مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۱، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۴۰۰
DOI: 10.47176/ijpr.21.2.11150

تعمیم رابطهٔ ناجابه‌جایی هندسی به یک خمینهٔ عمومی

ابوالفضل جعفری

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه شهرکرد

پست الکترونیکی: jafari-ab@sku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۲۱ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۹/۱۰/۱۳)

چکیده

در چارچوب مکانیک کوانتومی و بر پایهٔ هندسهٔ ناجابه‌جایی در فضا– زمان مینکوفسکی، رابطهٔ ناجابه‌جایی مختصات را به فضا– زمانی غیر از فضا– زمان مینکوفسکی تعمیم می‌دهیم. در این مقاله، با استناد به اختیار در وارد کردن عملگر واحد در حوزهٔ کوانتومی، از عملگر انتقال بهره برده و از آن عملگر ستاره‌ی وایل– مویال را استخراج می‌کنیم. سپس این عملگر را برای یک فضا– زمان عموی‌تر گسترش می‌دهیم و با استفاده از تعمیم یافتهٔ عملگر ستارهٔ وایل– مویال و اعمال آن بین مختصات تا مرتبهٔ اول از پارامتر انتقال، رابهٔ ناجابه‌جایی هندسی را در یک خمینهٔ عمومی پیدا می‌کنیم. از اصلی‌ترین مفاهیم استفاده شده در این مقاله، هم‌ارزی موضعی خمینهٔ شبه‌ریمانی با فضا– زمان مینکوفسکی است.

واژه‌های کلیدی: ناجابه‌جایی هندسی، مکانیک کوانتومی، عملگر انتقال، ضرب ستارهٔ وایل– مویال، هم‌ارزی موضعی

۱. مقدمه

فضا – زمان پیوسته، بازه‌ها و فواصل کوچک را دسترس‌پذیر می‌سازند. امکان دسترسی به فواصل کوتاه است که ما را به مفاهیم درست دیفرانسیل خمینه‌ها می‌رساند. ما امروزه توانایی نوشتن قوانین بنیادی فیزیک روی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر را به دست آورده‌ایم. از این دست، می‌توان به نظریهٔ میدان‌ها، میدان‌های پیمانه‌ای، میدان‌های کوانتومی و نظریهٔ گرانش اشاره کرد. البته این منظر نیز بدون مشکل نیست. باید گفت که فیزیکدانان همواره در حوالی مرزهای مقیاس، مانند نسبت سرعت ذرات به سرعت نور، یا مطالعهٔ فیزیک در اندازه‌های فضایی کوچک مانند اندازه‌های اتمی، با چالش‌ها و مشکلاتی برخورد می‌کنند. در عبور از مقیاس‌های اتمی به مقیاس‌های زیرتر نیز به یک دشواری عظیم‌تر و البته جدید برخورد می‌کنیم. این مشکل، تغییر خود فیزیک است [۱-۴] . اشنایدر[۱] به منظور حل برخی از مسائل در حوزهٔ نظریهٔ ریسمان، فرضی کرد مبنی بر این که مختصات هندسی فضا با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند و به این ترتیب از حد هندسهٔ نقطه‌ای عبور کرد. هرچند این حدس، نظریهٔ مورد مطالعه را بهنجارپذیر کرد ولی به زودی خود به مشکل دیگری تبدیل شد و آن تغییر فیزیک روی

۱. Scnider

خمینه‌هایی بود که در آنها ناجابه‌جایی بین مختصات فضا پذیرفته شده بود [۵-۹]. ما می‌توانیم هندسهٔ ناجابه‌جایی را با تعویض مختصات y با عملگرهای $\hat{y}$ مشخص کنیم که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$[\hat{y}^{\mu}, \hat{y}^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu}(\hat{\mathbf{y}}), \qquad (۱)$$

پارامتر $\theta^{\mu\nu}$ کمیتی حقیقی و پادمتقارن است. آن را پارامتر ناجابه‌جایی می‌نامند. شاخص‌های یونانی نشان دهندهٔ مولفه‌های فضا- زمان هستند و مقادیر ۰ تا ۳ را اختیار می‌کنند. در مراجع [۹ و ۱۰] نشان داده می‌شود که بر اساس قانون علیت، مولفهٔ زمان نمی‌تواند در رابطهٔ (۱) مشارکت کند. بنابراین رابطهٔ ناجابه‌جایی در یکی از عام‌ترین شکل‌های خود به صورت

$$[\hat{y}^{i}, \hat{y}^{j}] = i\theta^{ij}(\hat{\mathbf{y}}), \qquad (۲)$$

خواهد بود. متغیرهای لاتین، شاخص‌های فضایی بوده و ارزش آنها ۱، ۲ و ۳ خواهد بود. به هر حال پارامتر ناجابه‌جایی در حالت کلی تابعی از مختصات (در یک برداشت عمومی، تابعی از مختصات کامل حتی شامل زمان) است. از نظر هندسی و از منظر فیزیک، در یک رژیم آرام_ تغییر، خواص خمینه‌ها مستقل از زمان است. بنابراین هر چند این مطلب کلیت ندارد ولی در این مقاله پارامتر ناجابه‌جایی را فقط تابع مختصات فضایی و مشخصات هندسی فضا- زمان را نیز مستقل از زمان می‌دانیم. آنچه که از پارامتر ناجابه‌جایی در دسترس داریم شکل ماتریسی آن در فضا- زمان مینکوفسکی است:

$$\theta^{ij} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \theta^{۱۲} & \theta^{۱۳} \\ ۰ & \theta^{۲۱} & ۰ & \theta^{۲۳} \\ ۰ & \theta^{۳۱} & \theta^{۳۲} & ۰ \end{pmatrix}, \qquad (۳)$$

همهٔ کمیت‌های رابطهٔ (۳) کمیت‌هایی ثابت هستند.

با تبدیل مختصات به عملگرهای جابه‌جاناپذیر، ابهامی در حاصل ضرب توابع این مختصات ظاهر خواهد شد که با نگاشت وایل- مویال می‌توان این ابهام را مرتفع کرد. نگاشت وایل- مویال در شکل نهایی خود، به صورت ضرب ستاره ($star-product$) بین کمیت‌های شامل مختصات ناجابه‌جایی نمایش داده می‌شود:

$$\hat{f}(\hat{y})\hat{g}(\hat{y}) = f(y)\hat{*}\, g(y), \qquad (۴)$$

که طبق تعریف این نگاشت، با معرفی $\hat{*} = e^{\frac{i}{۲}\overleftarrow{\partial}_i\theta^{ij}\overrightarrow{\partial}_j}$، حاصل ضرب دو تابع دلخواه در هندسهٔ ناجابه‌جایی چنین بیان می‌شود [۳، ۴ و ۱۰]:

$$f(y)\hat{*}\, g(y) = f(y)g(y) + \frac{i}{۲}\theta^{ij}\frac{\partial f(y)}{\partial y^i}\frac{\partial g(y)}{\partial y^j} + \dots, \qquad (۵)$$

لازم به ذکر است که کمیت‌های کلاه‌دار - Hat - مختصات و یا توابعی از مختصات ناجابه‌جایی هستند و مختصات یا توابع بدون کلاه (Hat) مختصات جابه‌جاپذیر یا توابعی از مختصات جابه‌جاپذیر هستند. شکل اصلی ضرب ستاره به صورت $\hat{*} = e^{\frac{i\theta^{ij}}{۲}\overleftarrow{\partial}_i \otimes \overrightarrow{\partial}_j}$ است که نمایش تانسوری آن چگونگی اثر کردن مشتقات روی توابع است. البته رابطهٔ آمده در این مقاله نیز ابهامی ندارد و ما می‌توانیم از این شکل از نگاشت ضرب ستاره استفاده کنیم. قانون ساده‌ای نیز وجود دارد که براساس آن می‌توان فیزیک روی هندسهٔ ناجابه‌جایی را به راحتی از نسخهٔ معمولی آن بازنویسی کرد. کافی است که در هر نظریه به جای ضرب معمولی تعریف شده بین توابع یا کمیت‌ها، ضرب ستاره جایگذاری کنیم [۳، ۴ و ۱۰].

بر اساس اصل هم‌ارزی در نسبیت عام، همواره امکان دستیابی به نسبیت خاص به صورت موضعی وجود دارد. در مختصات نرمال فرمی، هر ابرسطح فضاگونه با $x^۰$ ثابت، توسط مجموعه‌ای از ژئودزیک‌های فضایی ساخته می‌شود که بر ژئودزیک زمانگونه که رویداد در مسیر آن در حال وقوع است، متعامد هستند. در مقابل آن، مختصات نرمال ریمان به صورت محلی و موضعی در همسایگی رویداد تعریف می‌شوند. در حد همسایگی‌های بسیار کوچک، می‌توان مسیرهای ژئودزیک را به صورت مستقیم در نظر گرفت. هرچند تحقق جملهٔ قبل به شدت به شرایط متریک وابسته است، مادامی که در هندسهٔ فضا- زمان و یا دست کم در همسایگی مورد مطالعه، تکینگی نباشد، تعبیر آن، دسترس‌پذیر است. در این شرایط، می‌توان از بسط دنباله‌دار تانسور متریک و بسط ضرایب کریستوفل با پارامتر بسط تانسور خمش ریمان استفاده کرد [۱۱-۱۶].

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -1 - R_{0l0k}x^l x^k\,,\\
g_{0i} &= -\frac{2}{3}R_{0lik}x^l x^k\,,\\
g_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iljk}x^l x^k\,,\\
g &= -1 + \frac{1}{3}(R_{lk} - 2R_{0l0k})x^l x^k\,.
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

۲. ارائهٔ نظریه

در کار حاضر، فرض می‌کنیم که تمام توابع متعلق به C^{∞} بوده و توابعی هموار و مشتق‌پذیری بی‌انتها دارند و در مرزهای فضایی سریع‌تر از هر تابع دیگری (سریع‌تر از تابع $\frac{1}{r}$) به صفر میل می‌کنند. همچنین در سطح مکانیک کوانتومی، عملگر انتقال انباشته را به صورت $\widehat{T} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{\Lambda}.\widehat{\mathbf{P}}}$، با تاکید بر نقش عملگر تکانهٔ $\widehat{P}$ و مولد انتقال، می‌شناسیم. انباشتگی در انتقال (عملگر انتقال انباشته) به این معنی است که این عملگر قابل تفکیک به عملگرهای انتقال جدا شده در جهت‌های خالص نیست. نمونهٔ پیشین آن در عملگر دوران سه‌بعدی است که به علت ناسازگاری بین مولدهای دوران در جهت‌های خالص، لزوماً نمی‌توان یک دوران کلی تفکیک شده را به سه عملگر پشت سرهم جدا کرد. البته با کمک زوایای اویلر و به صورت قراردادی، این جداسازی امکان‌پذیر است. در یک نگاه جهانشمول، Λ کمیتی برداری و از جنس طول است و برای داشتن بسط رابطهٔ عملگر انباشته، عدد طبیعی nی وجود دارد که نامساوی (به ازاء نرم $|\Lambda|$) $\Lambda^n <<$، دسترس‌پذیر است و این نامساوی کمیت مقیاس منطقی دارد. از منظر فیزیک، اندازهٔ ویژه مقادیر متناظر با عملگر انتقال – که بعداز این به جای عملگر انتقال انباشته به کار می‌بریم – می‌بایست همگرا و دسترس‌پذیر باشد. این دلیل برای مطلب بیان شده کافی است. در واقع کوچک بودن پارامتر انتقال یک شرط کافی برای تحقق مطلب بیان شده است. در واقع لزومی ندارد کمیت انتقال کوچک باشد ولی برای داشتن بسط عملگر انتقال، این مطلب ضروری است. می‌توان شرط کوچکی پارامتر انتقال را به ناحیه‌ای از فضا که آن را با Ω نشان می‌دهیم، محدود کرد. در این‌صورت عملگر انتقال به صورت خوش‌تعریف $\widehat{T}(\Omega) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{\Lambda}.\widehat{\mathbf{P}}}$ است. واضح است که در این همسایگی، اجزاء Λ شرط زیر را اغناء می‌کنند:

$$
\Lambda_i(\mathbf{y}) = \begin{cases}\Lambda_i\,, & y \in \Omega\\ 0, & y \in \partial\Omega \cup \Omega',\end{cases}
\tag{۷}
$$

در این‌صورت دسترس‌پذیر بودن انتقال با فرض کوچکی همسایگی Ω بدیهی است.

اگر هندسهٔ فضا- زمان رابطهٔ ناجابه‌جایی داشته باشد، آنگاه تفکیک انتقال انباشته به انتقال‌های خالص دسترس‌پذیر نخواهد بود: $e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda_x\widehat{P}_x}e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda_y\widehat{P}_y} \neq e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{\Lambda}.\widehat{\mathbf{P}}}$؛ چرا که رابطهٔ بدیهی ترتیب انتقال $\widehat{T}_i\widehat{T}_j = \widehat{T}_j\widehat{T}_i$ اکنون برقرار نیست. بدون از دست دادن کلیت مسئله و در یک اقدام جالب، همسایگی Ω را در حوالی مبداء مختصات می‌گیریم. بنابراین می‌توانیم پارامتر انتقال را به صورت $\mathbf{\Lambda} = y_i\hat{e}^i$ در نظر بگیریم. دیده خواهد شد که انتخاب

$$
\mathbf{\Lambda} = y_1\hat{i} - y_2\hat{j},
\tag{۸}
$$

از حجم کار خواهد کاست و انتخاب بهتری خواهد بود. با توجه به دو رابطهٔ $< x|e^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{P}_x} \propto < x-a|,$ و $e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{P}_x}|x> \propto |x-a>,$ دیده می‌شود که اثر تکانه روی "کت" و "برا" متفاوت است. تفاوت آنها در علامت آنها است ($< x|\widehat{p}_x \propto (-\frac{i}{\hbar}\partial_x) < x|,$، $\widehat{p}_x|x> \propto |x>(+\frac{i}{\hbar}\partial_x)$). این همان دلیل هرمیتی بودن آن است. این تفاوت علامت فقط در زمان نمایش مکان و اطلاق عمل از چپ یا راست اهمیت دارد.

جابه‌جاگرها نیز به صورت‌های $< x|[x,\widehat{p}_x]|\psi> = x(-i\partial_x)\psi(x) - (-i\partial_x)(x\psi(x)) = i,$ و

$$
<\psi|[\widehat{p}_x, x]|x> = \bar{\psi}(x)(+i\partial_x)x - (\bar{\psi}(x)x)(+i\partial_x) = -i,
$$

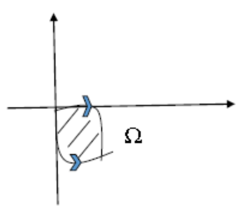
این ادعا را نشان می‌دهند. این ویژگی نیز در این مقاله بدون ابهام است.

در مکانیک کوانتومی، عملگر واحد $\widehat{\Im} = \int dv|\mathbf{y}><\mathbf{y}|$ را می‌توان به دلخواه وارد محاسبات کرد. در این رابطه $dv = d^{d-1}y$ دیفرانسیل حجم در فضا- زمان d بعدی است. این را قانون اختیار می‌نامیم و آن را دربارهٔ عملگر انتقال به کار خواهیم برد. با وارد کردن این عملگر در نمایش عملگر انتقال، در همسایگی Ω، پارامتر انتقال، شرط کوچکی خود را به

حدود انتگرال خواهد داد و این تفویض حدود نیز بدون ابهام قابلیت رفت و برگشت دارد. برای راحتی نوشتار می‌گیریم $\hbar = 1$، به این ترتیب برای ترکیب انتقال جمعی در هندسهٔ ناجابه‌جایی و با حفظ جمله‌ها تا مرتبهٔ اول از پارامتر انتقال، عملگر انتقال چنین خواهد شد: $\hat{T}_i\hat{T}_j = e^{-i\Lambda_i\hat{p}_i}e^{-i\Lambda_j\hat{p}_j} = e^{-i\Lambda_i\hat{p}_i-i\Lambda_j\hat{p}_j-\frac{1}{2}[\Lambda_i\hat{p}_i,\Lambda_j\hat{p}_j]+0}$. در این مقاله، همواره از مراتب بالاتر کمیت‌های کوچک صرفنظر می‌کنیم و بدون ذکر صریح، آن‌را در مورد همهٔ روابط رعایت خواهیم کرد. در مکانیک کوانتومی و در دیدگاه هایزنبرگ، تبدیل و انتقال توابع در همسایگی مبداء و برای یک جهت خاص به صورت $f(y) = e^{+iy\hat{p}}f(0)e^{-iy\hat{p}}$ داده می‌شود. این رابطهٔ زمانی وقتی اعتبار دارد که عملگر انتقال در دسترس باشد که الزام بر کوچک بودن همسایگی انتقال است. برای سادگی در تکرار نوشتار، عملگرهای جدیدی را تعریف می‌کنیم: $\hat{W} = \mathbf{\Lambda}.\hat{\mathbf{p}}$ و $\hat{M} = \hat{\mathbf{p}}.\mathbf{\Lambda}$. پیرو مطالب بالا، می‌توان چنین نوشت

$$f(y)g(y) = e^{+iy\hat{p}_y}f(0)e^{-iy\hat{p}_y}e^{+iy\hat{p}_y}g(0)e^{-iy\hat{p}_y} = e^{+iy\hat{p}_y}f(0)g(0)e^{-iy\hat{p}_y},$$

عملگر انتقال جهت- خالص را که در رابطهٔ حاصل ضرب و بین دو تابع در هم ضرب شده $f(0)$ و $g(0)$ و در راستای محورهای انتخاب شده (جهت- خالص) قرار دارد عملگر میانی می‌نامیم. در ادامه، این عملگر نقش تعیین کننده‌ای در روند محاسبات ما خواهد داشت. حذف شدن عملگر میانی، معنی بسیار جالبی دارد: حاصل ضرب توابع در همسایگی مبداء، برابر است با انتقال حاصل ضرب آنها در مبداء. بر اساس این نتیجه، به دنبال همسایگی و چگونگی انتقال در حوالی مبداء خواهیم بود. همسایگی و مسیر انتقال جهت- خالص را به صورت



در نظر می‌گیریم. در چارچوب مختصات فرمی، محورهای بالا را در جهت‌های اصلی و ژئودزیک‌ها مثلا x و y (یعنی y^1 و y^2) در نظر می‌گیریم. تقاضا می‌کنیم که یکی از توابع در مسیر اول و تابع دیگر در مسیر دوم انتقال داده شوند. به این ترتیب که در انتقال دو تابع در صورتمندی هایزنبرگ، تابع سمت راست حاضر در ضرب، ابتدا در جهت محور افقی و سپس در راستای محور عمودی انتقال یابد در حالی که تابع سمت چپ، ابتدا در جهت محور عمودی و پس از آن در راستای محور افقی انتقال داده شود. بنابراین برای عملگر میانی خواهیم داشت:

$$e^{+i\hat{p}_y\Lambda_2}\,e^{+i\hat{p}_x\Lambda_1}\,e^{-i\Lambda_2\hat{p}_y}\,e^{-i\Lambda_1\hat{p}_x} = e^{i\hat{\mathbf{M}}-i\hat{\mathbf{W}}-\hat{p}_y[\Lambda_2,\Lambda_1]\hat{p}_x}.$$

همچنین از راه و روش مشابه، می‌توان به رابطهٔ دیگری رسید:

$$e^{+i\hat{p}_y\Lambda_2}\,e^{+i\hat{p}_x\Lambda_1}\,e^{-i\Lambda_2\hat{p}_y}\,e^{-i\Lambda_1\hat{p}_x} = e^{i\hat{\mathbf{M}}-i\hat{\mathbf{W}}-\frac{1}{2}\hat{p}_y[\Lambda_2,\Lambda_1]\hat{p}_x+\frac{1}{2}\hat{p}_x[\Lambda_1,\Lambda_2]\hat{p}_y},$$

به این ترتیب نتیجه برابر است با

$$e^{+i\hat{p}_y\Lambda_2}\,e^{+i\hat{p}_x\Lambda_1}\,e^{-i\Lambda_2\hat{p}_y}\,e^{-i\Lambda_1\hat{p}_x} = e^{i\hat{\mathbf{M}}-i\hat{\mathbf{W}}-\frac{1}{2}\hat{p}_i[\Lambda^i,\Lambda^j]\hat{p}_j}$$

که با انتخاب رابطهٔ (۸)، جملهٔ اول صفر خواهد شد

$$i\hat{\mathbf{M}} - i\hat{\mathbf{W}} = 0,$$

آنگاه رابطهٔ نهایی به شکل معادلهٔ

$$e^{+i\hat{p}_y\Lambda_2}\,e^{+i\hat{p}_x\Lambda_1}\,e^{-i\Lambda_2\hat{p}_y}\,e^{-i\Lambda_1\hat{p}_x} = e^{-\frac{1}{2}\hat{p}_i[\Lambda^i,\Lambda^j]\hat{p}_j}, \qquad (۹)$$

خواهد شد. با در نظر گرفتن ناحیهٔ انتقال که قبلا در نظر گرفته‌ایم ، نمایش مکانی عملگر میانی که به صورت رسمی $e^{-\frac{1}{2}\int_\Omega dxdy|x>\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i}[\Lambda^i,\Lambda^j]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\frac{\vec{\partial}}{\partial y_j}<y|}$ است، به صورت بدون ابهام $e^{-\frac{1}{2}\int_\Omega ds|s>\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s_i}[\Lambda^i,\Lambda^j]\frac{\vec{\partial}}{\partial s_j}<s|}$ نیز بیان می‌شود. علامت اثر از چپ یا راست به واسطهٔ عبور "کت" یا "برا" بوده است. این عملگر در نهایت برای مورد بدون ابهام به صورت

$$<x|e^{-\frac{1}{2}\int_\Omega dzds|z>\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z_i}[\Lambda^i,\Lambda^j]\delta(\mathbf{z}-\mathbf{s})\frac{\vec{\partial}}{\partial s_j}<s|}|y>, \qquad (۱۰)$$

ساخته و به کار برده می‌شود. با اعمال فرض (۸)، رابطهٔ ناجابه‌جایی بین Λ-ها به صورت $[\Lambda^i,\Lambda^j]_{\substack{\Lambda^1=\hat{y}^1\\ \Lambda^2=-\hat{y}^2}} = -\frac{i}{2}\theta^{ij}$ خواهد شد و بر اساس آن ضرب توابع روی خمینهٔ ناجابه‌جایی پس از انتقال، به صورت رابطهٔ

$<\hat{f}|\hat{g}> = <f|\hat{*}|g> = <f|e^{\frac{i}{2}\hat{p}_i\theta^{ij}\hat{p}_j}|g>$ در خواهد آمد که نمایش مکانی به صورت زیر دارد:

$$\begin{aligned}&\int_{all\,space} dx<f|x><x|e^{\frac{i}{2}\int_\Omega ds|s>\frac{\partial}{\partial s^i}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial s^j}<s|}|y><y|g>\\ &=\int_{all\,space} dx(f(x)<x|\{\Im+\\ &\frac{i}{2}\int_\Omega ds|s>\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s^i}\theta^{ij}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s^j}<s|+..\}|y>g(y))\\ &=\int_{all\,space} dx(f(x)\delta(x-y)g(y)+\\ &\frac{i}{2}\int_\Omega ds\, f(x)\delta(x-s)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s^i}\theta^{ij}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s^j}\delta(s-y)g(y)+..)\\ &=f(y)g(y)+\frac{i}{2}(\frac{\partial}{\partial y^i}f(y))\theta^{ij}(\frac{\partial}{\partial y^j}g(y))+...,\end{aligned} \tag{۱۱}$$

در حذف دلتای دیراک در رابطهٔ بالا ابهامی نیست زیرا کمیت‌های زیر انتگرال، جابه‌جاپذیر شده‌اند.

۳. تعمیم به یک هندسهٔ عمومی

در این بخش عملگر ستاره‌ساز وایل– مویال که در بخش قبل پیدا کرده‌ایم را به فضا– زمانی غیر از فضا– زمان مینکوفسکی تعمیم خواهیم داد. برای این منظور، دقت می‌کنیم که زمان در مکانیک کوانتومی به صورت عملگر ظاهر نمی‌شود و در رابطهٔ ناجابه‌جایی نیز مشارکت نمی‌کند. دست کم جملهٔ دوم، فرض اولیهٔ ما در این مقاله است. در دیدگاه چارچوب فرمی، صفحات فضایی در محل رویداد از فضا– زمان بر ژئودزیک متعامد بوده و برای این ابر سطح‌ها، زمان ثابت است. پس می‌توانیم همهٔ کمیت‌ها شامل "کت‌ها"، "براها" و عملگرها و همچنین عملگر واحد را تابع زمان بدانیم ولی در ابرسطح‌ها آنها را بدون تغییر بگیریم. جملهٔ بالا به این معنی است که برای یک فضا– زمان d بعدی، عملگر واحد برابر است با

$$\Im(t)=\int_{all\,space} d^{d-1}\mathbf{y}|\mathbf{y};t>\sqrt{-g(\mathbf{y};t)}<\mathbf{y};t|,$$

در این رابطه و در ادامه در همهٔ روابط، $-g(\mathbf{y})$ دترمینان متریک است. در ادامه بدون از دست دادن کلیت مسئله، $|\mathbf{y};t>$ را به صورت $|y>$ نمایش می‌دهیم. در این موقعیت می‌پذیریم که کلیهٔ کمیت‌ها و عملگرها به خصوص دیفرانسیل حجم $d^d y = d^{d-1}\mathbf{y}dt\delta(t-\tau)$، براساس زمان ابرسطح، τ، قابل بازنویسی هستند. به این ترتیب عملگر واحد نیز به صورت $\Im(t)=\int_{all\,space} d^d y|y>\sqrt{-g(y)}<y|,$ بوده و بر حسب مختصات کامل نوشته می‌شود.

در مرجع [۱۵] و در هندسهٔ معمولی، تکانهٔ عمومی به صورت

$$<x|\hat{D}_k|y> = -i\frac{\partial}{\partial x^k}\delta(x,y)-\frac{i}{4}(\frac{\partial}{\partial x^k}ln(-g(x))\delta(x,y),$$

تعریف شده‌است که در آن از تعریف $<x|y>\equiv\delta(x,y)=\frac{\delta(x-y)}{\sqrt{-g(x)}}$ استفاده شده است. رابطهٔ آخر در هندسهٔ ناجابه‌جایی درست نیست و مورد تردید قرار می‌گیرد و به عنوان انتگرالده و زیر انتگرال، به شکل قانون تعویض $\sqrt[4]{-g(\hat{x})}\delta(\hat{x},\hat{y})\sqrt[4]{-g(\hat{y})}=\delta(\hat{x}-\hat{y})$ تصحیح می‌شود. اثبات درستی این تصحیح با وارد کردن عملگر واحد بین دو کمیت و بررسی نتیجهٔ نهایی میسر است:

$$\begin{aligned}&<f|g>=\int d\hat{x}\int d\hat{y}<f|\overline{x}><\overline{x}|\overline{y}><\overline{y}|h>=\\ &\int d\hat{x}\int d\hat{y}f(\hat{x})\sqrt{-g(\hat{x})}\delta(\hat{x},\hat{y})\sqrt{-g(\hat{y})}h(\hat{y}),\end{aligned} \tag{۱۲}$$

رابطهٔ (۱۲) به عنوان انتگرالده قابل تعمیم به صورت کلی‌تر $A(\hat{x},\hat{y})\delta(\hat{y},\hat{z})=\delta(\hat{x},\hat{y})A(\hat{y},\hat{z}),$ است چرا که بر اساس قانون اختیار

$$\begin{aligned}&<\hat{x}|\hat{A}|\hat{y}>=\\ &\int d\hat{z}\,\delta(\hat{x},\hat{z})A(\hat{z},\hat{y})=\int d\hat{z}\,A(\hat{x},\hat{z})\delta(\hat{z},\hat{y}),\end{aligned} \tag{۱۳}$$

درستی روابط (۱۲) و (۱۳) به شکل عمومی، فقط به صورت انتگرالده و زیر انتگرال صحیح است. به این ترتیب قانونی نزدیک‌تر خواهیم داشت: $\sqrt{-g(\hat{x})}\delta(\hat{x},\hat{y})=\delta(\hat{x}-\hat{y})=\delta(\hat{x},\hat{y})\sqrt{-g(\hat{y})}$.

این روابط در بخش بعدی، بسیار کارآمد هستند و حذف توابع زیر انتگرال را ممکن می‌سازند. در ادامه، لازم به ذکر است که به سطح کار در این مقاله اشاره کنیم که از مرتبهٔ حضور ضرایب کریستوفل تا مرتبهٔ اول است بنابراین از تمام جملات با توان بالاتر ضرایب کریستوفل صرفنظر خواهیم کرد. این مطلب به جابه‌جاپذیر بودن تمام توابع متریک (همهٔ توابع متعلق به C^∞ هستند) می‌انجامد؛ چرا که هر مشتق از تابع متریک به ضرایب کریستوفل می‌انجامد:

$(-g(\hat{y}))^{\frac{1}{2}}_{,\mu} = (-g(\hat{y}))^{\frac{1}{2}}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}(\hat{y})$ بنابراین برای هردو تابع دلخواه اما نرم از متریک، جابه‌جاپذیر بودن بدیهی است:

$$\begin{aligned} &f(g(\hat{y}))h(g(\hat{y})) = f(g(y))*h(g(y)) = \\ &f(g(y))h(g(y)) + \frac{i}{2}(f'_g\, g_i)(h'_j\, g_j) + \ldots \\ &= f(g(y))h(g(y)) + \circ(\Gamma)\wedge 2, \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

رابطهٔ

$$\begin{aligned} &\delta_{,\hat{x}^k}(\hat{x},\hat{y}) + \delta_{,\hat{y}^k}(\hat{x},\hat{y}) = \\ &-\frac{1}{2}(\Gamma_k(\hat{x})\delta(\hat{x},\hat{y}) + \delta(\hat{x},\hat{y})\Gamma_k(\hat{y})), \end{aligned}$$

معادلهٔ دیگری است که می‌توان درستی آن را به صورت مستقیم نشان داد. با اعمال قانون تعویض برابری (۱۳)، نتیجهٔ رابطهٔ آخر معادل است با

$$\delta(\hat{x},\hat{y})\Gamma(\hat{y}) = \Gamma(\hat{x})\delta(\hat{x},\hat{y}),$$

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم عملگر انتقال در هندسهٔ عمومی را پیشنهاد دهیم. مولد این عملگر را تکانهٔ کوواریانت $\widehat{\mathbf{D}}$ می‌نامیم. از آنجا که در هندسهٔ مینکوفسکی، برابری $<\mathbf{x}|\widehat{\mathbf{p}}|\mathbf{y}> = -i\widehat{\nabla}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = <\mathbf{x}|\widehat{\mathbf{p}}^{\dagger}|\mathbf{y}>$ (البته مشتق‌گیری نسبت به متغیر x خواهد بود، ∇_x) برقرار است، با تعریف پایهٔ جدید $<\overline{\mathbf{x}}| =: <\mathbf{x}|(-g)^{\frac{1}{4}}$ و Γ_k به عنوان مشتق متریک، تقاضا می‌کنیم که عملگر کوواریانت در رابطهٔ زیر

$$<\overline{\mathbf{x}}|\widehat{\mathbf{D}}|\overline{\mathbf{y}}> = <\overline{\mathbf{x}}|\widehat{\mathbf{D}}^{\dagger}|\overline{\mathbf{y}}> \equiv -i\widehat{\nabla}_x\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}), \qquad (۱۵)$$

صدق کند. برای به دست آوردن شرط برقراری رابطهٔ (۱۵)، عملگر کوواریانت را برحسب عملگر فضا- زمان مینکوفسکی بازنویسی می‌کنیم، $\widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{p}} + \widehat{\Re}$ برای تعیین $\widehat{\Re}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &<\overline{\mathbf{x}}|\widehat{\mathbf{p}} = (-g)^{\frac{1}{4}} <\mathbf{x}|\widehat{\mathbf{p}} = \\ &(-g)^{\frac{1}{4}}(-i\nabla) <\mathbf{x}| = -i\nabla(<\overline{\mathbf{x}}|) + i(\nabla(-g)^{\frac{1}{4}}) <\mathbf{x}|, \end{aligned}$$

اما $\partial_k(-g)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{4}}\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}$ بنابراین

$$\begin{aligned} &<\overline{\mathbf{x}}|\widehat{p}_k = -i\partial_k(<\overline{\mathbf{x}}|) + i\frac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{4}}\Gamma^{\alpha}_{k\alpha} <\mathbf{x}| = \\ &-i\partial_k(<\overline{\mathbf{x}}|) + i\frac{1}{2}\Gamma^{\alpha}_{k\alpha} <\overline{\mathbf{x}}|, \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

براساس رابطهٔ (۱۶)، اندازهٔ تصحیح برابر است با $\widehat{\Re} = -\frac{i}{2}\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}$. زیرا $<\overline{\mathbf{x}}|(\widehat{p}_k - \frac{i}{2}\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}) = -i\partial_k(<\overline{\mathbf{x}}|)$ که به معنی برابری $\widehat{D}_k = \widehat{p}_k - \frac{i}{2}\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}\Im$ است. هرمیتی بودن آن به ظاهر محرز نیست اما این ویژگی در زیر انتگرال مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} &\overline{f}uu(\widehat{p}_k - \frac{i}{2}\Gamma^{\alpha}_{k\alpha})h \to -i\overline{f}uuh'_{,k} - \frac{i}{2}\overline{f}u\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}uh \to \\ &\circ(Bound) + \partial_k(\overline{-if})u\,uh + (\overline{-if})u\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}uh - \frac{i}{2}\overline{f}u\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}uh \\ &= \overbrace{(\overline{-i\partial_k f})}uuh + \overbrace{(\overline{-\tfrac{i}{2} f})}u\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}uh, \end{aligned}$$

که در آن u همان دترمینان متریک است: $u \equiv (-g)^{\frac{1}{4}}$ و منظور از علامت "بار" در بالای توابع، همیوغ مختلط آنها است. بنابراین عملگر کوواریانت موثر در فضای دوگان (که می‌توان رابطهٔ نهایی آنرا مانند روش بالا به دست آورد) به صورت $\widehat{D}^{\dagger}_k|\overline{\mathbf{x}}> = -i(|\overline{\mathbf{x}}>)\partial_k$ تعریف می‌شود. در نهایت، عملگر تکانه در فضای دوگان چنین به دست می‌آید: $\widehat{D}_{k,on\ Duall\ Space} = \widehat{p}_k - \frac{i}{2}\Im\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}$ با این تعریف سازگار، هنوز عملگر کوواریانت زیر انتگرال هرمیتی است: به عنوان انتگرالده $<\overline{\mathbf{x}}|\widehat{\mathbf{D}}^{\dagger}|\overline{\mathbf{y}}> = <\overline{\mathbf{x}}|\widehat{\mathbf{D}}|\overline{\mathbf{y}}>$.

این مطلب ممکن است کمی ابهام داشته باشد. برای رفع ابهام و برای اثبات هرمیتی بودن آن، کافی است که به این نکته توجه کنیم که عمل مشتق گیری در دو رابطهٔ $<\overline{\mathbf{x}}|\widehat{\mathbf{D}},$ و $\widehat{\mathbf{D}}|\overline{\mathbf{y}}>,$ به سمت راست و چپ است. در واقع به صورت مستقیم برابری $<\overline{\mathbf{x}}|\widehat{\mathbf{D}}^{\dagger}|\overline{\mathbf{y}}> = +i\delta(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})\nabla_y$ و $<\overline{\mathbf{x}}|\widehat{\mathbf{D}}|\overline{\mathbf{y}}> = -i\nabla_x\delta(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})$ به خاطر عبور کت و برا از چپ به راست و از راست به چپ صورت می‌گیرد. بنابراین به عنوان رابطهٔ نهایی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{D}}_{Acts\ on\ Right(H)} = \widehat{\mathbf{p}} - \frac{i}{2}\Gamma\Im, \\ &\widehat{\mathbf{D}}_{Acts\ on\ Left(H^*)} = \widehat{\mathbf{p}} - \frac{i}{2}\Im\Gamma, \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با این دو عملگر، اکنون عملگر انتقال از طرف راست، عمل کننده در فضای هیلبرت و در همسایگی کوچک Ω را بر

حسب تکانهٔ کواریانت پیشنهاد می‌دهیم: $\widehat{T}_i(\Omega)=e^{-i\Lambda_i\widehat{D}_i}$. به همین روش، عملگر انتقال از طرف چپ، عمل کننده در فضای دوگان هیلبرت و در همسایگی کوچک Ω و بر حسب تکانهٔ کواریانت چنین خواهد بود: $\widehat{T}_i(\Omega)=e^{-i\widehat{D}_i\Lambda_i}$. با استراتژی بخش قبلی، عملگر میانی به صورت

$$e^{+i\widehat{D}_y\Lambda_2}\, e^{+i\widehat{D}_x\Lambda_1}\, e^{-i\Lambda_2\widehat{D}_y}\, e^{-i\Lambda_1\widehat{D}_x} = e^{i\widehat{\mathbf{M}}-\frac{1}{2}[\widehat{D}_y\Lambda_2,\widehat{D}_x\Lambda_1]}\, e^{-i\widehat{\mathbf{W}}-\frac{1}{2}[\Lambda_2\widehat{D}_y,\Lambda_1\widehat{D}_x]} = e^{i\widehat{\mathbf{M}}-i\widehat{\mathbf{W}}-\frac{1}{2}[\Lambda_2\widehat{D}_y,\Lambda_1\widehat{D}_x]-\frac{1}{2}[\widehat{D}_y\Lambda_2,\widehat{D}_x\Lambda_1]+\frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{M}},\widehat{\mathbf{W}}]}, \qquad (۱۸)$$

خواهد شد. که مقادیر $\hat{\mathrm{W}}$ و $\hat{\mathrm{M}}$ به صورت $\widehat{\mathbf{W}}=i\boldsymbol{\Lambda}.\widehat{\mathbf{D}}$ و $\widehat{\mathbf{M}}=i\widehat{\mathbf{D}}.\boldsymbol{\Lambda}$ هستند. اما،

$$[\Lambda_2,\widehat{D}_y]=i\Lambda_{2,2}+\frac{\theta^{ij}}{2}\Gamma_{2,i}\Lambda_{2,j}$$

و

$$[\Lambda_1,\widehat{D}_x]=i\Lambda_{1,1}+\frac{\theta^{ij}}{2}\Gamma_{1,i}\Lambda_{1,j}$$

که اساسا هر دو نرده ای هستند و سهم حضور آنها در جابه‌جاگر به نتیجهٔ صفر می‌انجامد. همچنین است نتیجهٔ جابه‌جاگر قسمت $[\widehat{\mathbf{M}},\widehat{\mathbf{W}}]$. پس برای رابطهٔ (۱۸) خواهیم داشت

$$e^{+i\widehat{D}_y\Lambda_2}\, e^{+i\widehat{D}_x\Lambda_1}\, e^{-i\Lambda_2\widehat{D}_y}\, e^{-i\Lambda_1\widehat{D}_x} = e^{i\widehat{\mathbf{M}}-i\widehat{\mathbf{W}}-[\widehat{D}_y\Lambda_2,\Lambda_1\widehat{D}_x]},$$

همچنین،

$$[\widehat{D}_y\Lambda_2,\Lambda_1\widehat{D}_x]= \widehat{p}_y[\Lambda_2,\Lambda_1]\widehat{p}_x-\frac{i}{2}[\widehat{p}_y\Lambda_2,\Lambda_1\Gamma_1]-\frac{i}{2}[\Gamma_2\Lambda_2,\Lambda_1\widehat{p}_x]$$

و از راه مشابه، نتیجهٔ دیگری به صورت رابطهٔ

$$e^{i\widehat{\mathbf{M}}-i\widehat{\mathbf{W}}+\frac{1}{2}[\widehat{D}_x\Lambda_1,\Lambda_2\widehat{D}_y]-\frac{1}{2}[\widehat{D}_y\Lambda_2,\widehat{D}_x\Lambda_1]+\frac{1}{2}[\widehat{D}_y\Lambda_2,\Lambda_1\widehat{D}_x]-\frac{1}{2}[\Lambda_2\widehat{D}_y,\Lambda_1\widehat{D}_x]} = e^{i\widehat{\mathbf{M}}-i\widehat{\mathbf{W}}+[\widehat{D}_x\Lambda_1,\Lambda_2\widehat{D}_y]},$$

به دست می‌آید. جمع‌بندی جمله‌های پاراگراف بالا در خصوص عملگر میانی، برابر است با

$$e^{+i\widehat{D}_y\Lambda_2}\, e^{+i\widehat{D}_x\Lambda_1}\, e^{-i\Lambda_2\widehat{D}_y}\, e^{-i\Lambda_1\widehat{D}_x} = e^{i\widehat{\mathbf{M}}-i\widehat{\mathbf{W}}-\frac{1}{2}[\widehat{D}_i\Lambda^i,\Lambda^j\widehat{D}_j]},$$

که با انتخاب رابطهٔ (۸)، مقدار جملهٔ اول صفر خواهد شد: $i\widehat{\mathbf{M}}-i\widehat{\mathbf{W}}=0,$

و آنگاه رابطهٔ نهایی به شکل

$$e^{+i\widehat{D}_y\Lambda_2}\, e^{+i\widehat{D}_x\Lambda_1}\, e^{-i\Lambda_2\widehat{D}_y}\, e^{-i\Lambda_1\widehat{D}_x} = e^{-\frac{1}{2}[\widehat{D}_i\Lambda^i,\Lambda^j\widehat{D}_j]}, \qquad (۱۹)$$

در می‌آید. برای ساده‌سازی این رابطه، فرض می‌کنیم که بتوان رابطهٔ توانی را به صورت خلاصه در دوجمله نوشت: $[\widehat{D}_j\Lambda^j,\Lambda^i\widehat{D}_i]=A+B,$، در ادامه با حذف شدن چهار جملهٔ درون A و B، مقادیر باقیمانده چنین خواهند بود:

$$A=i\widehat{D}_i\theta^{ij}\widehat{D}_j,$$
$$B=\frac{1}{2}(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j})[\Lambda^i,\Lambda^j]_{\substack{\Lambda^i=y^i\\ \Lambda^j=y^j}}=\frac{i\theta^{ij}}{2}(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j}),$$

بر حسب این نتایج، نمایش مکانی عملگر رابطهٔ (۱۹) را می‌توان با وارد کردن عملگر واحد به دست آورد. با در نظر گرفتن ناحیهٔ انتقال که در بخش نخست فرض کردیم و نتیجه بدون ابهام بالا، نمایش مکانی چنین به دست می‌آید:

$$e^{+\frac{i}{2}\int_\Omega ds|\bar{s}>\{(+i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s^i})\theta^{ij}(-i\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s^j})+\frac{\theta^{ij}}{2}(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j})\}<\bar{s}|}, \qquad (۲۰)$$

رابطهٔ آخر همچنین به صورت

$$<x|e^{+\frac{i}{2}\int_\Omega dzds|z>\frac{\partial}{\partial z_i}[\hat{y}^i,\hat{y}^j]\delta(\mathbf{z}-\mathbf{s})\frac{\partial}{\partial s_j}<s|}|y>$$

نیز قابل استفاده است. با قرار دادن نمایش مکانی عملگر میانی، ضرب بین دو تابع دارای رابطه‌ای به صورت

(۲۱)

$$\begin{aligned}&\int_{all\ space} dx<f|\bar{x}><\bar{x}|e^{\frac{i}{2}\int_\Omega d\bar{s}|\bar{s}>\{(+i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s^i})\theta^{ij}(-i\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s^j})+\frac{\theta^{ij}}{2}(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j})\}<\bar{s}|}|\bar{y}><\bar{y}|h>\\ &=\int_{all\ space} dx(f(\bar{x})<\bar{x}|\{\mathfrak{I}+\\ &\frac{i}{2}\int_\Omega ds|\bar{s}>\{(+i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s^i})\theta^{ij}(-i\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s^j})+\\ &\frac{\theta^{ij}}{2}(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j})\}<\bar{s}|+..\}|\bar{y}>h(\bar{y}))\\ &=\int_{all\ space} dx(f(x)\delta(x,y)h(y)+\\ &\frac{i}{2}\int_\Omega ds\, f(\bar{x})\delta(x-s)\{(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s^i})\theta^{ij}(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s^j})+\\ &\frac{\theta^{ij}}{2}(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j})\}\delta(s-y)h(\bar{y})+..),\end{aligned}$$

است؛ چرا که از رابطهٔ (۲۰) و برای زیر انتگرال داریم

$$\bar{f}(x)\sqrt[4]{-g(x)}\,\delta(x-s)\Big(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s^i}\Big)=$$
$$\bar{f}(x)\sqrt[4]{-g(x)}\Big(\frac{\partial}{\partial s^i}\delta(x-s)\Big)$$
$$=\bar{f}(x)\sqrt[4]{-g(x)}\Big(-\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(x-s)\Big)$$
$$=\bar{f}_{,i}(x)\sqrt[4]{-g(x)}\,\delta(x-s)+$$
$$\frac{1}{2}\bar{f}(x)\sqrt[4]{-g(x)}\,\Gamma_i(s)\,\delta(x-s),$$

پس رابطهٔ (۲۱) را می‌توان چنین نوشت

$$< f\,|\hat{*}|\,h >= \int_{all\ space} dx\big(\bar{f}(x)\delta(x,y)h(y)\big)$$
$$+\frac{i}{2}\int_{all\ space} dx\int_{\Omega} ds\Big\{\bar{f}_{,i}(x)\big(\sqrt[4]{-g(x)}\,\delta(x-s)+$$
$$\frac{1}{2}\bar{f}(x)\sqrt[4]{-g(x)}\,\Gamma_i(x)\delta(x-s)\big)\times$$
$$\times\theta^{ij}\times$$
$$\big(\frac{1}{2}\delta(s-y)\Gamma_j(y)\sqrt[4]{-g(y)}\,h(y)+$$
$$\delta(s-y)\sqrt[4]{-g(y)}\,h_{,j}(y)\big)$$
$$+\frac{\theta^{ij}}{2}(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j})\bar{f}(x)\delta(x,s)\delta(s,y)h(y)+..\Big\}$$
$$=\bar{f}(y)h(y)+\frac{i\,\theta^{ij}}{2}\bar{f}_{,i}(y)h_{,j}(y)+$$
$$\frac{i\,\theta^{ij}}{2}\bar{f}_{,i}(y)\Gamma_j(y)h(y)$$
$$+\frac{i\,\theta^{ij}}{2}\bar{f}(y)\Gamma_i(y)h_{,j}(y)+o(\Gamma)^2+$$
$$\frac{i\theta^{ij}}{2}(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j})\bar{f}(y)h(y)..., \qquad (۲۲)$$

اگر رابطهٔ (۲۲) را بـه ازاء $\hat{f}(\hat{y})=\hat{y}^1,\ \hat{h}(\hat{y})=\hat{y}^2,$ در رابطـهٔ جابه‌جاگری (۲) به کار ببـریم و از تعریـف $\Gamma_k\equiv\hat{\Gamma}^l_{kl}(\hat{y})$، استفاده کنیم، می‌رسیم به

$$\hat{y}^i\,\hat{*}\,\hat{y}^j=y^iy^j+i\frac{\theta^{ij}}{2}+\frac{i}{2}\theta^{ik}\Gamma^l_{kl}y^j+\frac{i}{2}\theta^{kj}y^i\Gamma^l_{lk}, \qquad (۲۳)$$

رابطهٔ (۲۳) بیانگر حضور ساختار هندسی فضا تـا مرتبـهٔ اول از ضرایب کریستوفل در جابه‌جاگر مختصات است. ضرب داخلی بـین دو تـابع مختصـات ناجابـه‌جایی توسـط رابطـهٔ (۲۲) داده می‌شود. اگر فضا- زمان مورد مطالعه خمش ریمـان غیـر صـفر داشته باشد، در ایـن صـورت $\Gamma^l_{kl}(y)=\frac{1}{3}R_{kl}{}^{l}{}_{m}y^m$ خواهـد بود. بنابراین رابطهٔ (۲۳) به صورت زیر نهایی می‌شود:

$$\hat{y}^i\,\hat{*}\,\hat{y}^j=$$
$$y^iy^j+i\frac{\theta^{ij}}{2}+i\frac{\theta^{ik}}{2}R^l{}_{klm}y^my^j+i\frac{\theta^{kj}}{2}R^l{}_{klm}y^iy^m, \qquad (۲۴)$$

که بیانگر حضور تانسور خمش ریمان فضا در رابطهٔ جابـه‌جاگر مختصات است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، از تقریب مختصات فرمی برای همریختی موضعی بـین هندسـهٔ شـبه‌ریمانی بـا هندسـهٔ مینکوفسـکی در سـطح مختصات جابه‌جایی استفاده کرده‌ایم. این مطلب نتایج این مقاله را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد مگر ایـن کـه بپـذیریم ناجابـه‌جایی هندسـی بـه عنـوان یـک اخـتلال در نظریـهٔ نسـبیت و جهـت سازگاری با ایدهٔ این مقاله روی عناصر متریک تـا مرتبـهٔ اول – مانند ضرایب کریستوفل - بی‌تاثیر است و ما ایـن مطلـب را در متن مقاله نشان داده‌ایم. همچنین در سـطح مکانیـک کوانتـومی، نشان دادیم که عملگر انتقال در هندسهٔ ناجابه‌جایی، وابسـته بـه انتخاب مسیر بوده و عملگری مسیر مرتب اسـت. بـا تکیـه بـر عملگر انتقال مسیر مرتب و برای یک مسیر انتخـابی در هندسـهٔ مینکوفسکی منتهی به یک همسایگی بی‌نهایت کوچک، عملگـر ستاره‌ساز را ساختیم و نشان دادیم که در نمایش مکان، توانـایی تولید جمله‌های نگاشت وایل – مویال را دارد. سپس، با تعریف و ورود عملگر تکانهٔ هرمیتی و عناصر وابسته به متریک هندسه، همهٔ روند بخش یک را به هندسهٔ عمومی‌تر گسترش دادیـم. بـا استناد به همین عملگر ستاره‌ساز بخش یک، بـه عنـوان عملگـر میانی در انتقال توابع در تصـویر هـایزنبرگ، عملگـر ستاره‌سـاز هندسهٔ عمومی را پیشنهاد دادیم. سـپس بـا وارد کـردن عملگـر واحد حجم ناوردا، توانستیم تحت نمـایش مکـانی، عملگـر بـه دست آمده را در خصوص مختصات خالص، به عنوان دو تـابع مورد نظر، اعمال کنیم و از نتیجهٔ آن تعمیم ناجابه‌جایی هندسـهٔ مینکوفسکی به هندسهٔ عمومی‌تر را گزارش دهیم. همچنین برای زمانی که تانسور خمش ریمان هندسهٔ مورد نظر غیر صفر باشد، نتیجهٔ به دست آمده از تعمیم ناجابه‌جایی را با کمک مولفـه‌های تانسور خمش ریمان گسترش دادیم.

سپاس‌گزاری

نویسنده از دانشگاه شهرکرد جهت حمایت مالی و معنوی از این مقاله تشکر و قدردانی می‌کند.

مراجع

1. P Aschieri, et al," *Non-commutative Spacetimes: Symmetries in Non-commutative Geometry and Field Theory*", Berlin Heidelberg: Springer, (2009).
2. Connes, M. Marcolli, "*Non-commutative Geometry, Quantum Fields and Motives*", London: Academic Press, (1994).
3. N Seiberg and E Witten, *JHEP* **9909** (1999) 032
4. D J Gross and N A Nekrasov, *JHEP* 044 (2001)
5. R J Szabo, *Phys. Rep.* **378** (2003) 207.
6. Fischer, R J Szabo, *JHEP* **0902** (2009) 031
7. M Chaichian, et al, *Eur. Phys. J. C* **29** (2003) 413.
8. M M Sheikh-Jabbari, *JHEP* **9906** (1999) 015.
9. Bertolami, C A D Zarro, *Phys. Let. B* **673** (2009) 83.
10. A Jafari, *Eur. Phys. J. C* **73** (2013) 2271
11. L Parker, *Phys. Rev. Let*. **44** (1980) 1559 and *Phys. Rev. D* **22** (1980) 1922.
12. C W Misner, et al., "*Gravitation*" San Francisco: Freeman Publishing Company, (1973), and A Nestrov, *Class. Qua. Grav,* **16** (1999) 465.
13. J Weber, "*General Relativity and Gravitational Waves"*, Dover (2004), (New York: Interscience Publisher Inc., 1961 and M. Maggiore," *Gravitational Waves*", New York: Oxford University Press Inc. (2008).
14. R D'inverno, "*Introducing Einstein's Relativity*", New York: Oxford University Press Inc. (1993).
15. B s. DeWitt, *Rev. Mod. Phys*. **29** (1957) 377.
16. H Kleinert, "*Gauge Fields in Condensed Matter*", Singapore: World Scientific Publisher Company, Inc., (1987).