

Solution of DGLAP evolution equation for gluon fragmentation in LO and NLO

G.R. Boroun, S. Zarrin

Physics Department, Razi University, Kermanshah 67149, Iran

Abstract

In this work, we calculate DGLAP evolution equation at LO and NLO by Laplace method for fragmentation function of gluon to meson or baryon. To prove the validity of this method, we evolve the fragmentation function $g \rightarrow \eta_c$ and $g \rightarrow j / \psi$ by using this method. In this method, it is not necessary to calculate these functions in Laplace space. To simplify the equations, this method is only used.

Key word: Fragmentation, Evolution, Laplace

PACS Numbers: 10

حل معادله تحولی DGLAP برای فرایند ترکش گلوئون در LO و NLO

غلامرضا برون، صلاح الدین زرین

کرمانشاه، دانشگاه رازی، دانشکده علوم، گروه فیزیک

چکیده

در این مقاله ما معادله تحولی^۱ DGLAP را برای تابع ترکش گلوئون به مزون یا باریون در مرتبه ی LO^۲ و NLO^۳ با استفاده از روش لاپلاس بدست می‌آوریم. با استفاده از این روش، معادلات بدست آمده برای مزون‌های $g \rightarrow \eta_c$ و $g \rightarrow j / \psi$ تحول می‌دهیم تا درستی این روش را نشان دهیم. در این روش نیازی به محاسبه توابع در فضای لاپلاس نیست. از روش لاپلاس فقط برای ساده سازی معادلات استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ترکش، تحول، لاپلاس

محققان نظری برای محاسبه سطح مقطع در مرتبه NLO معمولاً تابع ترکش و توابع شکافت و ثابت تزویج را در مرتبه NLO محاسبه می‌کنند. برای محاسبه سطح مقطع ناشی از ترکش پارتونی لازم است که تابع ترکش به مقیاس‌های انرژی بالاتر تحول

۱. Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi

۲. Leading-order

۳. Next to leading-order

داده شود. معادلات DGLAP [۲و۱]، معادلات تحولی هستند که برای تحول تابع ساختار و توابع ترکش استفاده می‌شوند. تاکنون چندین روش برای حل این معادلات استفاده شده است از جمله روش ملین^۴ [۳] و روش مشخصه^۵ [۴]. با این روش‌ها، توابع ساختار و توابع ترکش بدست آمده در مقیاس‌های اولیه را در مقیاس‌های مختلفی تحول می‌دهند. اما تبدیلات معکوس ملین سخت و در بعضی موارد به صورت تقریبی بدست می‌آید و همچنین روش مشخصه یک روش تقریبی می‌باشد. روش دیگری که در چند سال اخیر توانسته توابع ساختار پروتون، گلوئون، توابع توزیع کوآرکی و نیز توابع ترکش کوآرکی را به درستی تحول دهد، روش لاپلاس می‌باشد. این روش ابتدا توسط مارتین برای حل معادلات تحولی تابع ساختار به کار گرفته شده که جواب‌های بسیار دقیقی در توافق با نتایج آزمایشگاهی بدست آورده است [۵-۱۰]. در محاسبه معکوس لاپلاس، روش به کار گرفته شده تقریباً دقیق است و دقت این کار توسط چندین مقاله اثبات شده است [۵-۱۴]. حل معادله تحولی DGLAP به روش لاپلاس نیازمند محاسبه تبدیلات لاپلاس توابع شکافت و توابع ساختار یا ترکش در مقیاس اولیه می‌باشد. از معایب این روش این است که علاوه بر این که محاسبات در مرتبه NLO کار سختی است، در هر تحولی به روش لاپلاس باید برای برگشت به فضای اولیه از تبدیل معکوس لاپلاس استفاده شود که کار مشکلی می‌باشد و اکثراً به صورت عددی انجام می‌شود.

در این کار با استفاده از روش لاپلاس می‌خواهیم تابع ترکش گلوئون را تحول دهیم. برای تحول تابع ترکش از تبدیل لاپلاس فقط برای ساده کردن فرمول‌ها استفاده می‌کنیم. در این روش نیازی به بردن توابع به فضای لاپلاس نیست [۱۴]. برای اثبات درستی این روش، از توابع ترکش $g \rightarrow \eta_c$ ، $g \rightarrow j/\psi$ استفاده کرده‌ایم که روش محاسبه تابع ترکش و همچنین تحول آن در مرتبه LO در مراجع [۱۵و۱۶] آورده شده است. ما تحول این توابع را در مرتبه‌های NLO، LO بدست آورده‌ایم. مقایسه بین آنها نشان می‌دهد که تفاوت مشهودی بین آنها وجود دارد. چون محاسبه سطح مقطع در مرتبه NLO نیازمند محاسبه تابع ترکش و تابع شکافت و ثابت تزویج در مرتبه NLO می‌باشد، این کار می‌تواند برای محاسبه سطح مقطع در مرتبه NLO و مراتب بالاتر مفید باشد. تابع تحولی DGLAP بدون در نظر گرفتن سهم کوآرکی به صورت زیر می‌باشد [۲و۱].

$$\mu \frac{\partial D_{g \rightarrow O}(z, \mu)}{\partial \mu} = \int_z^1 P_{g \rightarrow g} \left(\frac{z}{x}, \mu \right) D_{g \rightarrow O}(x, \mu) \frac{dx}{x}, \quad (1)$$

که $P_{g \rightarrow g}$ تابع شکافت آلتارلی-پاریزی^۶ برای شکافت گلوئون به گلوئونی با کسر تکانه z می‌باشد. تابع شکافت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_{gg}(z, \mu) = P_{gg}^0(z, \mu) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} \right) P_{gg}^1(z, \mu) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} \right)^2 P_{gg}^2(z, \mu) + \dots, \quad (2)$$

که در این معادله $P_{gg}^0(z, \mu)$ و $P_{gg}^1(z, \mu)$ و $P_{gg}^2(z, \mu)$ به ترتیب تابع شکافت در مرتبه LO و NLO و NNLO می‌باشند [۲و۱۷] و $\alpha_s(\mu)$ ثابت تزویج باز بهنجار در QCD است. لازم به ذکر است که، تابع شکافت برای توابع توزیع و توابع ترکش در مرتبه LO یکسان می‌باشند اما برای مراتب بالاتر از مرتبه LO تابع شکافت برای توابع توزیع و توابع ترکش باهم کاملاً متفاوت می‌باشند. تابع تحولی DGLAP را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس ساده کرد و آن را به فضای s برد و سپس به راحتی می‌

۴. Mellin

۵. Characteristics

۶. Altarelli-Parisi

توان آنرا دوباره به فضای z برگرداند. برای اینکه بتوانیم از روش لاپلاس استفاده کنیم، از تغییر متغیرهایی استفاده می‌کنیم که معادله (۱) و همچنین توابع شکافت را به شکل ساده‌تری در می‌آورد. این تغییر متغیرها به شکل زیر می‌باشند:

$$z \equiv \exp(-v), \quad x = \exp(-w), \quad \widehat{D}(v, \mu) \equiv D(\exp(-v), \mu), \quad \widehat{P}(v, \mu) \equiv P(\exp(-v), \mu), \quad (3)$$

با این تغییر متغیرها ما می‌توانیم معادله (۱) را به صورت زیر بنویسیم.

$$\mu \frac{\partial \widehat{D}(v, \mu)}{\partial \mu} = \int_0^v \widehat{P}_{gg}(v-w, \mu) \widehat{D}(w, \mu) dw. \quad (4)$$

با تعریف لاپلاس زیر می‌توانیم معادله بالا را به فضای لاپلاس ببریم.

$$d(s, \mu) = \mathcal{L}[\widehat{D}(v, \mu); s] = \int_0^\infty \widehat{D}(v, \mu) \exp(-sv) dv, \quad (5)$$

$$p(s, \mu) = \mathcal{L}[\widehat{P}_{gg}(v, \mu); s].$$

با استفاده از معادلات (۴) و (۵) داریم،

$$d(s, \mu) = d(s, \mu_0) R(s, \mu). \quad (6)$$

که در معادله بالا $R(s, \mu) = \exp\left[\int_{\mu_0}^{\mu} p(s, \mu) \frac{d\mu}{\mu}\right]$ که μ_0 مقیاس اولیه و μ مقیاس تحولی می‌باشد. برای حل معادله (۶) ما باید معادله R را که به صورت تابع نمایی می‌باشد، بسط دهیم. با بسط دادن قسمت نمایی و استفاده از لاپلاس معکوس داریم:

$$\widehat{D}(v, s) = \mathcal{L}^{-1}\left[d(s, \mu) \left(1 + \int_{\mu_0}^{\mu} p(s, \mu) \frac{d\mu}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\int_{\mu_0}^{\mu} p(s, \mu) \frac{d\mu}{\mu}\right)^2 + \dots\right); v\right]. \quad (7)$$

در معادله (۷) توابع شکافت در مرتبه LO و NLO به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$p^{LO}(s, \mu) = a(\mu) p^0(s), \quad (8)$$

$$p^{NLO}(s, \mu) = a(\mu) p^0(s) + a(\mu)^2 p^1(s).$$

در معادلات بالا $a(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{2\pi}$ و ثابت ساختار در QCD به صورت زیر می‌باشد:

$$\alpha(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{\ln\left(2 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)\right)}{2 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} + \dots\right), \quad (9)$$

که در این معادله Λ پارامتر قطع QCD می‌باشد و $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f$ و $\beta_1 = 102 - \frac{38}{2}N_f$ و N_f تعداد طعم‌های کوارکی فعال می‌باشد. حال می‌توانیم معادله (7) را با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس از فضای s به فضای v برگردانیم و متعاقباً آنرا به فضای z ببریم. در مرتبه LO تابع ترکش تحول یافته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$D^{LO}(z, \mu) = D(z, \mu_0) + A_0(\mu, \mu_0) \int_x^1 D(z, \mu_0) P^0\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z} + \left(\frac{A_1(\mu, \mu_0)^2}{2}\right) \int_x^1 P^0\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z} \\ \times \int_z^1 D(y, \mu_0) P^0\left(\frac{z}{y}\right) \frac{dy}{y} + \dots, \quad (10)$$

و در مرتبه NLO به صورت زیر می‌باشد،

$$D^{NLO}(z, \mu) = D(z, \mu_0) + \int_x^1 D(z, \mu_0) \left(A_0(\mu, \mu_0) P^0\left(\frac{x}{z}\right) + A_1(\mu, \mu_0) P^1\left(\frac{x}{z}\right) \right) \frac{dz}{z} \\ + \int_x^1 \left(A_0(\mu, \mu_0) P^0\left(\frac{x}{z}\right) + A_1(\mu, \mu_0) P^1\left(\frac{x}{z}\right) \right) \frac{dz}{z} \int_z^1 D(y, \mu_0) \\ \times \left(A_0(\mu, \mu_0) P^0\left(\frac{z}{y}\right) + A_1(\mu, \mu_0) P^1\left(\frac{z}{y}\right) \right) \frac{dy}{y} + \dots. \quad (11)$$

در معادلات (10) و (11) $A_0(\mu, \mu_0) = \int_{\mu_0}^{\mu} a(\mu) \frac{d\mu}{\mu}$ و $A_1(\mu, \mu_0) = \int_{\mu_0}^{\mu} a(\mu)^2 \frac{d\mu}{\mu}$ همان طور که از شکل معادلات (10) و (11) مشخص است این دو معادله، معادله‌های کلی هستند و می‌توان برای تحول هر تابع ترکشی استفاده شوند. برای بدست آوردن هر تابع ترکش گلوئونی در هر مقیاسی کافی است که شکل جهانی تابع ترکش را در مقیاس اولیه بدست آوریم. در این صورت می‌توان شکل یا مقدار تابع ترکش را در مقیاس‌های مختلف بدست آورد. برای اثبات درستی این روابط ما از توابع ترکش گلوئون به $g \rightarrow \eta_c, j/\psi$ که در مراجع [16 و 15] بدست آمده‌اند استفاده می‌کنیم. در این رفرنس‌ها توابع ترکش در مقیاس $2m_c$ (جرم کوارک افسون می‌باشد) بدست آمده‌اند و در مرتبه LO تحول داده شده‌اند. شکل تحلیلی این توابع ترکش در مقیاس اولیه به صورت زیر می‌باشند:

$$D_{g \rightarrow \eta_c}(z, 2m_c) = \frac{\alpha_s (2m_c)^2}{24\pi} \frac{|R(0)|^2}{m_c^3} [3z - 2z^2 + 2(1-z) \ln(1-z)], \quad (12)$$

$$D_{g \rightarrow \psi}(z, 2m_c) = \frac{5\alpha_s (2m_c)^3}{1152\pi^2} \frac{|R(0)|^2}{m_c^3} \int_0^z dr \int_{(r+z^2)/2z}^{(1+r)/2} dy \frac{1}{(1-y)^2 (y-r)^2 (y^2-r)^2} \sum_{i=0}^2 z^i \\ \times \left(f_i(r, y) + g_i(r, y) \frac{1+r-2y}{2(y-r)\sqrt{y^2-r}} \ln \frac{y-r+\sqrt{y^2-r}}{y-r-\sqrt{y^2-r}} \right). \quad (13)$$

در معادله بالا توابع f و g به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$f_0(r, y) = r^2(1+r)(3+12r+13r^2) - 16r^2(1+r)(1+3r)y - 2r(3-9r-21r^2+7r^3)y^2 + 8r(4+3r+3r^2)y^3 - 4r(9-3r-4r^2)y^4 - 16(1+3r+3r^2)y^5 + 8(6+7r)y^6 - 32y^7,$$

$$f_1(r, y) = -2r(1+5r+19r^2+7r^3)y + 96r^2(1+r)y^2 + 8(1-5r-22r^2-2r^3)y^3 + 16r(7+3r)y^4 - 8(5+7r)y^5 + 32y^6,$$

$$f_2(r, y) = r(1+5r+19r^2+7r^3) - 48r^2(1+r)y - 4(1-5r-22r^2-2r^3)y^2 - 8r(7+3r)y^3 - 8r(7+3r)y^3 + 4(5+7r)y^4 - 16y^5,$$

$$g_0(r, y) = r^3(1-r)(3+24r+23r^2) - 4r^3(7-3r-12r^2)y - 2r^3(17+22r-7r^2)y^2 + 4r^2(13+5r-6r^2)y^3 - 8r(1+2r+5r^2+2r^3)y^4 - 8r(3-11r-6r^2)y^5 + 8(1-2r-5r^2)y^6,$$

$$g_1(r, y) = -2r^2(1+r)(1-r)(1+7r)y + 8r^2(1+3r)(1-4r)y^2 + 4r(1+10r+57r^2+4r^3)y^3 - 8r(1+29r+6r^2)y^4 - 8(1-8r-5r^2)y^5,$$

$$g_2(r, y) = r^2(1+r)(1-r)(1+7r) - 4r^2(1+3r)(1-4r)y - 2r(1+10r+57r^2+4r^3)y^2 + 4r(1+29r+6r^2)y^3 + 4(1-8r-5r^2)y^4,$$

با جایگزاری معادلات (۱۲) و (۱۳) در معادلات (۱۰) و (۱۱) ما می‌توانیم تحول توابع ترکش $g \rightarrow \eta_c$ و $g \rightarrow j/\psi$ را در هر مقیاس دلخواهی به ترتیب در مرتبه LO و NLO بدست آوریم. برای محاسبه تحول تابع ترکش g به مزون های مورد نظر ما فقط در معادله‌های (۱۰) و (۱۱) تنها ده جمله اول بسطها را در نظر گرفته‌ایم و از بقیه جملات چشم پوشی کرده‌ایم. در شکل (۱) اختلاف بین تعداد جملات (R) این معادلات نشان داده شده است. همان طور این شکل‌ها نمایش می‌دهند در مرتبه LO اختلاف زیادی بین چهار جمله اول و دو جمله اول وجود دارد (منحنی نقطه چین) اما اختلاف بین چهار جمله اول و شش جمله اول بسیار کمتر است (منحنی خط تیره) تا اینکه اختلاف بین ده جمله اول و شش جمله اول ناچیز می‌شود و تقریباً برابر صفر می‌شود. شکل دوم این اختلافها را برای معادله (۱۱) نشان می‌دهد در این شکل اختلاف بین چهار جمله اول و دو جمله اول زیاد است اما اختلاف بین چهار جمله اول و شش جمله اول بسیار کمتر می‌شود حتی این اختلاف نسبت به جملات مشابه در مرتبه LO کمتر است و در انتها اختلاف بین ده جمله اول و شش جمله اول تقریباً صفر می‌شود و با توجه به این توصیفها می‌توان از جملات ده به بعد در معادلات (۱۰) و (۱۱) صرف نظر کرد. در شکل‌های (۲) ما تابع ترکش $g \rightarrow \eta_c$ را در مقیاس‌های مختلف GeV^2 ۳۰ و ۱۰۰ و M_z^2 تحول داده‌ایم، همانطور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود تحول در مرتبه NLO در این سه شکل بالاتر از تحول در مرتبه LO می‌باشد و هر اندازه مقیاس تحول بالاتر می‌رود میزان انحنای تحول در هر دو مرتبه بیشتر می‌شود و فاصله منحنی‌ها در Z های پایین بیشتر می‌شود. مقدار عددی پارامترهایی که در محاسبات عددی استفاده شده، $m_c = 1.5 GeV$ ، $\alpha_s^{LO}(2m_c) = 0.26$ و $\alpha_s^{NLO}(2m_c) = 0.20$ می‌باشند. در شکل‌های (۳) ما تابع ترکش $g \rightarrow j/\psi$ را در مقیاس‌های مشابه به $g \rightarrow \eta_c$ رسم کرده‌ایم. همانطور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، اختلاف چشم گیری بین تحول در مرتبه LO و

NLO وجود دارد. این شکل‌ها نشان می‌دهند هر اندازه مقیاس تحول بالا رود اختلاف بین مرتبه LO و NLO افزایش می‌یابد. با این اوصاف چون سطح مقطع ترکش به صورت خطی وابسته به تابع ترکش می‌باشد، پس سطح مقطع در مرتبه NLO بیشتر از سطح مقطع در LO می‌باشد. بنابراین محاسبه تحول تابع ترکش در NLO می‌تواند محاسبات تئوری را به داده‌های آزمایشگاهی مربوط به سطح مقطع را نزدیک‌تر کند. ما اختلاف بین احتمال تابع ترکش تحول (F.P) یافته و میانگین پارامتر ترکش $\langle z \rangle$ در مرتبه NLO را با LO در مقیاس 30 GeV^2 و M_z^2 در جداول (۱) و (۲) نمایش داده‌ایم. احتمال تابع ترکش کوارکی در مرتبه LO با تحول دادن تغییر نمی‌کند، به دلیل اینکه $\int_0^1 P_{qq}^0(z, \mu) dz = 0$ اما چون این شرط برای مرتبه NLO وجود ندارد پس احتمال ترکش کوارکی تغییر می‌کند [۱۴]. در مورد تابع ترکش گلوئونی، علاوه بر اینکه احتمال تابع ترکش در مرتبه NLO

تغییر می‌کند، در مرتبه LO نیز تغییر می‌کند، چون که $\int_0^1 P_{gg}^0(z, \mu) dz \neq 0$.

جدول (۱): احتمال تابع ترکش و میانگین پارامتر ترکش را در مقیاس 30 GeV^2 و مقیاس اولیه در مرتبه LO و NLO نشان می‌دهد.

	$\langle z \rangle$			F.P		
	LO(μ_0)	LO(μ)	NLO(μ)	LO(μ_0)	LO(μ)	NLO(μ)
$g \rightarrow \eta_c$	۰/۶۶	۰/۳۲	۰/۳۷	$4/5 \times 10^{-5}$	$8/4 \times 10^{-5}$	$8/9 \times 10^{-5}$
$g \rightarrow j / \psi$	۰/۴۴	۰/۲۲	۰/۲۵	$3/2 \times 10^{-6}$	$5/8 \times 10^{-6}$	$6/1 \times 10^{-6}$

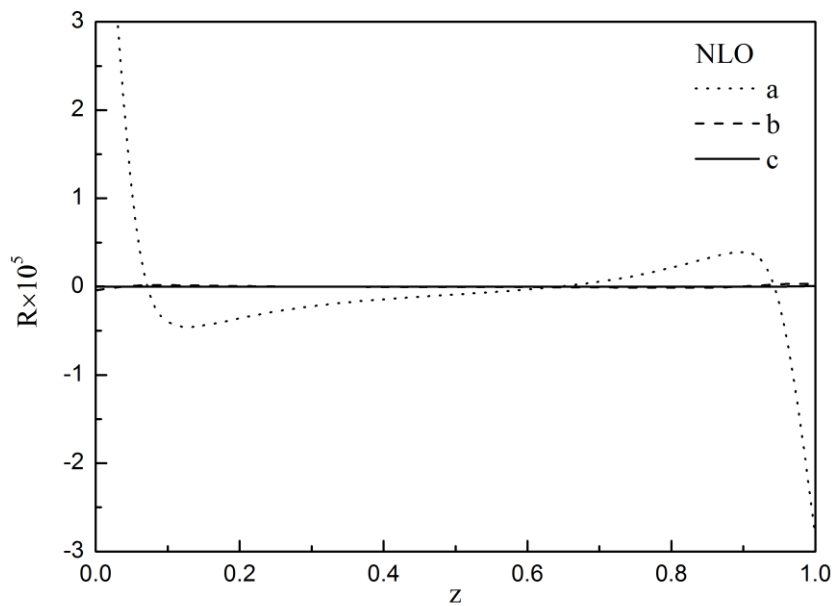
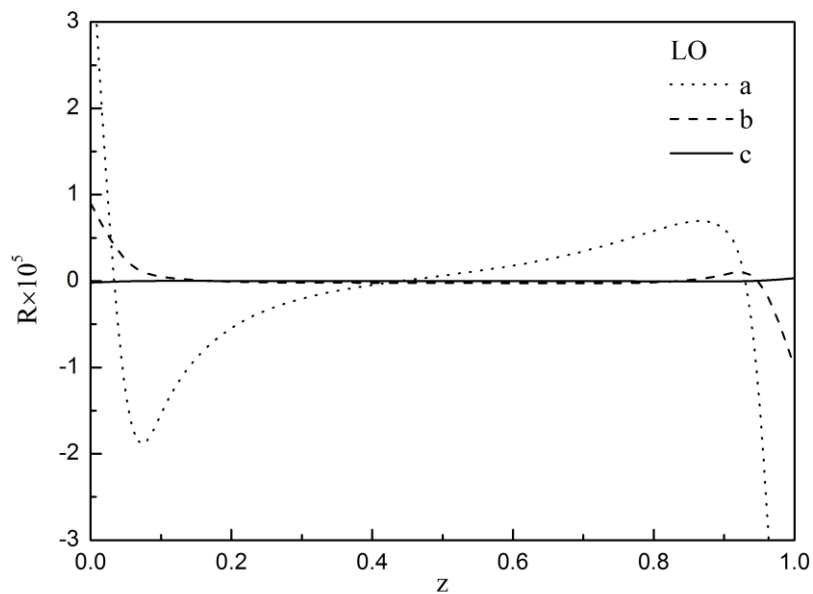
جدول (۲): احتمال تابع ترکش و میانگین پارامتر ترکش را در مقیاس M_z^2 و مقیاس اولیه در مرتبه LO و NLO نشان می‌دهد.

	$\langle z \rangle$			F.P		
	LO(μ_0)	LO(μ)	NLO(μ)	LO(μ_0)	LO(μ)	NLO(μ)
$g \rightarrow \eta_c$	۰/۶۶	۰/۱۴	۰/۲۱	$4/5 \times 10^{-5}$	$1/2 \times 10^{-4}$	$1/5 \times 10^{-4}$
$g \rightarrow j / \psi$	۰/۴۴	۰/۱۳	۰/۱۵	$3/2 \times 10^{-6}$	$7/9 \times 10^{-6}$	$9/6 \times 10^{-6}$

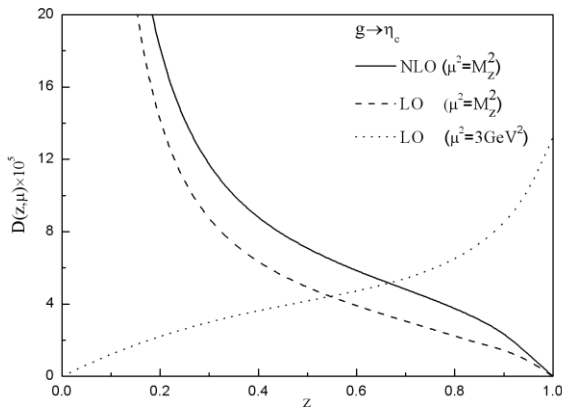
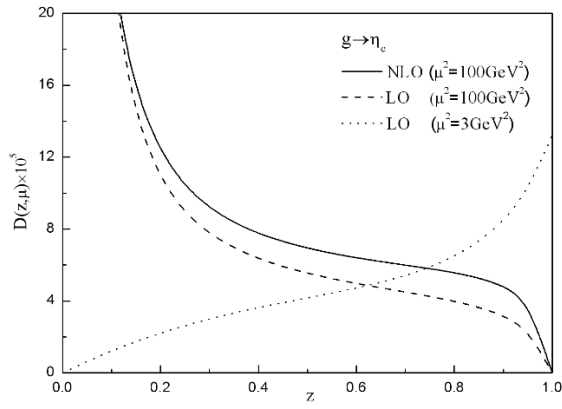
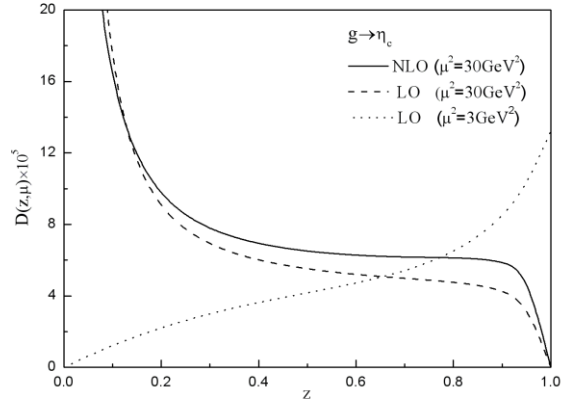
مراجع

- [1] Y.L. Dokshitzer, Sov. Phys- JETP, 46 (1977) 641, V.N. Gribov, L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.*, 15 (1972) 438.
- [2] G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys. B* 126 (1977) 298.
- [3] A. Cafarella, C. Coriano, M. Guzzi, *Nucl. Phys. B* 748(1), (2006) 253, A.V. Kotikov, L.N. Lipatov, *Nucl. Phys. B* 661(1) (2003) 19.

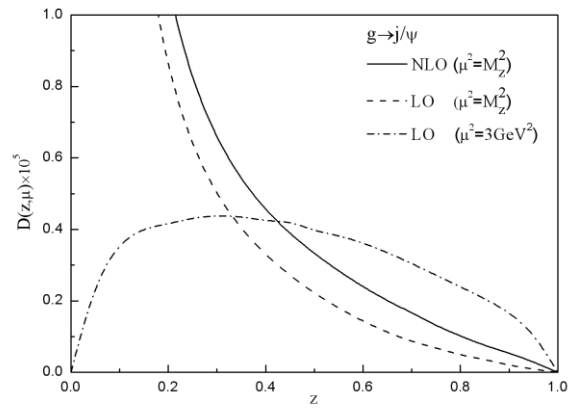
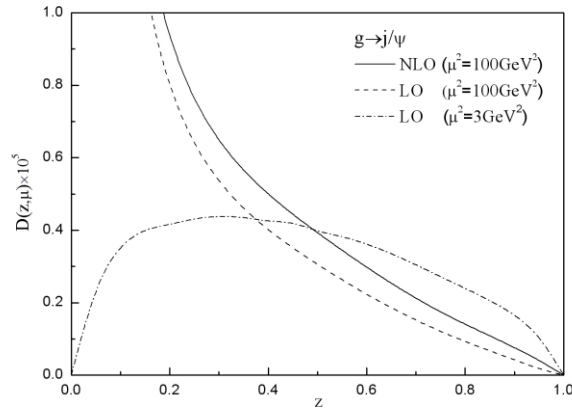
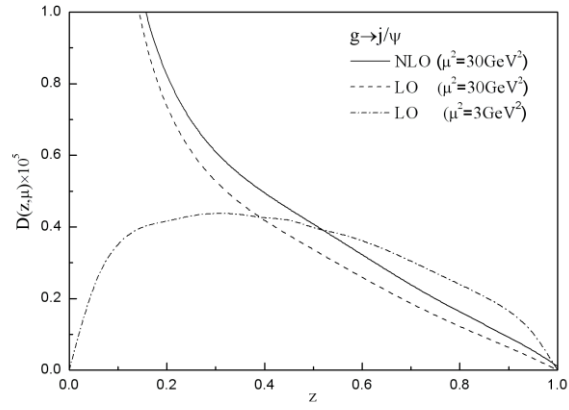
- [4] R. Baishya, J.K. Sarma, *Phys. Rev. D* 74(10) (2006) 107702.
- [5] M.M. Block, L. Durand, P. Ha, and D.W. McKay, *Eur. Phys. J. C* 69 (2010) 425.
- [6] M.M. Block, L. Durand, P. Ha, and D.W. McKay, *Phys. Rev. D* 84 (2011) 094010.
- [7] M.M. Block, L. Durand, P. Ha, and D.W. McKay, *Phys. Rev. D* 83 (2011) 054009.
- [8] M.M. Block, *Eur. Phys. J. C* 65 (2010) 1.
- [9] M.M. Block, *Eur. Phys. J. C* 68 (2010) 683.
- [10] M.M. Block, L. Durand, P. Ha, and D.W. McKay, arXiv: 1004.1440 (2010).
- [11] H. Khanpour, A. Mirjalili, and S. Atashbar Tehrani, *arXiv preprint arXiv:1601.03508* (2016).
- [12] S.A. Tehrani, F. Taghavi-Shahri, A. Mirjalili, and M.M. Yazdanpanah, *Phys. Rev. D* 87(11) (2013) 114012.
- [13] G. R. Boroun, S. Zarrin, *Eur. Phys. J. Plus*, 128, no. 10 (2013) 1.
- [14] G. R. Boroun, S. Zarrin, and S. Dadfar, *Nucl. Phys. A* 953 (2016) 21.
- [15] E. Braaten, and T.C. Yuan, *Phys. Rev. Lett.*, 71(11) (1993)1673.
- [16] J.H. Kuhn, H. Schneider, *Phys. Rev. D* 24, 2996 (1981), *Z. Phys. C* 11, 263 (1981).
- [17] G. Curci, W. Furmanski, and R. Petronzio, *Nucl. Phys. B* 175 (1980) 27, E.G. Floratos, C. Kounnas and R. Lacaze, *Nucl. Phys. B* 192 (1981) 417.



شکل (۱). منحنی **a** اختلاف بین چهار جمله اول و دو جمله اول را مشخص می‌کند منحنی **b** اختلاف بین شش جمله اول و چهار جمله اول را نشان می‌دهد و منحنی **c** اختلاف بین ده جمله اول و شش جمله اول را نشان می‌دهد. شکل بالایی مربوط به معادله (۱۰) و شکل پایینی مربوط به معادله (۱۱) می‌باشد.



شکل (۲): تابع ترکش $g \rightarrow \eta_c$ در مقیاس های 30 و 100 و M_Z^2 را از بالا به پایین نشان می دهد.



شکل (۳): تابع ترکش $g \rightarrow j/\psi$ در مقیاس های 30 و 100 و M_z^2 را از بالا به پایین نشان می دهد.