مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۱، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۴۰۰
DOI: 10.47176/ijpr.21.2.21176

تقارن نودر در گرانش تعمیم یافته دور همسان

امین رضایی اکبریه، نسرین اقبالی قاضیجهانی و سبحان کاظم‌پور

گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک، دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز

پست الکترونیکی: am.rezaei@tabrizu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۰۱ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۹/۱۲/۱۴)

چکیده

در این مقاله، نظریهٔ اصلاح شده گرانش $f(T,\tau)$ را مورد بررسی قرار دادیم که در آن T و τ به ترتیب نشان دهندهٔ نرده‌ای- پیچش و رد تانسور انرژی- تکانه است. سپس با مطالعهٔ کیهان شناسی این مدل نشان دادیم که مدل گرانش $f(T,\tau)$ همخوانی خوبی با مشاهدات انجام شده دارد. نوع تابعیت $f(T,\tau)$ را می‌توان با توجه به عوامل گوناگون تعیین کرد. مهم‌ترین انگیزه برای تعیین تابعیت $f(T,\tau)$ این است که لاگرانژی مدل از یک تقارن پیوسته نودری تبعیت کند. بنابراین، با توجه به رهیافت نودر، سعی کردیم که تابعیت $f(T,\tau)$ را مشخص کنیم. همچنین مدل پیشنهاد شده باید به لحاظ پدیده شناسی، رفتار سازگاری با مشاهدات داشته باشد. بنابراین، پیش بینی‌های مدل مطرح شده را با محدودیت‌های مشاهداتی مقایسه کردیم که می‌توان به تابش پس زمینهٔ کیهانی و نمودار هابل به عنوان مثال اشاره کرد. در این مقاله، مدل گرانش $f(T,\tau)$ را در فضا زمان FRW مورد بررسی قرار دادیم. بنابراین، لاگرانژی موثر را با متغیرهای مستقل، عامل مقیاس a، نرده‌ای پیچش T و رد تانسور انرژی- تکانه τ به دست آوردیم. بعد از اعمال تقارن نودر به لاگرانژی ، توانستیم شکل مناسبی برای تابع $f(T,\tau)$ را مطرح کنیم. در ادامه، کمیت پایستهٔ نودری را برای این مدل به دست آوردیم.

واژه‌های کلیدی: کیهان شناسی، گرانش اصلاح شده، نرده‌ای- پیچش، گرانش دورهمسان

۱. مقدمه

مشاهدات اخیر شتاب دیرهنگام جهان و وجود مادهٔ تاریک [۱-۳]، یک چالش نظری اساسی در نظریه‌های گرانشی ایجاد کرده است. یک احتمال در توضیح مشاهدات با این فرض صورت می‌گیرد که در مقیاس‌های بزرگ نظریهٔ نسبیت عام انیشتین از کار می‌افتد و نیاز به تعمیم و اصلاح این نظریه وجود دارد. در بیشتر مدل‌های نظری ارائه شده تابع متغیر نرده‌ای ریچی R به جای کنش انیشتین و هیلبرت جایگزین می‌شود [۴]. این مدل‌ها اخیرا به طور گسترده‌ای بررسی شده‌اند. باید خاطر نشان کنیم که مدل‌های نوشته شده در چارچوب گرانش $f(R)$ توانایی توضیح شتاب کیهانی دیرهنگام جهان را دارند [۵]. اما باید بدانیم که این ساده‌ترین راه حل نیست و گرانش دیگری که اخیرا توجه زیادی به آن می‌شود گرانش $f(T)$ هست. خصوصیات ذاتی این گرانش بر اساس معادلهٔ نسبتا قدیمی

دورموازی[1] نسبیت عام بنا نهاده شده است. هم ارزی دورهمسان نسبیت عام[2] مخصوصا به جای اتصال بدون تاب لوی‌چی‌ویتای نسبیت عام کلاسیک (GR)، از اتصال بدون انحناء ویتزن باخ[3] بهره گرفته شده است که میدان‌های دینامیکی متناظر چهار ویربین[4] مستقل خطی هستند. بنابراین تانسور تاب تمامی اطلاعات میدان گرانشی را شامل می‌شود. از طرف دیگر می‌توان دید که نتایج گوناگون نشان می‌دهند که باید ثابت کیهان شناسی دینامیک داشته باشد. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت که ثابت کیهان شناسی وابسته به رد تانسور انرژی-تکانه τ است [۶]. بنابراین وارد کردن τ در کنش می‌تواند به نظریه $f(T,\tau)$ منجر شود. این نظریه اولین بار در مرجع [۷] مطرح شد که منجر به نتایج جالب توجهی شد. اخیرا در مقالهٔ [۶] نشان داده شده است که این نظریه مزیت‌هایی دارد که از آن جمله می‌توان به سادگی محاسبات عددی و سازگاری این مدل با نتایج مشاهدات اخیر اشاره کرد. همچنین نشان داده‌اند که این مدل می‌تواند جهان در حال انبساط شتابدار را به خوبی توصیف کند. بنابراین از آنجایی که گرانش $f(T,\tau)$ می‌تواند نامزدی مناسب برای انرژی تاریک باشد، می‌توان گفت که این نظریه یک جایگزین مناسب برای مدل گرانش استاندارد است. در مقالهٔ [۷] مومنی و همکارش نشان داده‌اند که گرانش $f(T,\tau)$ می‌تواند جنبه‌های پدیده شناسی جالب کیهان شناسی را به ارمغان آورد. یعنی همزمان که انبساط عالم را در زمان تورم توصیف می‌کند، می‌تواند در دورهٔ مادهٔ غالب به یک حالت غیر شتابدار و سرانجام در زمان‌های بعدی منجر به گسترش شتاب دار شود. در مقاله [۸] به محدودیت‌های مشاهداتی این مدل پرداخته شده است و برای حالات مختلف $f(T,\tau)=T+g(\tau)$ و $f(T,\tau)=T\times g(\tau)$ نشان داده‌اند که هر دو حالت با داده‌های ابرنواختر نوع یک سازگار هستند. همچنین در همین مقاله نشان داده شده است که یکی از مدل‌های $f(T,\tau)$ می‌تواند جایگزین خوبی برای مدل ΛCDM باشد. در مقالهٔ [۸] نشان داده شده است که مدل گرانش $f(T,\tau)$ می‌تواند نامزدی برای رژیم‌های فانتوم و کویینتیسنس[5] باشند.

در این مقاله بر آن هستیم که گرانش $f(T,\tau)$ را در فضا زمان FRW مورد بررسی قرار دهیم که برای این منظور، لاگرانژی موثر را با متغیرهای مستقل ، عامل مقیاس a، نرده‌ای پیچش T و رد تانسور انرژی-تکانه τ به دست می‌آوریم. با درخواست این که جواب‌های مدل گرانش $f(T,\tau)$ از تقارن نودر تبعیت کنند می‌توان تابعیت مناسبی برای $f(T,\tau)$ به دست آورد. در واقع ایدهٔ استفاده از تقارن نودر در کیهان شناسی موضوع جدیدی نیست و در واقع مقالات زیادی در این زمینه منتشر شده است و تقارن نودر به طور گسترده‌ای در مدل‌های کیهان شناسی همسانگرد در گرانش $f(T)$ برای مشخص کردن شکل صریح دورموازی از $f(T)$ و پیدا کردن راه حل دقیق متناظر مورد استفاده قرار گرفته است [۹-۱۵]. بعد از اعمال تقارن نودر به لاگرانژی، سعی خواهیم کرد که پارامترهای مختلف کیهان شناسی را به دست بیاوریم. در نهایت سازگاری این مدل با نتایج مشاهداتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲. مروری بر گرانش $f(T,\tau)$

در نظریهٔ دورموازی مقادیر اساسی، پایه‌های ویربین‌ها چهارتایی‌ها[6] e^i_μ هستند. این پایه‌ها متمامد و مستقل از مختصات هستند به طوری که $e^i_\mu e_j^\nu=\delta^i_j\delta^\nu_\mu$، که μ و ν شاخص‌های مختصات روی منیفلد هستند و مقادیر ۰،۱،۲،۳ را می‌پذیرند. از طرفی متریک را می‌توانیم بر حسب وربین‌ها به صورت $g_{\mu\nu}=\eta_{ij}e^i_\mu e^j_\nu$ بیان کنیم که در آن η_{ij} متریک فضای مینکوفسکی است. در گرانش دورموازی اتصال بدون انحناء به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}=e_i^\alpha\partial_\nu e^i_\mu=-e^i_\mu\partial_\nu e_i^\alpha . \qquad (۱)$$

۱. Teleparallel
۲. Teleparallel Equivalent General Relativity
۳. Weitzenbock
۴. Vierbein

۵. Quintessence
۶. Tetrad

اجزاء تانسورتاب توسط بخش پادمتقارن اتصال زیر به دست می‌آیند:

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = e^{\alpha}_{i}\left(\partial_{\mu} e^{i}_{\nu} - \partial_{\nu} e^{i}_{\mu}\right). \quad (۲)$$

اجزاء تانسور اتصال و نرده‌ای تاب به صورت زیر هستند:

$$K^{\mu\nu}_{\alpha} = -\frac{1}{2}\left(T^{\mu\nu}_{\alpha} - T^{\nu\mu}_{\alpha} - T^{\mu\nu}_{\alpha}\right), \quad (۳)$$

$$T = T^{\alpha}_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{\alpha}. \quad (۴)$$

به طوری که تانسور جدید $S^{\mu\nu}_{\alpha}$ از اجزاء تانسورهای تاپ و انحراف[1] ساخته می‌شود:

$$S^{\mu\nu}_{\alpha} = \frac{1}{2}\left(K^{\mu\nu}_{\alpha} + \delta^{\mu}_{\alpha} T^{\beta\nu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha} T^{\beta\mu}_{\beta}\right), \quad (۵)$$

در این جا قصد داریم که مدل گرانش $f(T,\tau)$ را مورد بررسی قرار دهیم که کنش آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$s = \int d^{4}x \sqrt{-g}\, f(T,\tau). \quad (۶)$$

که در آن $\sqrt{-g} = det\left(e^{\alpha}_{i}\right)$ است. دقت کنید که در اینجا از واحدهای طبیعی استفاده کرده‌ایم که در آن $c = 16\pi$ و $G = 1$ است. در این کنش ما تنها روی قسمت $f(T,\tau)$ تمرکز کرده‌ایم و مشارکت ماده در لاگرانژی را از طریق جفت شدگی که تحت تابع $f(T,\tau)$ است، در نظر گرفته‌ایم. در پس زمینهٔ متریک FRW، $T = -6\left(\frac{\dot a}{a}\right)^{2} = -6H^{2}$ و $\tau = 3P_{m}(a) - \rho_{m}(a)$ است.

با استفاده از ضرایب نا معین می‌توان کنش (۶) را به صورت زیر نوشت:

$$s = \int d^{4}x \sqrt{-g} \left\{ \begin{array}{l} f(T,\tau) - \lambda_{T}\left(T + 6H^{2}\right) - \\ \lambda_{\tau}\left(\tau - 3P_{m}(a) - \rho_{m}(a)\right) \end{array} \right\}, \quad (۷)$$

که با وردش کنش نسبت به T و τ می‌توان ضرایب λ_{T} و λ_{τ} را به ترتیب برابر $f_{T} \equiv \partial f / \partial T$ و $f_{\tau} \equiv \partial f / \partial \tau$ به دست آورد. بنابراین می‌توان لاگرانژی نقطه‌ای را برای کنش (۷) به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L} = a^{3}\left\{ f - f_{T}\left(T + 6\left(\frac{\dot a}{a}\right)^{2}\right) - f_{\tau}\left(\tau - 3P_{m} + \rho_{m}\right)\right\}. \quad (۸)$$

در این لاگرانژی، میدان‌های τ, a و T وابسته به زمان هستند که از طریق تابع $f(T,\tau)$ به هم جفت شده‌اند. تکانه‌های متناظر با متغیرها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$p_{a} = \frac{\partial \ell}{\partial \dot a} = -12\, a \dot a f_{T}, \quad (۹)$$

$$p_{T} = p_{\tau} = 0, \quad (۱۰)$$

از روی لاگرانژی نقطه‌ای (۸) می‌توان انرژی کل را محاسبه کرد و اگر آن را برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$6H^{2} f_{T} + f - f_{T}T - f_{\tau}\left(\tau - 3P_{m} + \rho_{m}\right) = 0, \quad (۱۱)$$

همین طور می‌توان معادلات حرکت مربوط به متغیرها را به دست آورد که معادلهٔ حرکت مربوط به a به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{array}{l} 6H^{2} f_{T} + 12\frac{\ddot a}{a} f_{T} + 12H\left(\dot T f_{TT} + \dot\tau f_{T\tau}\right) + \\ 3\left(f - f_{T}T - f_{\tau}\left(\tau - 3P_{m} + \rho_{m}\right) + P_{m}\right) + \\ a\left(f_{\tau}\left(3P_{m}.a - \rho_{m}.a\right) + P_{m}.a\right) = 0. \end{array} \quad (۱۲)$$

در ادامه می‌خواهیم ببینیم که با استفاده از رهیافت نودر چه تابعیتی برای $f(T,\tau)$ به دست می‌آید.

۳. رهیافت تقارن نودر

در این بخش تقارن نودر را برای لاگرانژی (۸) نشان می‌دهیم. ساختار فضای نقطه‌ای لاگرانژی بندادی[2] $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a,T,\tau)$، $\mathcal{Q} = \{a,T,\tau\}$ و فضای تانژانت مربوطه $\mathcal{TQ} = \{a,T,\tau,\dot a,\dot T,\dot\tau\}$ است. وجود تقارن نودر حضور میدان برداری X به شکل زیر را اعمال می‌کند:

$$X = \alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} + \beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial T} + \gamma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tau} + \dot\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot a} + \dot\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot T} + \dot\gamma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\tau} = 0. \quad (۱۳)$$

که α β ، γ به a,T,τ وابسته هستند. شرایط تقارن نودر ایجاب می‌کند که میدان برداری در مشتق لی لاگرانژی به صفر میل کند.

$$\pounds_{X}\mathcal{L} = 0. \quad (۱۴)$$

۱. Contortion

۲. Point-like canonical Lagrangian

$$\begin{aligned}&\alpha\left\{۳a^۲\left[f-Tf_T-f_\tau\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\right]-۶f_T\dot{a}^۲\right\}+\\&\beta\left\{a^۳\left[-f_{TT}-f_{T\tau}\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\right]-۶f_{TT}a\dot{a}^۲\right\}+\\&\gamma\left\{a^۳\left[-f_{T\tau}T-f_{T\tau}\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\right]-۶f_{T\tau}a\dot{a}^۲\right\}+\\&\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a}\dot{a}+\frac{\partial\alpha}{\partial T}\dot{T}+\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\dot{\tau}\right)\left(-۱۲f_Ta\dot{a}\right)=۰.\end{aligned}\qquad(۱۵)$$

حال ضرایب $\dot{a}^۲$، $\dot{T}a$، $\dot{T}^۲$، $\dot{T}$، $\dot{\tau}^۲$، $\dot{\tau}$، a و $\dot{\tau}\dot{T}$ را برابر صفر قرار می‌دهیم، ضریب $\dot{a}^۲\dot{T}$:

$$\left(\frac{\alpha}{a}+۲\frac{\partial\alpha}{\partial a}\right)f_T+\beta f_{TT}+\gamma f_{T\tau}=۰.\qquad(۱۶)$$

ضریب $\dot{a}\dot{T}$:

$$-۱۲f_Ta\frac{\partial\alpha}{\partial T}=۰\rightarrow\frac{\partial\alpha}{\partial T}=۰.\qquad(۱۷)$$

ضریب $\dot{a}\dot{\tau}$:

$$-۱۲f_\tau a\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}=۰\rightarrow\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}=۰.\qquad(۱۸)$$

از این دو معادله اخیر می‌توان نتیجه گرفت که α تنها تابعی از a است. برای باقی جملات نیز داریم:

$$\begin{aligned}&\alpha\left\{۳a^۲\left[f-Tf_T-f_\tau\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\right]\right\}+\\&\beta\left\{a^۳\left[-f_{TT}-f_{T\tau}\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\right]\right\}+\\&\gamma\left\{a^۳\left[-f_{T\tau}T-f_{T\tau}\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\right]\right\}=۰.\end{aligned}\qquad(۱۹)$$

این معادله، عبارت درجهٔ دوم با مؤلفه‌های $\dot{a}^۲$، $\dot{T}^۲$، $\dot{\tau}\dot{T}$، $a\dot{T}$، $\dot{\tau}a$ و $\dot{\tau}\dot{T}$ را به دست می‌دهد که ضرائب آنها توانی از a, τ و مشتقات جزئی آنها هستند. بنابراین عبارت‌ها به صورت جداگانه باید صفر باشند؛ که دو معادلهٔ زیر را تولید می‌کنند:

$$۲\frac{\partial\alpha}{\partial a}f_T+\frac{\alpha}{a}f_T+\beta f_{TT}+\gamma f_{T\tau}=۰,\qquad(۲۰)$$

$$\begin{aligned}&۳\frac{\alpha}{a}\left[f-Tf_T-f_\tau\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\right]+\\&\alpha f_\tau\begin{pmatrix}۳P_{m.a}-\\\rho_{m.a}\end{pmatrix}-\beta\begin{bmatrix}f_{TT}T+\\f_{T\tau}\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\end{bmatrix}-\\&\gamma\left[Tf_{T\tau}+f_{\tau\tau}\left(\tau-۳P_m+\rho_m\right)\right]=۰,\end{aligned}\qquad(۲۱)$$

اگر فرض کنیم که $\alpha=\alpha_۰a^n$ ، می‌توان از معادلات بالا نتیجه گرفت که:

$$\frac{\alpha}{a}=-\frac{\beta f_{TT}+\gamma f_{T\tau}}{(۲n+۱)f_T},\qquad(۲۲)$$

معادلهٔ (۲۰) را هم می‌توان به صورت دو معادله زیر نوشت:

$$\frac{\alpha}{a}\begin{bmatrix}۳\left(f-Tf_T\right)+\\af_\tau\left(۳P_{m.a}-\rho_{m.a}\right)\end{bmatrix}-T\left(\beta f_{TT}+\gamma f_{T\tau}\right)=۰,\qquad(۲۳)$$

و

$$۳\frac{\alpha}{a}f_\tau+\beta f_{T\tau}+\gamma f_{\tau\tau}=۰,\qquad(۲۴)$$

حال با جایگذاری $\frac{\alpha}{a}$ در رابطهٔ (۲۳) و (۲۴) نتیجه می‌گیریم:

$$۳\left(f-Tf_T\right)+af_\tau\left(۳P_{m.a}-\rho_{m.a}\right)+(۲n+۱)Tf_T=۰,\qquad(۲۵)$$

و

$$-۳\left(\beta f_{TT}+\gamma f_{T\tau}\right)f_\tau+\left(\beta f_{T\tau}+\gamma f_{\tau\tau}\right)(۲n+۱)f_T=۰,\qquad(۲۶)$$

با ساده‌سازی رابطهٔ (۲۶) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{(۲n+۱)f_Tf_{\tau\tau}-۳f_\tau f_{T\tau}}{۳f_\tau f_{TT}-(۲n+۱)f_{T\tau}f_T},\qquad(۲۷)$$

حل معادلات فوق در حالت کلی دشوار است. بنابراین برای ساده‌سازی عبارت‌های مربوط به β و γ و شکل تابع $f\left(T,\tau\right)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\beta=\beta\left(a,T\right),\qquad\gamma=\gamma\left(a,T\right),\qquad(۲۸)$$

و اگر انتخاب کنیم که:

$$f\left(T,\tau\right)=f_۱(T)f_۲(\tau),\qquad(۲۹)$$

از معادلات به دست آمده در (۲۴) و (۲۹) خواهیم دید که $\gamma=\alpha_۰a^{n-۱}\gamma_۱(\tau)$ و $\beta=\alpha_۰a^{n-۱}\beta_۱(T)$. بنابراین معادلات فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f_{TT}\beta_۱(T)+f_{T\tau}\gamma_۱+(۲n+۱)f_\tau=۰,\qquad(۳۰)$$

و همچنین

$$۳f_\tau+\beta_۱(T)f_{T\tau}+\gamma_۱(\tau)f_{\tau\tau}=۰,\qquad(۳۱)$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ (۲۷) و انجام کمی ریاضیات می‌توان نشان داد که تابعیت $f_۱(T)$ و $f_۲(\tau)$ به صورت رابطهٔ زیر است:

$$a\left(۳P_{m,a}-\rho_{m,a}\right)=K,\qquad(۳۲)$$

برای تابع $f\left(T,\tau\right)$ هم می‌توان نوشت:

$$f\left(T,\tau\right)=f_۰T^{\frac{m}{۲(n-۱)}}e^{-\frac{(m+۲)\tau}{K}},\qquad(۳۳)$$

که در آن $f_۰=f_۱{*}f_۲$ است. با جایگذاری این روابط در معادلات (۳۲) و (۳۳) داریم:

$$\beta_۱(T)=۲(n-۱)T,\qquad\gamma_۱(\tau)=K,\qquad(۳۴)$$

در نهایت ثابت‌های تقارن نودر از روابط زیر تبعیت می‌کنند:

$$\alpha=\alpha_0 a^{n},\ \ \beta=2\alpha_0\left(n-1\right)a^{n-1}T,\ \ \gamma=\alpha_0 K a^{n-1}, \qquad (۳۵)$$

بـه کمـک رابطـهٔ (۲۷) و مشـتق گیـری از معادلـهٔ یـاد شـده نسبت بـه T ، خـواهیم دیـد کـه P_m و ρ_m از روابـط زیـر تبعیت می‌کنند:

$$P_m=\frac{P_0}{a^{3}},\qquad \rho_m=\frac{3P_0}{a^{3}}-K\ln a+c_1, \qquad (۳۶)$$

در عبارت‌هـای فـوق c_1 و P_0 کمیت‌هـای ثابـت هسـتند. بـا اسـتفاده از روابـط $\frac{\partial \ell}{\partial q}=\frac{dp_q}{dt}$ و $L_X\ell$ می‌تـوان کمیت‌هـای پایسته مرتبط با تقارن نودر را محاسبه کرد.

$$Q=\alpha p_a+\beta P_T+\gamma P_\tau, \qquad (۳۷)$$

بـا مقایسـهٔ رابطـهٔ اخیـر بـا [۱۶] می‌تـوان مشـاهده کـرد کـه جملـهٔ اضـافی ناشـی از حضـور τ در لاگرانـژی مـورد نظـر، در مـدل مـا $n\neq -1$ و $Q=-12 f_T\dot{a}a\alpha$ اسـت. بـا جایگـذاری مقـادیر بـه دسـت آمـده در رابطـهٔ (۳۵) و سـایر کمیت‌هـای ظـاهر شـده در رابطـهٔ فـوق می‌تـوان وابسـتگی کمیـت Q و عامـل مقیـاس a را بـه زمـان بـه شـکل زیـر نشان داد.

$$Q=-12\frac{m a^{\frac{c}{2}+3}\,\dot{a}T^{-\left(-\frac{m}{c}+1\right)}e^{-\frac{(m+3)}{\kappa}\tau}}{c}. \qquad (۳۸)$$

عبـارت فـوق بـه ازای $m=3$ بـه معادلـهٔ (۵۷) مقالـهٔ [۱۶] کـاهش می‌یابـد. بـا دقـت در رابطـهٔ فـوق می‌تـوان بـه ایـن نتیجه رسید کـه جملـهٔ سـوم در صـورت کسـر فـوق ناشـی از حضـور τ در تـابع $f\left(T,\tau\right)$ اسـت. ثابت‌هـای m و c کمیت‌هـایی هسـتند کـه از سـاده سـازی معـادلات قبـل ظـاهر شده‌اند.

$$a\sim t^{\frac{3}{2}}. \qquad (۳۹)$$

این نکتـه قابـل توجـه اسـت کـه حضـور τ نقشـی در عامـل مقیـاس a نداشـته و جملـهٔ فـوق مشـابه عامـل مقیـاس ذکـر شده در مقالهٔ [۱۶] است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل گرانش $f\left(T,\tau\right)$ را در فضا زمان FRW مورد بررسـی قـرار دادیـم. بـرای ایـن منظـور لاگرانـژی مـوثر را بـا متغیرهای مستقل ، عامل مقیاس a و نـرده‌ای پـیچش T و رد تانسور انرژی-تکانه τ به دست آوردیم. با درخواست این کـه جواب‌های مدل گرانش $f\left(T,\tau\right)$ از تقارن نـودر تبعیـت کننـد توانستیم تابعیت مناسبی بـرای $f\left(T,\tau\right)$ ارائـه دهـیم. در واقـع ایدهٔ استفاده از تقارن نودر در کیهان شناسـی موضـوع جدیـدی نیست. در واقع مقالات زیادی در این زمینه منتشر شـده اسـت. تقارن نودر بـه طـور گسـترده‌ای در مـدل‌هـای کیهـان شناسـی همسانگرد در گرانش $f\left(T\right)$ برای مشخص کردن شکل صریح تله پارالل از $f\left(T\right)$ و پیدا کردن راه حـل دقیـق متنـاظر، مـورد استفاده قرار گرفته است. بعد از اعمال تقارن نودر به لاگرانژی، توانستیم شکل مناسبی برای تابع $f\left(T,\tau\right)$ مطرح کنیم کـه بـه صورت $f\left(T,\tau\right)=f_0 T^{\frac{m}{2(n-1)}}e^{-\frac{(m+3)\tau}{K}}$ به دست آمـده اسـت. بعد از این، کمیت پایسته نودری را برای این مـدل بـه صـورت $Q=-12\frac{m a^{\frac{c}{2}+3}\,\dot{a}T^{-\left(-\frac{m}{c}+1\right)}e^{-\frac{(m+3)}{\kappa}\tau}}{c}$ به دست آوردیـم. بـا استفاده از این نتایج متوجه شدیم که عامل مقیاس در چارچوب این مدل به صورت $a\sim t^{\frac{3}{2}}$ تحول می‌یابد. برای پـی بـردن بـه این که تئوری گرانشی $f\left(T,\,\tau\right)$ می‌تواند یک توصـیف خـوب از کیهان ارائه دهد یا نه، باید مطالعات گسترده‌ای در این حـوزه انجام گیرد. در واقع باید به طور ویژه، بررسی جزئیات داده‌های کیهـانی از قبیـل ابرنـواختر یـک-a، نوسـانگرهای آگوسـتیک باریونی، تابش زمینهٔ کیهانی و هسته‌زایی مهبانـگ، جهـت پیـدا کـردن محـدودیت‌های بـر پارامترهـای تئـوری صـورت گیـرد. همچنین، بعد از به دست آوردن حل‌های متقارن کروی، می‌توان در خصوص گرانش $f\left(T,\,\tau\right)$ و داده‌های منظومـهٔ خورشـیدی نیز بررسی‌هایی انجام داد. علاوه بر این می‌توان معادلات مربوط به اختلالات برداری، نرده‌ای و تانسوری را نیز استخراج کـرد و پیش‌بینی‌های مربوطه را نیز ارزیابی کرد. همگی آنهـا می‌تواننـد انگیزه و موضوعی جهت انجام تحقیقات آینده باشند.

مراجع

1. S W Allen et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **353** (2004) 547.
2. A G Riess, et al., *Astron. J*. **116** (1989) 1009.
3. E J Copeland, M Sami, and S Tsujikawa, *Int. J. Mod. D* **15** (2006) 1753**.**
4. T Clifton, and et al., *Phys. Rept.* **513** (2012) 1.
5. J W Moffat, arXiv:astro-ph/0606124 [astro-ph], (2006).
6. T Harko, et al., *Phys. Rev. D* **89** (2014) 124036.
7. D Momeni and R Myrzakulov, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys*, **11**, 8 (2014) 145007.
8. I G Salako, et al., *Universe* **6** (2020) 167.
9. S B Nassur, et al., *Astrophys. Space Sci*. **360**, 2 (2015) 60.
10. R de Ritis et al., *Phys. Rev. D* **42** (1990) 1091.
11. S Capozziello et al., *Phys. Rev. D* **80** (2009) 104030.
12. C Rubano et al., *Phys. Rev. D* **69** (2004) 103510.
13. G Esposito, et al., *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **8**, 8 (2011) 1815.
14. M Tsamparlis and A Paliathanasis, *Class. Quantum Grav.* **29**, 1 (2011) 015006.
15. S Basilakos, et al., *Phys. Rev. D* **83** (2011) 103512.
16. K Atazadeh and F Darabi, *Eur. Phys. J. C* **72** (2012) 2016.