{Z}'^{\dagger}_1 = e^{\frac{\hat{J}^2}{2}} \hat{x}_1 e^{-\frac{\hat{J}^2}{2}},$$
$$\hat{Z}'^{\dagger}_2 = e^{\frac{\hat{J}^2}{2}} \hat{x}_2 e^{-\frac{\hat{J}^2}{2}}.$$

با انتخاب ترکیب مناسبی از مؤلفه‌های عملگر نابودی و خلق، به راحتی می‌توان نشان داد:

$$(\hat{Z}'_1 - i\hat{Z}'_2) = e^{j-\frac{1}{2}} | j-1 \rangle \langle j | = e^{-i(\hat{\varphi} + i\hat{J})} = \hat{Z}',$$

$$(\hat{Z}'^{\dagger}_1 + i\hat{Z}'^{\dagger}_2) = e^{j+\frac{1}{2}} | j+1 \rangle \langle j | = e^{i(\hat{\varphi} - i\hat{J})} = \hat{Z}'^{\dagger}.$$

اثر عملگرهای نابودی و خلق روی کت پایه $| j \rangle$ به صورت زیر هستند:

$$Z' | j \rangle = e^{j-\frac{1}{2}} | j-1 \rangle, \tag{۱۷}$$

$$Z'^{\dagger} | j \rangle = e^{j+\frac{1}{2}} | j+1 \rangle. \tag{۱۸}$$

۳. تعیین حالت‌های همدوس و کوانتش برزین روی حلقه

هدف ما در این بخش، کوانتش به روش برزین برای حرکت ذرهٔ کوانتومی روی حلقهٔ S^1 با فضای فاز حلقهٔ مختلط به صورت:

$$\begin{aligned} S'_{\mathbb{C}} &= \left\{ \vec{a} \in \mathbb{C}^2 \middle| \vec{a}(\vec{x}, \vec{p}) = \cosh p \vec{x} + i \frac{\sinh p}{p} \vec{p} \right\}, \\ &= \left\{ \vec{a} = (a_1, a_2) = \left(\cos(\beta + ip), \sin(\beta + ip) \right) \right\}, \end{aligned} \tag{۱۹}$$

است. لازم به ذکر است که ما در این بخش، نمایش (β, m) که در مقالهٔ هال و میتچل [۸] آمده است را دنبال می‌کنیم نه نمایش (φ, l) کوالسکی و رمبیلنسکی.

ابزار مورد نیاز برای این منظور حالت‌های همدوس است. روشی که ما برای تعیین آنها پیش می‌گیریم بر اساس بیان هال و میتچل از حالت‌های همدوس برحسب هستهٔ گرمایی طبق رابطهٔ (۲) است.

این هستهٔ گرمایی برای حلقه مختلط به صورت زیر است [۸]:

$$\rho'_{\tau}(\vec{a}, \vec{x}) = (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\hat{\theta} - 2\pi n)^2}{2\tau}}, \tag{۲۰}$$

که با اعمال قاعده جمع پواسون [۱۱] به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\rho'_{\tau}(\vec{a}, \vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\hat{\theta}} e^{-\tau n^2}. \tag{۲۱}$$

که $\hat{\theta} = \cos^{-1}(\frac{\vec{a}.\vec{x}}{r^2})$ زاویهٔ مختلط است. با انتخاب بردار بهنجار ناپذیر به صورت زیر:

$$|\delta_x\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\beta}\,|n\rangle, \qquad (۲۲)$$

و در نظر گرفتن رابطهٔ (۲) به راحتی می‌توان حالت‌های همدوس را به صورت زیر از هستهٔ گرمایی استخراج کرد:

$$\left|\psi_1^{\tau}(\vec{a})\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau n^2}{2}} e^{in(\beta+ip)}|n\rangle, \qquad (۲۳)$$

که

$$N_1 = \sum_n e^{-\tau n^2} e^{2np} < \infty,$$

این حالت‌ها رابطهٔ تفکیک واحد را به صورت زیر برآورده می‌کنند:

$$\int_{\vec{x}\in S^1}\int_{\vec{x}.\vec{p}=0}\left|\psi_1^{\tau}(\vec{a})\right\rangle\left\langle\psi_1^{\tau}(\vec{a})\right| d\mu_1(\vec{a}) = \hat{I}_1, \qquad (۲۴)$$

که

$$d\mu_1(\vec{a}) = \left(\frac{N_1}{2\pi\sqrt{\pi\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{\tau}}\, dp\, d\beta,$$

واضح است که حالت‌های همدوس استخراج شده از هستهٔ گرمایی با حالت‌های همدوس بر اساس روش باروت و جیراردلو در بخش قبل، کاملا تطابق دارد.

می‌توان همتای کوانتومی دو مؤلفهٔ بردار شعاع مختلط $\vec{a}(a_1,a_2)$ را با اعمال کوانتش برزین یعنی رابطهٔ (۱) به صورت زیر تعیین کرد:

$$\hat{O}_{a_1} = O_{cos(\beta+ip)} = \frac{1}{2}\left\{\sum_m e^{\frac{\tau(m-\frac{1}{2})}{2}}|m-1\rangle\langle m| + \sum_m e^{\frac{-\tau(m+\frac{1}{2})}{2}}|m+1\rangle\langle m|\right\}, \qquad (۲۵)$$

$$\hat{O}_{a_2} = O_{sin(\beta+ip)} = \frac{1}{2i}\left\{\sum_m e^{\frac{\tau(m-\frac{1}{2})}{2}}|m-1\rangle\langle m| - \sum_m e^{\frac{-\tau(m+\frac{1}{2})}{2}}|m+1\rangle\langle m|\right\}, \qquad (۲۶)$$

به وضوح می‌توان تطابق این مؤلفه‌ها را به مؤلفه‌های عملگر نابودی، که در بخش قبلی به دست آمد، برای $\tau=1$ مشاهده کرد.

به طور مشابه می‌توان مؤلفه‌های عملگرهای خلق را به عنوان همتای کوانتومی مزدوج مؤلفه‌های بردار شعاع حلقهٔ مختلط نیز به دست آورد که برای آنها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\hat{O}_{\bar{a}_i} = \hat{O}_{a_i}|_{\tau\to-\tau}, \quad i=1,2. \qquad (۲۷)$$

به راحتی می‌توان روابط ویژه مقداری زیر را در مورد این عملگرها ثابت کرد:

$$\hat{O}_{a_i}\left|\psi_1^{\tau}(\vec{a})\right\rangle = a_i\left|\psi_1^{\tau}(\vec{a})\right\rangle,$$
$$\langle\psi_1^{\tau}(\vec{a})|\hat{O}_{\bar{a}_i} = \langle\psi_1^{\tau}(\vec{a})|\bar{a}_i.$$

همچنین با انتخاب ترکیب مناسبی از مؤلفه‌های عملگرهای خلق و نابودی می‌توان نوشت:

$$\hat{O}_{e^{i(\beta+ip)}} = \hat{O}_{a_1} + i\hat{O}_{a_2} = \sum_m e^{\frac{\tau(m-\frac{1}{2})}{2}}|m-1\rangle\langle m|,$$
$$\hat{O}_{e^{-i(\beta-ip)}} = \hat{O}_{\bar{a}_1} - i\hat{O}_{\bar{a}_2} = \sum_m e^{\frac{\tau(m+\frac{1}{2})}{2}}|m+1\rangle\langle m|.$$

اثر این عملگرها روی کت پایه $|m'\rangle$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{O}_a|m'\rangle = e^{\frac{\tau(m'-\frac{1}{2})}{2}}|m'-1\rangle, \qquad (۲۸)$$

$$\hat{O}_{\bar{a}}|m'\rangle = e^{\frac{\tau(m'+\frac{1}{2})}{2}}|m'+1\rangle. \qquad (۲۹)$$

ملاحظه می‌شود که نتایج این بخش کاملاً منطبق بر نتایج بخش قبل است که از بحث مختلط کنندهٔ تیمن به دست آمد.

۴. توصیف حرکت ذره روی کرهٔ S^2 با روش کوانتش برزین

کوالسکی و رمبیلنسکی در [۵] به بررسی حرکت ذره روی کره S^2 پرداخته‌اند. ما در این کار می‌خواهیم این کار را بر اساس روشی که در بخش ۳ پیش گرفتیم برای کرهٔ S^2 با مؤلفه‌های:

$$\vec{x} = (sin\theta\, cos\varphi, sin\theta\, sin\varphi, cos\theta)$$

و فضای فاز $T^*(S^2)$ که با کرهٔ مختلط $S^2{}_{\mathbb{C}}$ با مؤلفه‌های زیر یکریخت است:

$$\vec{a} = \begin{cases} x_1 + i\dfrac{sinh\, p}{p}p_1 = sin\theta_a\, cos\varphi_a, \\ x_2 + i\dfrac{sinh\, p}{p}p_2 = sin\theta_a\, sin\varphi_a, \\ x_3 + i\dfrac{sinh\, p}{p}p_3 = cos\theta_a, \end{cases} \qquad (۳۰)$$

انجام دهیم.

هستهٔ گرمایی روی $S^2_{\mathbb{C}}$ به صورت زیر است [۸]:

$$\rho_\tau^2(\vec{a},\vec{x})=(2\pi\tau)^{-1}e^{\frac{\tau}{8}}\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\int_\theta^\pi\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(\varphi-2\pi n)e^{-\frac{(\varphi-2\pi n)^2}{2\tau}}. \qquad (۳۱)$$

با به کاربردن قاعدهٔ جمع پواسون می‌توان هستهٔ گرمایی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_\tau^2(\vec{a},\vec{x})= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)e^{-\frac{\tau n(n+1)}{2}}\int_\theta^\pi\frac{\sin\varphi(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}d\varphi. \qquad (۳۲)$$

با استفاده از روابط مربوط به چند جمله‌ای های لژاندر و ارتباط آنها با هماهنگ‌های کروی می‌توان رابطهٔ بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_\tau^2(\vec{a},\vec{x})= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}e^{-\frac{\tau n(n+1)}{2}}Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta_a,\varphi_a), \qquad (۳۳)$$

با انتخاب بردار صوری (بهنجار نشده) زیر

$$|\delta_x\rangle=\sum_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)|l,m\rangle, \qquad (۳۴)$$

می‌توان حالت‌های همدوس برای یک ذرهٔ متحرک روی کره را به صورت زیر به دست آورد:

$$|\psi_\tau^2(\vec{a})\rangle=\frac{1}{\sqrt{N_2}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}e^{-\frac{\tau}{2}l(l+1)}Y_{lm}(\theta,\varphi), \qquad (۳۵)$$

این حالت‌های همدوس رابطهٔ تفکیک واحد زیر را برآورده می‌کنند:

$$\int_{\vec{x}\in s^2}\int_{\vec{x}.\vec{p}=0}\left|\psi_2^\tau(\vec{a})\rangle\langle\psi_2^\tau(\vec{a})\right|d\mu_2(\vec{a})=\hat{I}_2, \qquad (۳۶)$$

که

$$d\mu_2(\vec{a})=\frac{e^{-\frac{\tau}{2}}}{2\pi\sqrt{(2\pi\tau)^3}}\int_{2p}^{\infty}\frac{se^{-\frac{s^2}{4\tau}}}{\sqrt{\cosh s-\cosh 2p}}ds\frac{\sinh 2p}{2p}d\vec{x}d\vec{p}. \qquad (۳۷)$$

با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد که این حالت‌ها کاملاً بر حالت‌های همدوس که توسط کوالسکی و رمبیلنسکی برای حرکت ذره روی کره در [۵] به دست آمده، تطابق دارد.

با اعمال کوانتش برزین، روی مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ می‌توان همتای کوانتومی آنها را به صورت زیر به دست آورد:

$$\hat{O}_{a_1}=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\sum_{l,m}e^{\tau l}\left[b_{11}|l-1,m+1\rangle\langle l,m|-b_{12}|l-1,m-1\rangle\langle l,m|\right]\\ +\sum_{l,m}e^{-\tau(l+1)}\left[b_{21}|l+1,m-1\rangle\langle l,m|-b_{22}|l+1,m+1\rangle\langle l,m|\right],\end{array}\right\} \qquad (۳۸)$$

$$\hat{O}_{a_2}=\frac{i}{2}\left\{\begin{array}{l}\sum_{l,m}e^{\tau l}\left[-b_{11}|l-1,m+1\rangle\langle l,m|-b_{12}|l-1,m-1\rangle\langle l,m|\right]\\ +\sum_{l,m}e^{-\tau(l+1)}\left[b_{21}|l+1,m-1\rangle\langle l,m|+b_{22}|l+1,m+1\rangle\langle l,m|\right],\end{array}\right\} \qquad (۳۹)$$

$$O_{a_3}=\sum_{l,m}e^{\tau l}c_{11}|l-1,m\rangle\langle l,m|+e^{-\tau(l+1)}c_{22}|l+1,m\rangle\langle l,m|, \qquad (۴۰)$$

که

$$\begin{aligned} b_{11}&=\sqrt{\frac{(l-m-1)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}},\\ b_{12}&=\sqrt{\frac{(l+m-1)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}},\\ b_{21}&=\sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}},\\ b_{22}&=\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}. \end{aligned} \qquad (۴۱)$$

و

$$\begin{aligned} c_{11}&=\sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}},\\ c_{22}&=\sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}. \end{aligned} \qquad (۴۲)$$

با نگاهی به مؤلفه‌های عملگر نابودی برای حرکت ذره روی کره، که توسط کوالسکی و رمبیلنسکی در مرجع [۵] به دست آمده، می‌توان مشاهده کرد که آنها با مؤلفه‌های عملگر نابودی به دست آمده با روش ما برای $\tau=1$ منطبق است.

با تکرار محاسبات، به راحتی می‌توان عملگرهای خلق را نیز برای حرکت ذره روی کرهٔ دو بعدی به دست آورد که برای آنها خواهیم داشت:

$$\hat{O}_{\bar{a}_i}=\hat{O}_{a_i}\big|_{\tau\to-\tau},\quad i=1,2,3.$$

همچنین می‌توان روابط ویژه مقداری زیر را برای این عملگرها نیز تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} &\hat{O}_{a_i}\left|\psi_2^\tau(\vec{a})\right\rangle=a_i\left|\psi_2^\tau(\vec{a})\right\rangle,\\ &\langle\psi_i^\tau(\vec{a})|\hat{O}_{\bar{a}_i}=\langle\psi_i^\tau(\vec{a})|\bar{a}_i,\quad i=1,2,3. \end{aligned}$$

۵. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله حالت‌های همدوس مورد نیاز برای ذرهٔ متحرک

روی حلقه و کرهٔ $S^۲$ را بر اساس هسته گرمایی ارائه شده توسط هال و میتچل معرفی کردیم. همچنین مؤلفه‌های عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت یک ذرهٔ کوانتومی روی حلقه بر اساس مختلط ساز تیمن را بررسی کردیم که کاملاً بر کار کوالسکی و رمبیلنسکی منطبق شد. نهایتاً به روش کوانتش برزین عملگرهای خلق و نابودی را برای حرکت ذره روی حلقه و کرهٔ $S^۲$ دنبال کردیم که خوشبختانه تطابق خیلی خوبی بین نتایج ما و کارهای کوالسکی- رمبیلنسکی برای $\tau=۱$ حاصل شد. با توجه به این که می‌توان روش مبتنی بر کوانتش برزین را به ابعاد بالاتر تعمیم داد این روش را می‌توان برای فضاهای فاز متقارن غیر از کره نیز به کار برد.

مراجع

1. R J Glauber, *Phys .Rev*. **131**(1963) 2766.
2. J P Gazeau , "*Coherent states in quantum physics*", Wiley-VCH, Berlin (2009).
3. K Kowalski, J Remielinski, and L C Papaloucas, *J . Phys.A: Math.Gen* **29** (1996) 4149.
4. A Perelomov, "*Generalized coherent states and their application*", Springer-verlag, Berlin, Heidelerge, Newyork, London, Parise, Tokyo (1986).
5. K Kowalski and J Remielinski, *J. Phys. A : Math. Gen*, **33** (2000) 6035.
6. A O Barut, "*Dynamic group and generalized symmetries in quantum theory*" University of Canterbury, Christchurch (1971).
7. E A Berezin, *Common. Math .Phy*. **40** (1975) 153.
8. B Hall and J J Mitchell, *J. Math. Phys.* **43** (2002).
9. T Thiemann, *Class. Quantum Grav*, **23** (2006) 2063.
10. T Thiemann, "*Modern canonical quantum general relativity*",Cambridge University Press, (2007).
11. B I S Gradshteyn and I M Ryshik, Tables of Integrals, Series and Products, Fizmatgiz, Moscow. Lett. A (1994).