

h.goudarzi@urmia.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۹/۳۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۶/۴)

رسیدن به هدفشان مستلزم به کارگیری راهبرد برای آن بازی است. راهبرد از مفاهیم پایه‌ای نظریه بازی است. برای یک بازیکن، راهبرد مجموعه‌ای از قواعد است که بدون هیچ ابهامی گزینه حرکت شخصی بازیکن را بر اساس موقعیتی که در جریان بازی پیش آمده است، مشخص می‌کند.

اساساً هدف نظریه بازی، بررسی رفتار منطقی بازیکنان در موقعیت‌های تعارض آمیز، یعنی تعیین راهبرد بهینه برای هر یک از بازیکنان جهت دستیابی به نتیجه بهتر است. راهبرد بهینه برای بازیکن در نظریه بازی، آن راهبرد است که در صورت تکرار، به او اطمینان بدهد که بیشترین مقدار میانگین امکان پذیر به دست می‌آید. استدلال برای انتخاب این راهبرد بر این فرض استوار است که حریف نیز دست کم همان قدر منطقی است که ما هستیم و برای جلوگیری از اینکه ما به هدف خود برسیم، به هر کاری دست می‌زند. نظریه بازی در تلاش است شرایطی را

نظریه بازی مطالعه عمل‌ها و عکس‌العمل‌های سیستم‌ها در چهارچوب علوم ریاضی است که توسط قواعد بازی توضیح داده می‌شود. این نظریه در سال ۱۹۳۰ در زمینه اقتصاد به وسیله ون نیومن^۱ و مورگنشرن^۲ گسترش یافت [۱ و ۲] و کارهای بسیاری در این زمینه انجام گرفت و در حال حاضر به‌طور منظم در حیطه بسیاری از علوم مانند علوم اجتماعی، زیست، فیزیک، سیاست و... به کار می‌رود [۳-۱۴].

نظریه بازی به مطالعه شرایطی می‌پردازد که دو بازیکن (یا بیشتر) برای دستیابی به نتیجه بهتر با هم رقابت می‌کنند. فرض شده است بازیکنان منطقی و ملزم به ایجاد راهبرد مبتنی بر منافع شخصی هستند. هرگونه تصمیم‌گیری بازیکنان برای

۱. Von Neumann

۲. Morgenstern

که بازیکنان متقابل عمل می‌کنند، به صورت ریاضی وار مدل‌سازی کند. این نظریه شامل دو حرکت مشارکتی و تدافعی است. منظور از بازی تدافعی مدلی است که در آن موقعیت‌ها و مواضع توسط اهمیت دادن به گزینه‌های انتخابی پیش روی بازیکنان، انگیزه و اطلاعات آنها و غیره مشخص می‌شود و تلاش بر این است که حرکت بعدی بازیکنان و چگونگی بازی آنها پیش‌بینی شود. اما در بازی مشارکتی تمرکز بر روی شکل و فرم همکاری‌ها است.

مسئله زندانی نمونه‌ای از بازی تدافعی است و مسئله مورد بحث ما می‌باشد. با تعمیم این مسئله به فضای استراتژیک بزرگتر می‌توان به نتیجه بازی مسئله زندانی رسید [۱۵]. حرکت بازیکنان کاملاً شناخته شده است، یا فرار می‌کنند یا همکاری می‌کنند. نتیجه حاصل تضاد بین تعادل نش^۱ و قانون پارتو^۲ می‌باشد. تعادل نش، در واقع نتیجه بازی بهینه برای هر بازیکن است که او می‌تواند از طریق تغییر یک‌جانبه در راهبرد خود آن را کسب کند در حالی که راهبرد سایر بازیکنان ثابت می‌ماند. اما، قانون پارتو بهترین نتیجه بازی است که بازیکن می‌تواند بدون اشتباه بازیکن دیگر^۳ به دست آورد [۱۶-۱۸].

میر^۴ در کار اولیه خود بر روی نظریه بازی، بازی کوانتومی ساده پنی فلیپ^۴ (سکه) را شرح داد [۱۹ و ۲۰] که یکی از ساده‌ترین وسیله‌های بازی سیستم دو حالت است. اگر سکه با سیستم کوانتومی دو حالت مانند ذره با اسپین ۱/۲ جایگزین شود، از کلاسیک وارد سیستم کوانتوم می‌شویم. بنجامین^۵ و هیدن^۶ بازی کوانتومی را برای بیش از دو ذره ارائه دادند [۲۱ و ۲۲]. آنها نشان دادند که اینگونه بازی‌ها می‌توانند به شکل تعادل کوانتومی ویژه نمایش داده شوند که هیچ مشابهی در کلاسیک ندارد. همچنین در بازی‌های کوانتومی دو نفره کار

عمده آنها بررسی ماکزیمم حالت‌های درهم‌تنیده^۷ می‌باشد [۲۳]. درهم‌تنیدگی یک حالت از سیستم کوانتومی مرکب است که به صورت حاصلضرب تانسوری تک حالت‌های سیستم در فضای هیلبرت جدید نوشته شود. برای مثال، حالت یک سیستم مرکب از دو کیوبیت به وسیله یک بردار در فضای حاصلضرب تانسوری با بردارهای پایه $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle$ مشخص می‌شود. سیستم کوانتومی همچنین می‌تواند با یک حالت برهم-نهی به صورت ترکیب خطی از همه حالت‌ها نمایش داده شود. غیر از این حالت‌ها، بعضی حالت‌های کوانتومی وجود دارند که شدیداً همبسته کوانتومی و تفکیک‌ناپذیر می‌باشند و نمی‌توانند به شکل حاصلضرب تانسوری سیستم‌های جزئی نوشته شوند. حالتی از یک سیستم مرکب، که نمی‌تواند به صورت حاصلضرب تانسوری سیستم‌های جزئی نوشته شود، حالت درهم‌تنیده نامیده می‌شود.

در بازی کوانتومی نیز اگر بازیکن نتیجه‌ای که می‌گیرد بر روی نتایج دیگر بازیکنان اثر بگذارد و همبستگی خارج از اراده بازیکنان در نتایج وجود داشته باشد، آنگاه بازی دچار درهم‌تنیدگی می‌شود. بنابراین درهم‌تنیدگی می‌تواند نقش اساسی در بازی کوانتومی ایفا کند.

ایزرت^۸ و سایرین درهم‌تنیدگی را برای سیستم دو ذره‌ای محاسبه کرده و بیشترین تعادل نش را در حالت دو و سه پارامتری به دست آورده‌اند [۲۴ و ۲۵]. همچنین تعادل نش برای سیستم سه ذره‌ای در حالت دو پارامتری محاسبه شده است. در کار حاضر تعادل نش حالت سه پارامتری برای سیستم سه ذره‌ای محاسبه می‌شود و نتایج به دست آمده با حالت دو پارامتری مقایسه می‌گردد.

با استفاده از راهبردهای کلاسیکی اولیه و تبدیل یکانی مربوط به اثر درهم‌تنیدگی کوانتومی، بردارهای پایه به طور دقیق محاسبه می‌شود و سپس توابع نتیجه بر حسب پارامترهای درجه آزادی سیستم سه ذره‌ای به دست می‌آید. در بخش بعدی نتایج بازی بر حسب اتخاذ راهبردهای مختلف ممکن برای هر یک

۱. Nash

۲. Parreto

۳. Meyer

۴. Penny-flip

۵. Benjamin

۶. Hayden

V. Entanglement

A. Eisert

هستند که اگر هر سه فرار را انتخاب کنند، نتیجه ۱ را می‌گیرند. اگر هر سه همکاری کنند نتیجه ۳ را به دست خواهند آورد. اگر یکی از بازیکنان فرار را انتخاب کند و دو بازیکن دیگر همکاری را ترجیح دهند، برای بازیکن اولی نتیجه ۵ و برای دو بازیکن دیگر ۲ می‌باشد. این شرایط و نتایج متفاوت آن به طور کامل در جدول ۱ آورده شده است. می‌توان دید که راهبرد D راهبرد غالب برای تمام بازیکنان است. در شرایطی از بازی با انتخاب محافظه‌کارانه (DDD) تعادل نش منحصر به فرد با نتیجه (۱۱۱) حاصل می‌شود. انحراف یک‌طرفه از این تعادل نتیجه را کاهش می‌دهد.

از آنجایی که هر کدام از بازیکنان به طور کامل یک بازیکن منطقی هستند، بازی قطعاً در شرایطی تمام خواهد شد که همه بازیکنان راهبرد D را انتخاب کنند. واضح است انتخاب راهبرد (DDD) می‌تواند منجر به نتیجه (۳۳۳) شود. می‌دانیم در نظریه بازی (CCC) قانون پارتو یک راهبرد مؤثر در بازی است. اما دلیل منطقی ایجاب می‌کند بازیکنان راهبرد D را انتخاب کنند. بنابراین بازی در (DDD) تمام خواهد شد. این یک مثالی از نتیجه بهینه برای زیرسیستم است که نتیجه خوبی برای تمام سیستم نیست و این یک مشکل در بازی است که باید رفع شود [۲۶].

مدل فیزیکی برای سیستم سه ذره‌ای در صورت اعمال درهم‌تنیدگی کوانتومی بین سه بازیکن در شکل ۱ نمایش داده شده است.

نتایج ممکن از راهبردهای کلاسیکی همکاری و فرار به صورت بردارهای پایه $|1\rangle$ و $|0\rangle$ در فضای هیلبرت به صورت حاصل ضرب تانسوری محاسبه می‌شوند [۲۷] که برای سیستم سه ذره‌ای به شکل زیر می‌باشد:

$$|\sigma\rangle|\sigma'\rangle|\sigma''\rangle = |\sigma\sigma'\sigma''\rangle, \quad \sigma, \sigma', \sigma'' \in \{0, 1\} \quad (1)$$

$$|\psi_i\rangle = \hat{J}|000\rangle, \quad (2)$$

\hat{J} عملگر درهم‌تنیدگی است که ارتباط کوانتومی با راهبرد منحصر به فرد را بیان می‌کند. عامل $J(\gamma)$ با پارامتر γ تعریف می‌شود که γ درجه درهم‌تنیدگی است که افزایش درجه درهم‌تنیدگی مستقیماً نتایج بازی را تحت تأثیر قرار می‌دهد و

جدول ۱. ماتریس نتایج بازیکنان. تعداد ۸ حالت برای بازیکنان وجود دارد که می‌توانند برای رسیدن به نتیجه بهتر این راهبردها را انتخاب کنند. شخصیت اول متعلق به آلیس، دومی متعلق به باب و سومین شخصیت راهبرد مربوط به کالین است.

| | | Colin:C | | Colin:D | |
|-------|---|---------|---------|---------|---------|
| | | C | Bob | Bob | D |
| Alice | C | (۲,۲,۲) | (۲,۵,۲) | (۲,۲,۵) | (۰,۴,۴) |
| | D | (۵,۲,۲) | (۴,۴,۰) | (۴,۰,۴) | (۱,۱,۱) |

از بازیکنان مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. نهایتاً نکات حائز اهمیت ساختار مورد مطالعه به عنوان نتیجه‌گیری آورده می‌شود.

در فرمول‌بندی نظریه بازی، راهبردها تبدیل به بردارهایی می‌شوند که در فضای هیلبرت تعریف شده‌اند، به این بردارها حالت‌های مختلف راهبرد می‌گوییم. در اینجا سیستم سه کیوبیتی را بررسی می‌کنیم که اندازه‌گیری در فضای هیلبرت با استفاده از حاصلضرب تانسوری صورت می‌گیرد. سیستم سه کیوبیتی را معادل مسئله سه زندانی در نظر می‌گیریم و تعادل نش را که با افزایش درهم‌تنیدگی، نتایج بازی بازیکنان را در مقایسه با بازی کلاسیکی تغییر می‌دهد، حساب می‌کنیم. در واقع در حالت بازی کوانتومی مشاهده می‌شود که با افزایش درهم‌تنیدگی نتیجه تعادل نش هم بهتر می‌شود. با توجه به دو راهبرد فرار و همکاری که بازیکنان انتخاب می‌کنند، هر کدام از این سه زندانی، سه نتیجه متفاوت را به دست خواهند آورد. راهبرد فرار با D^1 و همکاری با C^2 نشان داده می‌شوند. تعداد هشت راهبرد ممکن وجود خواهد داشت که بازیکنان برای رسیدن به نتایج مطلوب می‌توانند از آنها استفاده کنند.

ماتریس نتایج برای سه ذره بدین صورت در نظر گرفته شده است که سه بازیکن به نام‌های آلیس، باب و کالین زندانیانی

۱. Defection

۲. Cooperation

حالت نهایی به صورت زیر است:

$$|\psi_f\rangle = |\psi_f(U_A, U_B, U_C)\rangle \tag{6}$$

$$= \hat{J}^\dagger (U_A \otimes U_B \otimes U_C) \hat{J} |000\rangle,$$

نتیجه اندازه‌گیری بعد از ارسال کیوبیت‌ها برای آلیس به صورت زیر است و برای باب و کالین هم از روی جدول ۱ قابل محاسبه می‌باشند،

$$S_A = 5P_{DCC} + 4(P_{DDC} + P_{DCD}) + 3P_{CCC} + 2(P_{CCD} + P_{CDC}) + 1P_{DDD} + 0P_{CDD}, \tag{7}$$

به طوری که هر احتمال اتخاذ راهبرد $P_{\sigma\sigma'\sigma''}$ توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$P_{\sigma\sigma'\sigma''} = \left| \langle \sigma\sigma'\sigma'' | \psi_f \rangle \right|^2 \tag{8}$$

بازی در حالت بیشینه درجه درهم‌تنیدگی است. نتایج به دست آمده بازیکنان با استفاده از عملگر یکانی (۴) و رابطه (۷) به شکل زیر قابل بحث می‌باشد:

با توجه به حالت استراتژیک

$$S_A \left(U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

این حالت تعادل نش نیست، زیرا در واقع داریم:

$$S_A \left(U(\theta, \alpha), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \right) = \sin^2 \theta / 2 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \leq 3, \tag{9}$$

می‌توان دید وقتی که باب و کالین راهبرد $U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ را انتخاب

می‌کنند، دیگر $U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ پاسخ مناسبی برای آلیس نیست و

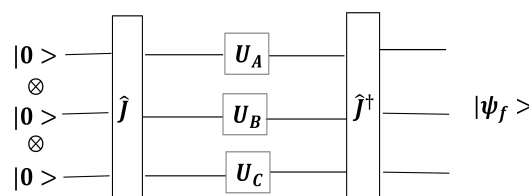
بازیکنان به نتیجه مطلوب دست نمی‌یابند، زیرا داریم:

$$S_A \left(U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \right) = 1, \tag{10}$$

در حالی که اگر آلیس از راهبرد $U(\pi, 0)$ استفاده کند، هر سه به نتیجه بهتری می‌رسند و می‌توان رابطه زیر را یک تعادل نش در نظر گرفت:

$$S_A \left(U(\pi, 0), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \right) = 3. \tag{11}$$

از طرف دیگر، اگر باب و کالین به ترتیب از راهبردهای $U(\pi, 0)$ و $U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ استفاده کنند، آلیس در صورتی برنده بازی



شکل ۱. مدل فیزیکی برای بازی کوانتومی سه بازیکنی.

در واقع $J(\gamma)$ کانال ارتباطی بین داده‌های ورودی و خروجی می‌باشد. برای $\gamma = \pi/2$ بیشترین درجه درهم‌تنیدگی را داریم. عملگر درهم‌تنیدگی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{J} = \exp\left(i \frac{\gamma}{2} \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x\right) \tag{3}$$

که σ_x ماتریس پائولی است.

از آنجایی که حرکت‌های استراتژیک برای بازیکنان مختلف مستقل است، عملگر هر بازیکن فقط روی کیوبیت خود آن بازیکن عمل می‌کند. بنابراین فضای استراتژیک S باید زیرمجموعه‌ای از گروه یکانی ماتریس 2×2 باشد. فضای استراتژیک مشابه سیستم دو حالت و دوران در فضای هیلبرت به صورت $SU(2)$ در نظر گرفته می‌شود. شکل کلی عملگر تبدیل یکانی در سیستم دو حالت شامل چهار پارامتر است [۲۸] که در حالت دو پارامتری این عملگر برای سه بازیکن با راهبردهای U_A, U_B, U_C را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \frac{e^{i\alpha} \sin \theta}{2} \\ -\frac{e^{-i\alpha} \sin \theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

که $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. $U(0, 0) = I$ عملگر

همانی مطابق با همکاری است $U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \hat{\sigma}_x$ برابر با

عملگر بیت-فلیپ^۱ است که مؤید فرار می‌باشد:

$$F = i\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

اثر کوانتومی بازی ایجاب می‌کند که اندازه‌گیری در دستگاه اشتراک - گزینش صورت گیرد. از روی شکل ۱ می‌توان دید تابع

۱. bit-flip

$$U(\theta, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \frac{\theta}{2} & ie^{i\beta} \sin \frac{\theta}{2} \\ ie^{-i\beta} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\alpha} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

که $-\pi \leq \alpha, \beta \leq \pi$ و $0 \leq \theta \leq \pi$ است. شکل بردارهای پایه و تابع بردار نهایی مانند حالت دو پارامتری برابر با رابطه (۶) است. اینجا نیز درهم‌تنیدگی بسیار مهم است و عملگر آن به شکل معادله (۳) می‌باشد. در حالت سه پارامتری همگرا ($\gamma = 0$)، بازی تفکیک‌پذیر می‌شود و بازی کوانتومی تفکیک‌پذیر هیچ مزیت کوانتومی را نشان نمی‌دهد. افزایش درهم‌تنیدگی موجب افزایش نتیجه بازی از حالت اولیه می‌شود. سه ذره اطلاعات خود را برای اندازه‌گیری نهایی نتایج، از طریق عملگر یکانی معرفی شده ارسال می‌کنند. در اینجا نیز نتیجه اندازه‌گیری برای ذره اول (A) از معادله (۷) محاسبه می‌شود. اندازه‌گیری صورت گرفته برای بازیکنان با انتخاب راهبردهای متعدد بدین طریق محاسبه خواهد شد:

اگر باب و کالین هر دو از راهبرد $U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ استفاده

کنند، نتایجی که برای آلیس حاصل می‌شود عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_A \left(U(\theta, \alpha, \beta), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \right) \\ & = \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 + 2 \sin^2 \beta) + 5 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (17)$$

حال اگر راهبرد $U(\pi, 0, \pi)$ معرف حرکت آلیس در فضای کوانتومی باشد به نتیجه‌ای بهتر از ۱ دست نخواهد یافت، به طوری که داریم:

$$\mathcal{S}_A \left(U(\pi, 0, \pi), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \right) = 1 \quad (18)$$

انتخاب شکل $U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ نیز تأثیری در بهبود نتیجه بازی ندارد. هرچند نتیجه زیر نوعی تعادل کوانتومی به شمار می‌رود، اما نمی‌توان آن را به عنوان نتیجه مطلوب در نظر گرفت، زیرا

$$\mathcal{S}_A \left(U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \right) = 1 \quad (19)$$

معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۹) حاکی از این است که آلیس برای رسیدن به نتیجه مطلوب باید شکل‌های دیگر راهبرد ممکن از

خواهد بود که عملگر همانی را به کار بگیرد. به طوری که داریم:

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_A \left(U(\theta, \alpha), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), U(\pi, 0) \right) \\ & = (7 + 3 \cos \theta - 2 \sin^2 \theta / 2 \cos^2 \alpha) \leq 5, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathcal{S}_A \left(U(0, 0), U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), U(\pi, 0) \right) = 3. \quad (13)$$

به دلیل تقارن بازی، تعداد هشت تعادل نش (شامل $U(\pi, 0)$ و $U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$) در بازی تفکیک‌پذیر به دست می‌آید. وقتی هر سه بازیکن راهبرد $U(\pi, 0)$ را انتخاب کنند، به بهترین نتیجه می‌رسند که به عنوان تعادل نش می‌باشد:

$$\mathcal{S}_A \left(U(\theta, \alpha), U(\pi, 0), U(\pi, 0) \right) = (1 + 2 \cos^2 \alpha) \sin^2 \theta / 2 \leq 3, \quad (14)$$

$$\mathcal{S}_{A,B,C} \left(U(\pi, 0), U(\pi, 0), U(\pi, 0) \right) = 3. \quad (15)$$

رابطه (۱۵) نشان می‌دهد هر بازیکن می‌تواند نتیجه بازی را با استفاده از راهبرد $U(\pi, 0)$ به نفع خود تمام کند. زیرا این رابطه علاوه بر تعادل نش، خاصیتی از قانون پارتو نیز دارد.

نتایج بالا نشان می‌دهد که انتخاب راهبردهای گوناگون از فضای استراتژیک کوانتومی، بازیکنان را به نتیجه مطلوب می‌رساند. اما از طرف دیگر همان طور که اشاره شد دلیل منطقی ایجاد می‌کند که بازیکنان راهبرد فرار (D) را انتخاب کنند.

نتیجه‌ای که با توجه به رابطه (۱۰) با انتخاب راهبرد $U\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ برای بازیکنان حاصل شد، نشان دهنده این مطلب است که بازیکنان با این راهبرد به نتیجه دلخواه نمی‌رسند. حال برای اینکه بازیکنان بتوانند با راهبرد (D) به بهترین نتیجه از لحاظ منطقی بازی برسند نیاز به تغییر در سیستم عملکرد آنها وجود دارد. این تغییر را در عملگر تبدیل یکانی اعمال می‌کنیم. بدین صورت که پارامتر سوم را به سیستم اضافه کرده و با استفاده از راهبردهای بازیکنان نتایج حاصله را بررسی می‌کنیم.

با افزایش پارامتر سوم (β) عملگر به شکل زیر انتخاب

می‌شود:

$$\begin{aligned} S_{A,B,C} \left(U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ = 1 + 2 \sin^2 \gamma, \end{aligned} \quad (23)$$

از شکل معادله بالا می‌توان دید با افزایش پارامتر γ نتایج بازی بهتر می‌شود، به طوری که اگر درجه درهم‌تنیدگی برابر $\gamma = \pi/2$ باشد تعادل نش حاصل شده و مسئله به طور کامل رفع می‌شود. نتیجه به دست آمده از رابطه (۲۳) بر حسب درجه درهم‌تنیدگی در شکل ۲ رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد چگونه نتایج به مقدار درهم‌تنیدگی بستگی دارد، وقتی که بازیکنان به تعادل نش می‌رسند. از این شکل می‌توان دید درهم‌تنیدگی غالب است و خاصیت بازی را افزایش می‌دهد. با تعریف شکل‌های دیگر راهبرد برای هر کدام از بازیکنان می‌توان به نتایج بهتری نیز رسید:

$$S_A \left(U(0, \pi, \pi), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi \right), U \left(\pi, 0, \frac{\pi}{2} \right) \right) = 5. \quad (24)$$

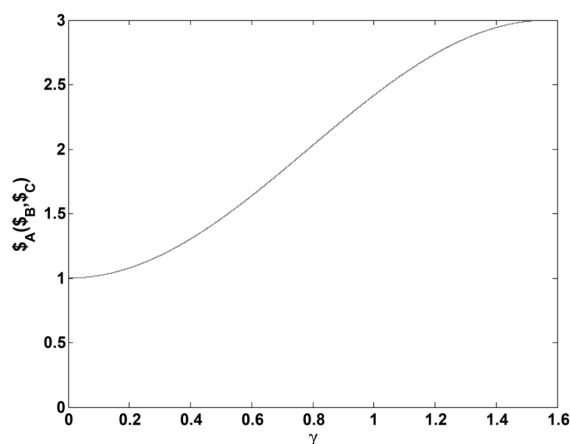
این روابط همیشه تعادل نش می‌باشند و بازیکنان با استفاده از این راهبردها بازی را تمام خواهند کرد. شکل راهبردهای معادله (۲۴) برای باب و کالین نیز بدین صورت است:

$$S_{B,C} \left(U \left(0, \pi, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) = 2 \quad (25)$$

از رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) می‌توان دید که این شکل راهبرد بازی را به نفع آلیس به اتمام می‌رساند. این نتیجه برای سایر بازیکنان هم برقرار است. به طوری که اگر بازیکنان به ترتیب از راهبردهای $U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ و $U(0, \pi, \pi), U \left(\pi, 0, \frac{\pi}{2} \right)$ استفاده کنند، این باب است که برنده بازی خواهد شد،

$$S_{A,B,C} \left(U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U(0, \pi, \pi), U \left(\pi, 0, \frac{\pi}{2} \right) \right) = 2, 5, 2 \quad (25)$$

در سیستم سه ذره‌ای تعادل نش کوانتومی متقارن، در حالت سه پارامتری برای مسئله زندانی بررسی شد و تعادل نش جدیدی به دست آمد که تحت انتخاب راهبرد خاص توسط بازیکنان، باعث بهتر شدن نتایج بازی به نفع آنها می‌گردد و نوعی تعادل ویژه کوانتومی می‌باشد. نمودار رسم شده نیز نشانگر افزایش



شکل ۲. این نمودار برای حالتی رسم شده است که بازیکنان در شرایط تعادل نش $S_A \left(U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) = 3$ باشند.

فضای کوانتومی را انتخاب نماید. حال شکل راهبرد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} S_A \left(U(\theta, \alpha, \beta), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ = \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 + 2 \sin^2 \beta) + 5 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (26)$$

پر واضح است با راهبرد $U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ بهترین نتیجه حاصل می‌شود که خاصیتی از قانون پارتو نیز دارد:

$$S_A \left(U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) = 3. \quad (27)$$

این نتیجه یک تعادل نش جدیدی است که حاصل می‌شود و از آنجایی که بازی متقارن است این نتیجه برای باب و کالین هم برقرار است. چنانچه داریم:

$$S_A = S_B = S_C = 3, \quad (28)$$

این در حالی است که در حالت دو پارامتری بازیکنان با انتخاب راهبرد $U \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right)$ به نتیجه قابل توجهی دست نمی‌یافتند. از آنجایی که درهم‌تنیدگی اثر قابل توجهی بر نتیجه بازی دارد، اگر شکل راهبرد $U \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ را برای بازیکنان با وابستگی γ در نظر بگیریم، داریم:

معین می‌شود. هر چند در اینجا باید متذکر شد که افزایش پارامترها، افزایش تعداد احتمالات را نیز در بر دارد که این امر موجب می‌شود کنترل سیستم کوانتومی نسبت به حالت دو پارامتری سخت‌تر گردد.

نتیجه بازی با درجه درهم‌تنیدگی است. نتیجه قابل ملاحظه اینکه در واقع پارامتر سوم افزوده شده به سیستم، نتایج حاصل از میزان درهم‌تنیدگی سیستم و تعادل نش را تحت تأثیر قرار می‌دهد. این تأثیرپذیری منجر به نتیجه‌گیری بهتر در راهبردهای

14. F C Zagare, "Game theory: Concepts and applications", Newbury Park, CA, Sage (1984)
15. S J van Enk and R Pike, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 024306.
16. R B Myerson, "An Analysis of Conflict", MTN Press, Cambridge, MA (1991).
17. J Maynard-Smith and G R Price, *Nature* **246** (1973) 15.
18. J Hruby, *arXiv:quant-ph/0703275v1*.
19. D A Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999)1052.
20. S J vanEnk, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 789.
21. S C Benjamin and P M Hayden; *Phys. Rev. A* **64** (2001) 030301.
22. J Du, H Li, X Xiaodong, b X Zhou, and R Han, *arXiv: quant- ph/0110122v2*.
23. N F Johnson, *Phys. Rev. A* **63** (2001) 020302.
24. J Eisert, M Wilkens, and M Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3077; **87** (2001) 069802.
25. A P Flitney and D Abbott; *arXiv: quant-ph/0208069v2*.
26. J Du, H Li, X Xu, M Shi, and X Zhou, *Phys. Lett. A* **302** (2002) 229.
27. A Iqbal and A H Toor, *Phys. Rev. A* **65** (2002) 022036.
28. J Eisert and M Wilkens, *J. Mod. Opt.* **47** (2000) 2543.
1. J von Neumann and O Morgenstern, "The Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press, Princeton (1944).
2. P Adrian, C F Lloyd, and L Hollenberg, *arXiv: quant-ph/0610084v1*.
3. R Axelrod, "The Evolution of Cooperation", Basic Books, New York (1984); R Dawkins, "The Selfish Gene", Oxford University Press, Oxford (1976).
4. B Barry and R Hardin, "Rational Man and Irrational Society?", Sage Publications, Beverly Hills (1982).
5. M D Davis, "Game theory: a nontechnical introduction", Dover Publications, Mineola, NY (1997).
6. N S Glance and B A Huberman, *Sci. Am.* (1994) 76.
7. H Hamburger, "Games as models of social dilemmas", San Francisco, CA, U.S.A: W H Freeman and Co (1979).
8. G Hardin, *Science* **162** (1968) 1243.
9. R D Luce and H Raiffa, "Introduction and Critical Review", Dover Publications, New York (1989).
10. A Rapoport, *Peace & Change*, **13** (1988) 18.
11. A Rapoport and M Guyer, *General Syst*, **23** (1978) 125.
12. P E Turner and L Cho, *Nature* **398** (1999) 441.
13. R Wright, "Nonzero: The Logic of Human Destiny", Pantheon, New York (2000).