مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران
مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۱، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۴۰۰

تعمیم چارچوب معرفی شده توسط دومینی، شبانی و لیدر برای تحول کاهش یافته

ایمان سرگلزهی

گروه فیزیک، دانشگاه نیشابور، نیشابور
گروه پژوهشی نجوم و کیهان شناسی، دانشگاه نیشابور، نیشابور

پست الکترونیکی: sargolzahi@neyshabur.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۱۵ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۴۰۰/۲/۲۶)

چکیده

سامانهٔ S، در حال برهم کنش با محیط E، را در نظر بگیرید. یک موضوع مهم، در نظریهٔ سامانه‌های باز کوانتومی، این است که آیا می‌توان تحول کاهش یافتهٔ سامانه را با یک نگاشت خطی بیان کرد یا خیر. دومینی، شبانی و لیدر یک چارچوب کلی برای تحول کاهش یافتهٔ خطی هرمیتی ارائه کرده‌اند. آنها وضعیتی را در نظر گرفته‌اند که سامانه و محیط، هر دو، بعد متناهی دارند. می‌توان چارچوب معرفی شده توسط آنها را، به وضعیتی که محیط بعد نامتناهی دارد، نیز تعمیم داد. در این مقاله، بعد از بیان این تعمیم، دربارهٔ نقش تحدب مجموعهٔ حالات اولیهٔ سامانه– محیط $S=\{\rho_{SE}\}$، در این چارچوب، بحث خواهیم کرد. سپس، اثباتی برای وجود نمایش جمع عملگری، برای تحول کاهش یافتهٔ خطی هرمیتی، ارائه خواهیم کرد. این اثبات به ما این امکان را می‌دهد که به راحتی یکریختی‌های چوی– جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی را نیز اثبات کنیم.

واژه‌های کلیدی: سامانهٔ کوانتومی باز، نگاشت هرمیتی، نگاشت کاملاً مثبت، نگاشت ارجاع، یکریختی چوی– جمیلکوفسکی.

۱. مقدمه

تحول زمانی یک سامانهٔ بسته (منزوی) کوانتومی به صورت یکانی قابل بیان است:

$$\rho' = U\rho U^{\dagger}\ , \qquad U^{\dagger}U = I, \tag{۱}$$

که عملگرهای چگالی ρ و ρ'، به ترتیب، حالات اولیه و نهایی سامانه، U عملگر یکانی تحول زمانی و I هم عملگر همانی است [۱]. ولی در حالت کلی، سامانهٔ S منزوی نیست و در حال برهم‌کنش با محیط E است. می‌توان مجموعهٔ سامانه– محیط را به عنوان یک سامانهٔ بسته در نظر گرفت که تحول آن با رابطهٔ (۱) بیان می‌شود. بنابراین عملگر چگالی کاهش یافتل نهایی سامانه با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\rho'_S = Tr_E(U\rho_{SE}U^{\dagger})\ , \qquad U^{\dagger}U = I_{SE}\ , \tag{۲}$$

که ρ_{SE} حالت اولیهٔ سامانه– محیط، U عملگر تحول زمانی کل سامانه– محیط و I_{SE} هم عملگر همانی روی کل SE است [۱].

حال این سؤال پیش می‌آید که چه ارتباطی بین حالت اولیهٔ سامانه، یعنی $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$، و حالت نهایی آن، یعنی ρ'_S، وجود دارد؟ آیا ρ'_S را می‌توان به صورت تابعی خطی از ρ_S نوشت؟ در حالت کلی، پاسخ این سؤال منفی است [۲–۵]. در واقع، برای آن که بتوان تحول زمانی کاهش یافتهٔ سامانه را به صورت تابعی خطی بیان کرد، بایستی یا روی عملگر تحول زمانی سامانه– محیط U قید گذاشت یا روی مجموعهٔ حالات اولیل ممکن برای سامانه– محیط $S=\{\rho_{SE}\}$ [۲].

در مرجع [۲] یک چارچوب کلی، برای وضعیتی که می‌توان تحول کاهش یافتهٔ سامانه S را به صورت خطی بیان کرد، ارائه شده است. در واقع می‌توان نشان داد که تحول کاهش یافتهٔ سامانهٔ S خطی است، اگر و فقط اگر بتوان آن را در قالب این چارچوب فرمول بندی کرد [۶، ۷].

در [۲] بحث به وضعیتی محدود شده است که سامانهٔ S و محیط E، هر دو، بعد متناهی دارند. ما، در [۶]، این چارچوب کلی را به وضعیتی که S بعد متناهی دارد، ولی بعد E دلخواه است، تعمیم داده‌ایم. این تعمیم سودمند است، چرا که در بسیاری از وضعیت‌های فیزیکی، در مبحث سامانه‌های باز کوانتومی، می‌توان مسئله را به صورت سامانه‌ای با بعد متناهی، که در حال برهم کنش با یک محیط با بعد نامتناهی است، فرمول بندی کرد [۸ و ۹]. در بخش‌های دوم و سوم مقالهٔ حاضر، این نتیجه ارائه شده در [۶] را، به شکلی مبسوط تر بیان خواهیم کرد.

نکتهٔ مهم، در چارچوب کلی معرفی شده در [۲]، استفاده از فضای V، یعنی فضای پوشانده شده توسط عناصر $S=\{\rho_{SE}\}$، به جای خود S، جهت ارائه فرمول بندی و نتایج مربوطه است. این باعث اهمیت نقش محدب بودن (نبودن) S در این چارچوب، می شود. لذا، در بخش چهارم، درباره این موضوع نیز بحث خواهیم کرد.

چنانچه تحول کاهش یافتهٔ سامانه خطی باشد، آنگاه هرمیتی نیز هست، یعنی هر عملگر هرمیتی را به عملگری هرمیتی نگاشت می‌کند [۱۰ و ۱۱]. برای هر تحول خطی هرمیتی نیز یک نمایش جمع عملگری وجود دارد [۱۰ و ۱۱]. ما، در بخش پنجم، اثباتی برای این موضوع نیز ارائه خواهیم کرد که شبیه به اثبات ارائه شده توسط چوی [۱ و ۱۲]، برای حالت خاص تحول کاملا مثبت، است.

یک وضعیت جالب توجه زمانی است که تحول کاهش یافته هرمیتی، مثبت نیز باشد؛ یعنی هر عملگر مثبت را به عملگری مثبت نگاشت کند. در این صورت می‌توان به این تحول مثبت، به دو روش استفاده از یکریختی چوی- جمیلکوفسکی و یا یکریختی جمیلکوفسکی [۱۲- ۱۴]، یک «شاهد درهم تنیدگی» [۱۵] را نسبت داد. روش اثبات ارائه شده در بخش پنجم به ما این امکان را می دهد که یکریختی‌های چوی- جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی را به راحتی اثبات کنیم. این نتیجه، به عنوان آخرین نتیجهٔ این مقاله، در بخش ششم ارائه خواهد شد.

۲. نگاشت ارجاع

وضعیتی را در نظر بگیریم که سامانهٔ S بعد متناهی d_S دارد، ولی بعد محیط E دلخواه است (E ممکن است بعد متناهی یا نامتناهی داشته باشد). مجموعهٔ حالات اولیهٔ ممکن برای سامانه- محیط $S=\{\rho_{SE}\}$ را نیز کاملا دلخواه می‌گیریم. S در هر مسئله فیزیکی و یا شرایط آزمایشگاهی متفاوت، متناسب با شرایط (حالات) اولیهٔ ممکن، تعیین می‌شود.

بنابراین، مجموعهٔ حالات اولیهٔ ممکن برای سامانهٔ S با $S_S=Tr_E S$ داده می شود. از آنجا که S بعد متناهی d_S دارد، تعدادی متناهی از اعضای S_S مستقل خطی‌اند. فرض کنیم که $\tilde{S}_S=\{\rho_S^{(1)},\ldots,\rho_S^{(m)}\}$، که $m\le(d_S)^2$، مجموعه عناصر مستقل خطی درون S_S باشد. پس، برای هر $\rho_S\in S_S$ داریم:

$$\rho_S=\sum_{i=1}^{m}a_i\rho_S^{(i)}\ , \tag{۳}$$

که a_iها اعدادی حقیقی‌اند.

مستقل خطی بودن $\rho_S^{(i)}\in\tilde{S}_S$ها منجر به مستقل خطی بودن $\rho_{SE}^{(i)}$ها، که $\rho_S^{(i)}=Tr_E\left(\rho_{SE}^{(i)}\right)$، می‌شود. بنابراین هر $\rho_{SE}\in S$ را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

$$\rho_{SE}=\sum_{i=1}^{m}a_i\rho_{SE}^{(i)}+Y\ , \tag{۴}$$

که a_iها همان ضرایب موجود در رابطهٔ (۳) هستند و Y نیز عملگری روی SE است، به نحوی که $Tr_E(Y)=0$. یعنی اگر $\rho_{SE}\in S$ قابل بسط بر حسب $\rho_{SE}^{(i)}$ها نباشد، با توجه به برقراری رابطهٔ (۳) برای $\rho_S=Tr_E\left(\rho_{SE}\right)$، اختلاف بین ρ_{SE} و $\sum_{i=1}^{m}a_i\rho_{SE}^{(i)}$ یک Y است که $Tr_E(Y)=0$.

برای ادامهٔ بحث، مناسب‌تر این است که به جای S و S_S از زیرفضاهای برداری V و V_S که به شکل زیر [۲]

$$\begin{aligned}&V=Span_C\ S\ ,\\&V_S=Tr_E\ V=Span_C\ S_S=Span_C\ \tilde{S}_S\ ,\end{aligned} \tag{۵}$$

تعریف می‌شوند، استفاده کنیم. بنابراین هر $x\in V_S$ را می‌توان به شکل

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i \rho_S^{(i)} \ , \qquad (۶)$$

بسط داد که c_iها ضرایبی مختلطند. مشابه رابطهٔ (۴)، می‌توان هر $X \in{}'$ را نیز به شکل زیر بسط داد:

$$X = \sum_{i=1}^{m} c_i \rho_{SE}^{(i)} + Y \ , \qquad (۷)$$

که، با توجه به این که $x = Tr_E\left(X\right)$، c_iها همان ضرایب موجود در رابطهٔ (۶) هستند و $Y \in V_\circ$ است که $V_\circ$ مجموعهٔ همهٔ عناصر عضو V است که رد جزئی آنها، نسبت به E، صفر است. بنابراین

$$V = \left(Span_C \ \tilde{S}\right) \mathring{A} V_\circ \ , \qquad (۸)$$

که $\tilde{S} = \{\rho_{SE}^{(1)}, \ldots, \rho_{SE}^{(m)}\}$ و $\rho_S^{(i)} = Tr_E\left(\rho_{SE}^{(i)}\right)$ که $\rho_S^{(i)} \in \tilde{S}_S$.

حال می‌توانیم نگاشت ارجاع[۱] Λ_S را روی کل V_S تعریف کنیم. ابتدا تعریف می کنیم:

$$\Lambda_S\left(\rho_S^{(i)}\right) \equiv \rho_{SE}^{(i)} \ . \qquad (۹)$$

یعنی Λ_S هر $\rho_S^{(i)} \in \tilde{S}_S$ را بـه $\rho_{SE}^{(i)} \in \tilde{S}$ و $\rho_S^{(i)} = Tr_E\left(\rho_{SE}^{(i)}\right)$ می‌برد. حال می‌توانیم با استفاده از روابط (۶) و (۹)، نحو G اثر Λ_S روی هر $x \in V_S$ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\Lambda_S\left(x\right) \equiv \sum_{i=1}^{m} c_i \Lambda_S\left(\rho_S^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \rho_{SE}^{(i)} \ . \qquad (۱۰)$$

ملاحظه می کنیم که Λ_S نگاشتی خطی و هرمیتی است؛ یعنی هر عملگر هرمیتی را به عملگری هرمیتی نگاشت می کند (وقتی x هرمیتی است، ضرایب بسط c_i حقیقی اند).

همچنین با توجه به روابط (۷) و (۱۰)، برای هر $X \in V$ و $x = Tr_E\left(X\right)$ داریم:

$$\Lambda_S\left(x\right) = X - Y \equiv Q, \qquad (۱۱)$$

که $Y \in V_\circ$ است. یعنی Λ_S هر $x \in V_S$ را به $Q \in Span_C \ \tilde{S} \subseteq V$ نگاشت می کند، به نحوی که $x = Tr_E\left(X\right) = Tr_E\left(Q\right)$. به بیان دیگر، Λ_S روی V_S به صورت نگاشت معکوس Tr_E عمل می‌کند.

نگاشت ارجاع Λ_S، در رابطهٔ (۱۰)، روی زیر فضای V_S، به صورت نگاشتی خطی و هرمیتی تعریف شد. می‌توان به سادگی، این تعریف را به کل L_S یعنی مجموعه همهٔ عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت سامانهٔ S، نیز تعمیم داد [۱۶].

با تعریف نگاشت ارجاع Λ_S به صورت نگاشتی هرمیتی، در رابطه (۱۰)، ما قدم اصلی برای تعمیم چارچوب دومینی- شبانی- لیدر، در [۲]، از وضعیت محیط E با بعد متناهی به وضعیت بعد دلخواه برای E، را برداشته ایم. نکتهٔ کلیدی، در روش ما، این بود که فقط از d_S- بعدی بودن S استفاده کردیم و هیچ ارجاعی به بعد E ندادیم. بعد متناهی S باعث شد که فقط $m \le \left(d_S\right)^2$ تا از عناصر S_S مستقل خطی باشند و امکان تعریف Λ_S به صورت رابطهٔ (۱۰) فراهم آید.

در بخش بعدی خواهیم دید که چگونه روابط (۱۰) و (۱۱) منجر به بیان تحول کاهش یافتهٔ سامانهٔ S به صورت نگاشتی هرمیتی می شوند.

۳. تحول کاهش یافتهٔ هرمیتی

بار دیگر مجموعهٔ حالات اولیهٔ سامانه- محیط $S = \{\rho_{SE}\}$ را در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای آن که تحول کاهش یافتهٔ سامانه در (۲) را بتوان به صورت تابعی از حالت اولیهٔ سامانه $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$ بیان کرد؛ وجود سازگاری[۲] تحت تحول زمانی یکانی سامانه- محیط U است [۲]. یعنی، اگر برای $\sigma_{SE}\ ,\ \rho_{SE}\ \in S$ داشته باشیم

$$\sigma_S = Tr_E(\sigma_{SE}) = Tr_E(\rho_{SE}) = \rho_S \ , \qquad (۱۲)$$

آنگاه بعد از تحول زمانی U روی کل SE، هم داشته باشیم

$$\sigma'_S = Tr_E(U\sigma_{SE}U^\dagger) = Tr_E(U\rho_{SE}U^\dagger) = \rho'_S \ . \qquad (۱۳)$$

واضح است که اگر شرط سازگاری تحت U برقرار نباشد نمی‌توان به یک حالت اولیهٔ ρ_S، تک حالت نهایی ρ'_S را نسبت داد (دقت شود که وقتی می‌توان ρ'_S را به صورت تابعی از ρ_S نمایش داد که هر ρ_S اولیه فقط به یک ρ'_S نهایی منجر شود).

ما، در ادامهٔ این بخش، به جای در نظر گرفتن شرط سازگاری S تحت U، شرط قوی‌تر سازگاری V تحت U را در نظر می‌گیریم. یعنی اگر برای $W, X \in V$ داشته باشیم.

$$Tr_E\left(W\right) = Tr_E\left(X\right) = x, \qquad (۱۴)$$

آنگاه بایستی

$$Tr_E(UWU^\dagger) = Tr_E(UXU^\dagger) = x'. \qquad (۱۵)$$

از (۱۴) واضح است که $X - W = Y \in V_\circ$. بنابراین، شرط (۱۵)

---

۱. Assignment map

۲. Consistency

بـه ایـن معنـی اسـت کـه هـر $Y\in V$، تحـت تحـول U، بـه $Z\in \ker Tr_E$ بـرود کـه $\ker Tr_E$ مجموعـه همـه عملگرهـای خطی روی SE است که Tr_E آنها صفر است.

اگر برای یک U شرط سازگاری S برقـرار نباشـد، آنگـاه تحول کاهش یافته اصلا قابل بیان به صورت یک تابع نیسـت. ولی جالب این که اگر برای U مد نظـر، شـرط سـازگاری V برقرار باشد، آنگاه نه تنها بـرای هـر $x\in V_S$ دلخـواه، می‌تـوان تحول را به صورت یک تابع بیان کرد، بلکه این تحول، خطـی هرمیتی نیـز هسـت. از روابـط (۲) و (۱۱)، بـه عـلاوه فـرض سازگاری تحت U داریم:

$$\begin{aligned} x' &= Tr_E(UXU^\dagger) \\ &= Tr_E(UQU^\dagger) + Tr_E(UYU^\dagger) \\ &= Tr_E(UQU^\dagger) = Tr_E(U\ \Lambda_S(x)\ U^\dagger) \\ &= \Psi_S(x)\ , \end{aligned} \tag{۱۶}$$

کـه $x = Tr_E(X) = Tr_E(Q)$. نگاشـت Ψ_S نگاشـتی خطـی و هرمیتی است؛ چراکه تحول یکـانی و رد جزئـی نگاشـت‌هایی کاملا مثبتند [۱] و نگاشت ارجاع Λ_S را نیـز، در بخـش قبـل، به صورت یک نگاشت هرمیتی ساختیم.

به طـور مسـتقیم بـا اسـتفاده از روابـط (۱۰) و (۱۶)، نیـز می‌توان هرمیتی بودن Ψ_S را نشان داد:

$$\begin{aligned} \Psi_S(x) &= Tr_E(U\ \Lambda_S(x)\ U^\dagger) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i Tr_E\left(U\ \Lambda_S\left(\rho_S^{(i)}\right)\ U^\dagger\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i Tr_E(U\ \rho_{SE}^{(i)}\ U^\dagger) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \rho_S'^{(i)}\ , \end{aligned} \tag{۱۷}$$

که $\rho_S'^{(i)} = Tr_E(U\ \rho_{SE}^{(i)}\ U^\dagger)$. حال اگر $x = \sum_{i=1}^{m} c_i \rho_S^{(i)}$ هرمیتـی باشـد، آنگـاه ضـرایب c_i حقیقـی انـد. بنـابراین، طبـق (۱۷)، $\Psi_S(x)$ هم عملگری هرمیتی است. پس نگاشت تحول زمانی کاهش یافتهٔ Ψ_S نگاشـتی هرمیتـی اسـت. همچنـین از (۱۷)، واضـح اسـت کـه Ψ_S حـافظ رد نیـز هسـت؛ یعنـی $Tr\left[\Psi_S(x)\right] = Tr\ (x)$.

به طور خلاصه، مشاهده کردیم که اگـر V تحـت تحـول U سازگار باشد، آنگاه تحول کـاهش‌یافتـه بـرای هـر $x\in V_S$ دلخواه، به صورت یک نگاشت خطی هرمیتـی حـافظ رد Ψ_S قابل بیان است. از آنجـا کـه $S_S\subset V_S$، ایـن نتیجـه بـرای هـر $\rho_S\in S_S$ نیز معتبر است. یعنی تحول کاهش یافتـه سـامانهٔ S با نگاشت هرمیتی Ψ_S داده می شود:

$$\rho_S' = Tr_E(U\rho_{SE}U^\dagger) = \Psi_S(\rho_S)\ , \tag{۱۸}$$

که $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$ حالت اولیهٔ سامانه است.

در بخـش پـنجم، نشـان خـواهیم داد کـه بـرای هـر نگاشـت هرمیتی، نظیر Ψ_S، یک نمایش جمـع عملگـری وجـود دارد. پیش از این، در بخـش آتـی، دربـارهٔ نقـش تحـدب مجموعـهٔ حالات اولیهٔ سامانه- محیط S در فرمول‌بنـدی ارائـه شـده در بخش جاری، بحث خواهیم کرد.

۴. نقش تحدب مجموعه حالات اولیهٔ سامانه- محیط

در بخش قبل، به جای اسـتفاده از مجموعـه‌های $S=\{\rho_{SE}\}$ و $S_S = Tr_E S$ جهـت بیـان مطالـب و ارائـهٔ فرمـول بنـدی، از زیرفضاهای $V = Span_C\ S$ و $V_S = Tr_E\ V = Span_C\ S_S$ استفاده کردیم. البته وقتی هدف یافتن یک تحول خطی است، اسـتفاده از V_S به جای S_S مورد انتظار است؛ چـرا کـه اساسـا خطـی بودن تحول Ψ_S به معنی خطی بودن روی یک زیرفضاست.

در بخش قبل فرض کردیم کـه کـل V تحـت تحـول U سازگار است. در حالی که، برای آن کـه تحـول کـاهش یافتـه برای تمام $\rho_S\in S_S$ها، قابل بیان به صـورت یـک تـابع باشـد، فقط شرط سازگاری روی S، یعنـی همـان رابطـهٔ (۱۳) کـافی است و نیازی به رابطهٔ (۱۵) نیست.

در این بخش، می خـواهیم نشـان دهـیم کـه اگـر S یـک مجموعهٔ محدب باشد، یعنی اگر

$$\begin{aligned} &\rho_{SE}\ ,\ \sigma_{SE}\ \in S \\ &\Rightarrow\ \tau_{SE} = p\rho_{SE} + (1-p)\sigma_{SE} \in S, \\ &0\le p\le 1\ , \end{aligned} \tag{۱۹}$$

آنگـاه سـازگاری S تحـت U، بـا سـازگاری V تحـت U، معادل است. به عبارت دیگر وقتی S محدب است، V تحـت U سازگار است اگر و فقط اگر S تحت U سازگار باشد.

لازم به ذکر است که آنچه در ادامه این بخش خواهد آمـد، در واقع اثباتی دیگر برای معادل بودن بندهای (c) و (d) گزارهٔ ۲ مرجع [۶] است. همچنین، در مرجـع [۲]، در حـدی کـه مـا ملاحظه کرده‌ایم، S محـدب انتخـاب شـده اسـت ولـی هـیچ اشـاره مسـتقیمی بـه معـادل بـودن سـازگاری S محـدب بـا سازگاری V نشده است.

به علاوه، دقت شود که معنی رابطهٔ (۱۹) این است که اگر ρ_{SE} و σ_{SE} را بتوان به عنوان دو حالت اولیهٔ مجاز برای سیستم- محیط در نظر گرفت (ساخت) آنگاه τ_{SE}، که حاصل مخلوط کردن ρ_{SE} و σ_{SE} با هم هست، را نیز می‌توان به عنوان یک حالت اولیهٔ مجاز برای سیستم- محیط در نظر گرفت (ساخت). لذا، فرض محدب بودن S دور از ذهن نیست؛ چرا که اگر امکان مخلوط کردن حالات اولیه فراهم باشد، آنگاه S مجموعه ای محدب خواهد بود.

اگر V تحت U، سازگار باشد آنگاه واضح است که S هم تحت U، سازگار خواهد بود؛ چراکه $S \subset V$. پس ما سراغ اثبات گزارهٔ معکوس می‌رویم. یعنی فرض کنیم که مجموعه محدب S تحت U، سازگار است. می خواهیم نشان دهیم که V هم تحت U، سازگار است.

دو عملگر $W, X \in V$، که در رابطهٔ (۱۴) صدق می‌کنند، را در نظر بگیرید. از آنجا که $V = Span_C\ S$، X و W را می‌توان به شکل زیر به صورت ترکیب خطی $\sigma_{SE}^{(l)} \in S$ها نوشت:

$$X = \sum_l d_l \sigma_{SE}^{(l)}, \quad W = \sum_l \hat{d}_l \sigma_{SE}^{(l)}, \tag{۲۰}$$

که d_lها و $\hat{d}_l$ها اعدادی مختلطند. دقت شود که $\sigma_{SE}^{(l)}$ الزاماً مستقل خطی نیستند. آنها فقط عناصری از S هستند. از رابطهٔ (۲۰)، داریم:

$$Y = X - W = \sum_l f_l \sigma_{SE}^{(l)}, \quad f_l = d_l - \hat{d}_l. \tag{۲۱}$$

اعداد مختلط f_l را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f_l = \bar{f}_l + i\,\hat{f}_l, \tag{۲۲}$$

که $i = \sqrt{-۱}$ و $\bar{f}_l$ و $\hat{f}_l$ اعدادی حقیقی‌اند. از رابطهٔ (۱۴) می‌دانیم که $Tr_E(Y) = ۰$. بنابراین از (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$Tr_E\left(\sum_l \bar{f}_l \sigma_{SE}^{(l)}\right) = -i\ Tr_E\left(\sum_l \hat{f}_l \sigma_{SE}^{(l)}\right) = ۰, \tag{۲۳}$$

چرا که $Tr_E\left(\sum_l \hat{f}_l \sigma_{SE}^{(l)}\right)$ و $Tr_E\left(\sum_l \bar{f}_l \sigma_{SE}^{(l)}\right)$، هر دو عملگرهایی هرمیتی اند.

اعداد حقیقی $\bar{f}_l$ را نیز می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\bar{f}_l = g_l - h_l, \tag{۲۴}$$

که g_l و h_l اعدادی مثبتند. همچنین، تعریف می‌کنیم:

$$G = \sum_l g_l, \quad H = \sum_l h_l. \tag{۲۵}$$

بنابراین مجموعه های $\{p_l\}$ و $\{q_l\}$ با

$$p_l \equiv \frac{g_l}{G}, \quad q_l \equiv \frac{h_l}{H}, \tag{۲۶}$$

توزیع احتمالند. یعنی $\sum_l p_l = ۱,\ ۰ \le p_l \le ۱$ و به طور مشابه $\sum_l q_l = ۱,\ ۰ \le q_l \le ۱$.

حال، از رابطهٔ (۲۳) داریم $Tr_E\left(\sum_l \bar{f}_l \sigma_{SE}^{(l)}\right) = ۰$. بنابراین، از (۲۴) و (۲۶)، داریم:

$$G\ Tr_E\left(\sum_l p_l \sigma_{SE}^{(l)}\right) = H\ Tr_E\left(\sum_l q_l \sigma_{SE}^{(l)}\right). \tag{۲۷}$$

با Tr_S گرفتن از دو سمت عبارت فوق هم واضح است که $G = H$. در نتیجه، در نهایت به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$Tr_E(\sigma_{SE}) = Tr_E(\rho_{SE}), \tag{۲۸}$$

از آنجا که S مجموعه ای محدب است، $\sigma_{SE} \equiv \sum_l p_l \sigma_{SE}^{(l)} \in S$ و $\rho_{SE} \equiv \sum_l q_l \sigma_{SE}^{(l)} \in S$.

اکنون، از شرط سازگار بودن $\boldsymbol{S}$ تحت U و رابطهٔ (۲۸) داریم:

$$Tr_E(U\sigma_{SE}U^\dagger) = Tr_E(U\rho_{SE}U^\dagger). \tag{۲۹}$$

بنابراین از (۲۴)، (۲۶)، (۲۷) و (۲۹)، داریم:

$$\begin{aligned} &G\ Tr_E\left(\sum_l p_l U\sigma_{SE}^{(l)}U^\dagger\right) = H\ Tr_E\left(\sum_l q_l U\sigma_{SE}^{(l)}U^\dagger\right) \\ &\Rightarrow Tr_E\left(\sum_l g_l U\sigma_{SE}^{(l)}U^\dagger\right) = Tr_E\left(\sum_l h_l U\sigma_{SE}^{(l)}U^\dagger\right) \\ &\Rightarrow Tr_E\left(\sum_l \bar{f}_l U\sigma_{SE}^{(l)}U^\dagger\right) = 0. \end{aligned} \tag{۳۰}$$

می‌توان مسیری مشابه (۲۴) تا (۳۰) را برای عملگر هرمیتی $\sum_l \hat{f}_l \sigma_{SE}^{(l)}$ نیز طی کرد و نتیجه گرفت که

$$Tr_E\left(\sum_l \hat{f}_l U\sigma_{SE}^{(l)}U^\dagger\right) = ۰. \tag{۳۱}$$

در نهایت از (۲۱)، (۲۲)، (۳۰) و (۳۱)، داریم:

$$Tr_E\left(UYU^\dagger\right) = Tr_E\left(\sum_l f_l U\sigma_{SE}^{(l)}U^\dagger\right) = ۰. \tag{۳۲}$$

یعنی هر $Y \in V$، دلخواه، تحت تحتحت تحول U سازگار است.

بنابراین به طور خلاصه، مشاهده کردیم که سازگاری مجموعهٔ محدب S، تحت U منجر به سازگاری زیرفضای

V تحت همان U شد. لذا وقتی S محدب است اعمال شرط سازگاری روی کل V، به جای S، همچون بخش قبل، هیچ قید اضافه ای روی S قرار نمی دهد.
ولی اگر S محدب نباشد ممکن است که اعمال شرط سازگاری روی کل V، به جای S، منجر به ایجاد قید اضافه روی S شود.
به عنوان نکتهٔ پایانی، لازم به ذکر است که در روند اثبات نتایج فوق، ما هیچ اشاره ای به بعد S یا E نداشتیم. ما فقط از فرض محدب بودن S و این که $V = Span_C\ S$ است، استفاده کردیم. بنابراین، نتایج ارائه شده در این بخش برای S و E با بعد دلخواه معتبر است. به عبارت دیگر، اثبات ارائه شده در اینجا، نسبت به اثبات ارائه شده در [۶]، که مربوط به S با بعد متناهی است، کلی تر است.

۵. نمایش جمع عملگری برای تحول هرمیتی

خلاصه نتایجی که تاکنون به دست آورده‌ایم به شکل زیر است: اگر مجموعه حالات اولیهٔ سامانه- محیط $S = \{\rho_{SE}\}$ محدب و سازگار تحت U باشد، آنگاه زیرفضای V هم تحت U سازگار است و تحول کاهش یافتهٔ سامانهٔ S هم با نگاشت خطی، هرمیتی و حافظ رد Ψ_S، به شکل رابطهٔ (۱۸) داده می شود.

برای هر نگاشت خطی هرمیتی حافظ رد Ψ_S یک نمایش جمع عملگری، به شکل زیر وجود دارد [۱۰ و ۱۱]:

$$\Psi_S(\rho_S) = \sum_i e_i E_i \rho_S E_i^\dagger \ , \qquad \sum_i e_i E_i^\dagger E_i = I_S \ , \tag{۳۳}$$

که e_iها اعدادی حقیقی، $E_i \in L_S$ها و I_S عملگر همانی روی فضای هیلبرت S است. در حالت خاصی که همهٔ e_iها مثبتند، تعریف می‌کنیم $\hat{E}_i = \sqrt{e_i} E_i$. لذا رابطهٔ (۳۳) به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \Psi_S(\rho_S) &= \sum_i \hat{E}_i \rho_S \hat{E}_i^\dagger \ , \\ \sum_i \hat{E}_i^\dagger \hat{E}_i &= I_S \ . \end{aligned} \tag{۳۴}$$

به تحولی که به شکل فوق قابل بیان باشد، یک تحول کاملاً مثبت می‌گویند [۱].

ما، در ادامه این بخش، اثباتی برای رابطهٔ (۳۳) ارائه خواهیم کرد. چنانچه در بخش آتی خواهیم دید، روند اثبات ذیل به ما این امکان را می‌دهد که یکریختی‌های چوی- جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی را نیز به راحتی اثبات کنیم.

ابتدا فضای هیلبرت کمکی R را معرفی می‌کنیم. بعد R را همچون S برابر d_S می‌گیریم. کت زیر را در فضای RS در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^{d_S} |i_R\rangle |i_S\rangle \ , \tag{۳۵}$$

که $\{|i_R\rangle\}$ و $\{|i_S\rangle\}$ به ترتیب، پایه‌هایی راست هنجار برای R و S هستند. $|\psi\rangle$ تا حد یک ضریب بهنجارش، حالت با بیشترین درهم‌تنیدگی در فضای RS است.
حال تعریف می کنیم:

$$\alpha_{RS} \equiv id_R \otimes \Psi_S(\ |\psi\rangle\langle\psi|\ ) = \sum_{i,j=1}^{d_S} |i_R\rangle\langle j_R| \otimes \Psi_S(\ |i_S\rangle\langle j_S|\ ) \ , \tag{۳۶}$$

که id_R نگاشت همانی روی سهم R است. Ψ_S نگاشتی هرمیتی است. به راحتی می‌توان نشان داد که $id_R \otimes \Psi_S$ نیز نگاشتی هرمیتی است.[۱] بنابراین α_{RS} یک عملگر هرمیتی با بسطی به شکل زیر است:

$$\alpha_{RS} = \sum_{n=1}^{(d_S)^2} e_n |E_n\rangle\langle E_n| \ , \tag{۳۷}$$

که e_nها ویژه مقادیر α_{RS}، و بالتبع اعدادی حقیقی و $|E_n\rangle$ها ویژه حالات α_{RS} هستند.

همچنین توجه کنید که هر عملگر چگالی دلخواه ρ_S را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

$$\rho_S = \sum_{i,j=1}^{d_S} \langle j_R |\ P_R |i_R\rangle\ |i_S\rangle\langle j_S| \ , \tag{۳۸}$$

که P_R عملگری مثبت روی R است (در واقع P_R ترانهاده ρ_S است). بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \rho'_S = \Psi_S(\rho_S) &= \sum_{i,j=1}^{d_S} \langle j_R |\ P_R |i_R\rangle\ \Psi_S(\ |i_S\rangle\langle j_S|\ ) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_S} \langle j_R |\ P_R |i_R\rangle \langle i_R |\ \alpha_{RS} |j_R\rangle \ , \end{aligned} \tag{۳۹}$$

۱. می‌توان برای L_S یک پایه از عملگرهای هرمیتی S_j را ساخت [۱]. به همین ترتیب می‌توان برای L_R، یعنی مجموعه عملگرهای خطی روی R، نیز یک پایه از عملگرهای هرمیتی R_i را داشت. بنابراین، هر عملگر هرمیتی روی RS را می توان به شکل $A_{RS} = \sum b_{ij}\ R_i \otimes S_j$ با ضرایب حقیقی b_{ij} بسط داد. حال به راحتی، می‌توان دید که $id_R \otimes \Psi_S(A_{RS})$ نیز یک عملگر هرمیتی است. بنابراین، $id_R \otimes \Psi_S$ یک نگاشت هرمیتی است.

که در سطر آخر از (۳۶) استفاده کرده ایم.

اکنون، عملگرهای خطی $E_n \in L_S$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_n|i_S\rangle \equiv \langle i_R|E_n\rangle \ . \quad (۴۰)$$

حال، از (۳۷)، (۳۸) و (۴۰) داریم:

$$\begin{aligned}\sum_n e_n E_n \rho_S E_n^\dagger &= \sum_{i,j,n} \langle j_R|\ P_R|i_R\rangle e_n E_n\ |i_S\rangle\langle j_S|\ E_n^\dagger \\ &= \sum_{i,j,n} \langle j_R|\ P_R|i_R\rangle e_n \langle i_R|E_n\rangle\langle E_n|j_R\rangle \quad (۴۱) \\ &= \sum_{i,j} \langle j_R|\ P_R|i_R\rangle\langle i_R|\ \alpha_{RS}|j_R\rangle \ .\end{aligned}$$

از مقایسهٔ سطرهای آخر (۳۹) و (۴۱) ملاحظه می‌کنیم که حالت نهایی ρ'_S با

$$\rho'_S = \Psi_S(\rho_S) = \sum_n e_n E_n \rho_S E_n^\dagger \ , \quad (۴۲)$$

داده می شود که همان (۳۳) است. همچنین از (۳۷) واضح است که حداکثر تعداد عملگرهای E_n، که در رابطهٔ فوق وارد می شوند، $(d_S)^۲$ تا است.

شرط $\sum_n e_n E_n^\dagger E_n = I_S$ را نیز می‌توان به راحتی از حافظ رد بودن Ψ_S به دست آورد. اولا توجه شود که $B_S = \sum_n e_n E_n^\dagger E_n$ عملگری هرمیتی است؛ چرا که $\left(E_n^\dagger E_n\right)$ها عملگرهایی مثبتند و e_nها هم اعدادی حقیقی‌اند. بنابراین برای B_S بسطی به شکل

$$B_S = \sum_{i=۱}^{d_S} b_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \ , \quad (۴۳)$$

وجود دارد که b_iها ویژه مقادیر و $|\phi_i\rangle$ها ویژه حالات B_S هستند. حال با انتخاب $\rho_S = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ و با توجه به حافظ رد بودن Ψ_S در (۴۲)، داریم:

$$\begin{aligned}1 = Tr(\rho'_S) &= Tr\left(\sum_n e_n E_n|\phi_i\rangle\langle\phi_i|E_n^\dagger\right) \quad (۴۴) \\ &= \langle\phi_i|\ B_S|\phi_i\rangle = b_i \ .\end{aligned}$$

یعنی تمام ویژه مقادیر B_S برابر واحدند. بنابراین $B_S = I_S$.

پس به طور خلاصه، نمایش جمع عملگری (۳۳) را برای نگاشت هرمیتی و حافظ رد Ψ_S اثبات کردیم. دقت شود که در روند این اثبات، هیچ اشاره‌ای به بعد E نشد و فقط از d_S-بعدی بودن S استفاده کردیم.

۶. یکریختی‌های چوی- جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی

در فضای دوجزئی RS، عملگر چگالی σ_{RS} را جداپذیر می‌نامند، اگر برای آن بسطی به شکل

$$\sigma_{RS} = \sum_i p_i \sigma_R^{(i)} \otimes \sigma_S^{(i)}, \quad (۴۵)$$

وجود داشته باشد، که $\sigma_R^{(i)}$ عملگر چگالی در فضای R، $\sigma_S^{(i)}$ عملگر چگالی در فضای S و $\{p_i\}$ یک توزیع احتمال ($p_i \geq ۰, \ \sum p_i = ۱$) هستند [۱۵]. اگر σ_{RS} جداپذیر نباشد، به آن درهم‌تنیده می گویند. در ادامه، حالت‌های جداپذیر را با نماد $\sigma_{RS}^{(s)}$ و حالت‌های درهم‌تنیده را با نماد $\sigma_{RS}^{(e)}$ نشان خواهیم داد.

یک شاهد درهم‌تنیدگی W_{RS} مشاهده پذیری است که برای هر $\sigma_{RS}^{(s)}$ دلخواه، در رابطهٔ

$$Tr\left(W_{RS}\sigma_{RS}^{(s)}\right) \geq ۰, \quad (۴۶)$$

صدق می کند و دست کم یک $\sigma_{RS}^{(e)}$ وجود دارد که برای آن رابطهٔ

$$Tr\left(W_{RS}\sigma_{RS}^{(e)}\right) < ۰, \quad (۴۷)$$

برقرار است [۱۵].

یکریختی چوی- جمیلکوفسکی بیان می‌دارد که اگر تحول هرمیتی Ψ_S سامانه در (۳۳) مثبت هم باشد، آنگاه عملگر α_{RS} در رابطهٔ (۳۶)، یک شاهد درهم‌تنیدگی است [۱۵-۱۲]. در ادامهٔ این بخش، اثباتی سرراست برای این یکریختی را ارائه خواهیم کرد.

ابتدا حالت اولیهٔ سامانه را به شکل $\rho_S = |\phi\rangle\langle\phi|$ و $|\phi\rangle = \sum y_i\ |i_S\rangle$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین

$$\rho_S = \sum_{i,j=۱}^{d_S} y_i y_j^*\ |i_S\rangle\langle j_S| \ . \quad (۴۸)$$

از مقایسهٔ عبارت فوق با رابطهٔ (۳۸)، داریم:

$$\langle j_R|\ P_R|i_R\rangle = y_i y_j^* \ . \quad (۴۹)$$

بنابراین (سطر آخر) رابطهٔ (۴۱) به شکل

$$\begin{aligned}\Psi_S(\rho_S) = \sum_n e_n E_n \rho_S E_n^\dagger &= \sum_{i,j} y_i y_j^* \langle i_R|\ \alpha_{RS}|j_R\rangle \quad (۵۰) \\ &= \langle\eta_R|\ \alpha_{RS}|\eta_R\rangle,\end{aligned}$$

در می‌آید که

$$|\eta_R\rangle = \sum y_i^*\ |i_R\rangle, \quad (۵۱)$$

حالتی دلخواه در فضای R است.

حال اگر Ψ_S نگاشتی مثبت باشد $\Psi_S(\rho_S)$ برای هر $\rho_S=|\phi\rangle\langle\phi|$ دلخواه، عملگری مثبت خواهد بود. بنابراین از (۵۰) برای هر کت دلخواه $|\theta_S\rangle$ در فضای S داریم

$$\langle\theta_S|\Psi_S(\rho_S)\,|\theta_S\rangle=\langle\eta_R|\langle\theta_S|\,\alpha_{RS}|\eta_R\rangle|\theta_S\rangle\geq 0. \qquad (۵۲)$$

یعنی مقدار چشمداشتی عملگر α_{RS}، برای هر حالت حاصلضربی دلخواه $|\eta_R\rangle|\theta_S\rangle$، عددی مثبت است. از مقایسه با رابطهٔ (۴۶) ملاحظه می کنیم که α_{RS} یک شاهد درهم تنیدگی است.

توجه شود که اگر مقدار چشمداشتی α_{RS}، برای هر کت دلخواه $|\Phi_{RS}\rangle$ درفضای RS، عددی مثبت شود، در این صورت α_{RS} یک عملگر مثبت خواهد بود. بنابراین تمام ویژه مقادیر e_n در رابطه (۳۷)، اعدادی مثبت خواهند بود. لذا از مقایسه با (۳۴)، نتیجه می‌گیریم که Ψ_S یک نگاشت کاملاً مثبت است.

به طریقی مشابه، می‌توان یکریختی جمیلکوفسکی [۱۳ و ۱۴] را نیز اثبات کرد. ابتدا عملگر

$$\beta_{RS}\equiv \dagger_R\otimes\Psi_S(\,|\psi\rangle\langle\psi|\,)=\sum_{i,j=1}^{d_S}|j_R\rangle\langle i_R|\otimes\Psi_S(\,|i_S\rangle\langle j_S|\,)\,, \qquad (۵۳)$$

را تعریف می‌کنیم که کت $|\psi\rangle$ در (۳۵) آمده و $\dagger_R\big(|i_R\rangle\langle j_R|\big)\equiv|j_R\rangle\langle i_R|$. یکریختی جمیلکوفسکی بیان می‌دارد که اگر Ψ_S نگاشتی مثبت باشد، آنگاه β_{RS} یک شاهد درهم‌تنیدگی است.

حال با استفاده از روابط (۳۸) و (۵۳) داریم:

$$\begin{aligned}\Psi_S(\rho_S)\; &=\sum_{i,j=1}^{d_S}\langle j_R|\,P_R|i_R\rangle\,\Psi_S(\,|i_S\rangle\langle j_S|\,)\\ &=\sum_{i,j=1}^{d_S}\langle j_R|\,P_R|i_R\rangle\langle j_R|\,\beta_{RS}|i_R\rangle\,,\end{aligned} \qquad (۵۴)$$

که با انتخابی به شکل (۴۸) برای ρ_S و با توجه به (۴۹)، به صورت

$$\Psi_S(\rho_S)\;=\sum_{i,j=1}^{d_S}y_i y_j^*\langle j_R|\,\beta_{RS}|i_R\rangle=\langle\tilde{\eta}_R|\,\beta_{RS}|\tilde{\eta}_R\rangle, \qquad (۵۵)$$

در می‌آید که

$$|\tilde{\eta}_R\rangle=\sum y_i\;|i_R\rangle, \qquad (۵۶)$$

کتی دلخواه در فضای R است.

حال اگر Ψ_S نگاشتی مثبت باشد، برای هر کت دلخواه $|\theta_S\rangle$ در فضای S داریم

$$0\leq\langle\theta_S|\Psi_S(\rho_S)\,|\theta_S\rangle=\langle\tilde{\eta}_R|\langle\theta_S|\,\beta_{RS}|\tilde{\eta}_R\rangle|\theta_S\rangle, \qquad (۵۷)$$

که در سطر دوم رابطهٔ فوق از (۵۵) استفاده کرده‌ایم. از مقایسهٔ (۵۷) با (۴۶)، واضح است که β_{RS} یک شاهد درهم تنیدگی است.

توجه شود که اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم، در واقع باید بگوییم که (۵۷) بیان می‌دارد که مقدار چشمداشتی β_{RS} برای هر حالت حاصلضربی، مثبت است. این الزاماً به معنی شاهد درهم تنیدگی بودن β_{RS} نیست؛ چرا که برای شاهد درهم تنیدگی بودن β_{RS}، ارضای قید (۴۷) نیز لازم است.

جالب این که، بر خلاف β_{RS}، برای α_{RS} در (۳۶)، دیگر این ابهام وجود ندارد. اگر Ψ_S نگاشتی مثبت باشد ولی کاملاً مثبت نباشد، در این صورت دست کم یک ویژه مقادیر e_n، در رابطهٔ (۳۷) بایستی منفی باشد. با توجه به (۵۲)، ویژه حالت متناظر با این ویژه مقدار منفی باید درهم تنیده باشد که با (۴۷) کاملا همخوان است. بنابراین α_{RS}، در (۳۶) متناظر با نگاشت Ψ_S، که مثبت هست ولی کاملاً مثبت نیست، یک شاهد درهم تنیدگی است.

۷. جمع بندی

نتایج این مقاله را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش‌های دوم تا چهارم به تعمیم و بازبینی بخشی از نتایج ارائه شده در مراجع [۲و ۶] اختصاص داشت. ما خود را به وضعیتی محدود کردیم که سامانهٔ S بعد متناهی d_S دارد ولی بعد محیط E دلخواه است.

ابتدا، ما نگاشت خطی و هرمیتی ارجاع Λ_S را به صورت رابطهٔ (۱۰) ساختیم. ساختن نگاشت ارجاع به ما این امکان را داد که وقتی سازگاری تحت تحول زمانی سامانه- محیط U وجود دارد، بتوانیم تحول کاهش‌یافته سامانه را برای هر حالت اولیهٔ سامانه $\rho_S=Tr_E(\rho_{SE})\,,\ \ \rho_{SE}\in V$ به صورت نگاشت خطی هرمیتی حافظ رد Ψ_S، در رابطهٔ (۱۶) بیان کنیم.

برای رسیدن به رابطهٔ (۱۶)، ما از شرط سازگاری روی کل V به جای S، تحت تحول زمانی سامانه- محیط U، استفاده کردیم. در بخش چهارم، این را نشان دادیم که اگر S محدب باشد آنگاه این کار منجر به ایجاد هیچ قید اضافه‌ای

روی S نمی شود. اثبات ارائه شده در این بخش، برای سامانه (و محیط) با بعد دلخواه معتبر است.

در بخش‌های پنجم و ششم نیز، ما به ارائهٔ اثبات‌هایی سرراست برای چند نتیجهٔ مشهور در مبحث نگاشت‌های خطی هرمیتی، پرداختیم.

برای نگاشت خطی هرمیتی حافظ رد Ψ_S یک نمایش جمع عملگری، نظیر رابطهٔ (۳۳)، وجود دارد. در بخش پنجم، اثباتی برای این رابطه را ارائه کردیم.

روش اثبات ارائه شده در بخش پنجم به ما این امکان را داد که در بخش ششم، یکریختی‌های چوی- جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی را نیز به سادگی به عنوان آخرین نتیجهٔ ارائه شده در این مقاله، اثبات کنیم.

مراجع

1. M A Nielsen and I L Chuang, "*Quantum Computation and Quantum Information*", Cambridge University Press, Cambridge (2000).
2. J M Dominy, A Shabani and D A Lidar, Quant. Inf. Process. **15** (2016) 465.
3. P Stelmachovic and V Buzek, P*hys. Rev*. A **64** (2001) 062106; *Phys. Rev.* A **67** (2003) 029902 (E).
4. K M F Romero, P Talkner and P Hanggi, *Phys. Rev.* A **69** (2004) 052109.
5. I Sargolzahi and S Y Mirafzali, "When the assignment map is completely positive", Open Syst. Info. Dyn. **25** (2018) 1850012.
6. I Sargolzahi, *Phys. Rev*. A **102** (2020) 022208.
7. I Sargolzahi, *Iran. J. Phys. Res*. **20** (2020) 267.
8. D A Lidar, Lecture notes on the theory of open quantum systems, arXiv:1902.00967 (2019).
9. A Rivas and S F Huelga, *Open Quantum Systems: An Introduction*, *Springer*, *Heidelberg* (2011) arXiv:1104.5242.
10. E C G Sudarshan, P M Mathews and J Rau, Stochastic dynamics of quantum- mechanical systems, *Phys. Rev.* **121** (1961) 920.
11. T F Jordan, A Shaji and E C G Sudarshan, Dynamics of initially entangled open quantum systems, *Phys. Rev.* A **70** (2004) 052110.
12. M D Choi, "*Completely positive linear maps on complex matrices*", *Linear Alg. Appl*. **10** (1975) 285.
13. A Jamiołkowski, "Linear transformations which preserve trace and positive semi- definiteness of operators" *Rep. Math. Phys.* **3** (1972) 275.
14. M Jiang, S Luo and S Fu, *Channel- state duality*, *Phys. Rev*. A **87** (2013) 022310.
15. Guhne and G Toth, Entanglement detection, *Phys. Rep*. **474** (2009) 1.
16. I Sargolzahi, Positivity of the assignment map implies complete positivity of the reduced dynamics, Quant. Inf. Process. **19** (2020) 310.