

ابرپتانسیلهای دیگری برای مکانیک کوانتومی ابرتقارنی

علی دادخواه و منصور حقیقت

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۵/۵/۱۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۶/۱۰/۱۵)

چکیده

از مقاله‌هایی که در زمینه مکانیک کوانتومی ابرتقارنی نوشته شده است چنین بر می‌آید که تاکنون برای معادله شرودینگر تعداد معدودی پتانسیل با حل‌های دقیق معرفی شده است که برای به دست آوردن توابع موج و انرژی ترازهای مختلف با روش عملگری، اغلب آنها دارای یک پارامتر متغیر و یک پارامتر ثابتند. برخی دو پارامتر ثابت و برخی نیز دو پارامتر متغیر دارند. این پتانسیلها از توابعی که ابرپتانسیل نامیده می‌شوند به دست می‌آیند. در این مقاله ما ابتدا از یک ابرپتانسیل کلی با دو پارامتر ثابت و چهار پارامتر متغیر شروع کرده‌ایم، ولی در محاسبات، عملاً ملزم به اعمال قیودی شدیم که حاصل آن سه نوع ابرپتانسیل مختلف با خصوصیات زیر بود: ۱- به ازای مقادیر خاصی از پارامترها به تعدادی از ابرپتانسیلهای مشهور قبلی تبدیل می‌شوند و این نتیجه خود تست مهمی برای اطمینان از صحت آنهاست. ۲- به این لحاظ که تاکنون چنین ابرپتانسیلهایی که هر یک مولد برخی از ابرپتانسیلهای قبلی باشند معرفی نشده جدیداند. ۳- همچنین این ادعا که غیر از سه ابرپتانسیل کولن، نوسانگر سه بعدی و نوسانگر انتقال یافته، بقیه ابرپتانسیلهای شناخته شده قبلی زیر مجموعه‌هایی از این سه ابرپتانسیل هستند هم ادعای جدیدی است. ۴- از هر یک از سه دسته ابرپتانسیل فوق، پتانسیلهایی ایجاد می‌شود که انرژیهای کلاین گوردان آنها دارای فواصل مساوی است، ولی قیدی که برای این منظور اعمال می‌کنیم سبب کاهش پارامترهای متغیر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ابرتقارن، ابرپتانسیل، پتانسیلهای همسازگار، شکل ناوردایی، ترازهای انرژی با فواصل مساوی

۱. مقدمه

با مراجعه به مقاله‌هایی که در زمینه مکانیک کوانتومی ابرتقارنی (Susy QM) و یا در زمینه پتانسیلهای دارای حل دقیق نوشته شده‌اند و تعدادی از آنها را در قسمت مراجع معرفی کرده‌ایم، از جمله مقاله مروری کوپر که در سال ۱۹۹۵ منتشر شده است [۱]، خواهیم دید که با فرض

$$\frac{\hbar^2}{2m} = 1, \quad (1)$$

و به کمک ابرپتانسیل $W(x)$ و مشتق آن $W' = \frac{dW}{dx}$ دو پتانسیل همسازگار $V^-(x)$ و $V^+(x)$ از دو رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$V^\mp = W^2 \mp W'. \quad (2)$$

چنانچه برای همه V_n^+ و V_{n+1}^- ها R_{n+1} هایی مستقل از x

وجود داشته باشند که در رابطه شکل ناوردایی زیر صدق کنند

$$V_n^+ = V_{n+1}^- + R_{n+1}, \quad (3)$$

آنگاه انرژی ترازها از رابطه مهم زیر به دست می‌آیند:

$$\epsilon_n^+ = \epsilon_{n+1}^- = \sum_{i=1}^{n+1} R_i. \quad (4)$$

از طرف دیگر با فرض این که ψ_n تابع موج تراز n ام و

$$\psi_n'' = \frac{d^2 \psi_n}{dx^2}$$

باشند، معادله شرودینگر برای این تراز به صورت زیر است

$$-\psi_n'' + V(x)\psi_n = \epsilon_n \psi_n. \quad (5)$$

اگر انرژی تراز پایه برای پتانسیل V^- با تابع معلوم

دارای حل دقیق است.

به لحاظ نوع پارامترها می‌توان ابرپتانسیلهای مشهور را به صورت زیر به سه دسته تقسیم بندی کرد.

۲.۱. یک ابرپتانسیل با دو پارامتر ثابت A و B که عبارت است از:

$$B_n = B, A_n = A \quad \text{با} \quad W = \frac{A}{r}x - B, \quad (11)$$

که مولد پتانسیل نوسانگر انتقال یافته با انرژیهای $\epsilon_n^- = 2nA$ است.

۲.۲. ابرپتانسیلهایی با یک پارامتر متغیر A و یک پارامتر ثابت B که عبارتند از:

$$B_n = B, A_n = A + n \quad \text{با} \quad W = -\frac{A}{r} + Br, \quad (12)$$

که مولد پتانسیل نوسانگر سه بعدی با انرژیهای $\epsilon_n^- = 4nA$ است.

$$B_n = B, A_n = A + n \quad \text{با} \quad W = -\frac{A}{r} + \frac{B}{A}, \quad (13)$$

که مولد پتانسیل کولن با انرژیهای $\epsilon_n^- = B^2 \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_n^2} \right)$ است.

$$B_n = B, A_n = A - n\alpha \quad \text{با} \quad W = A - B \exp(-\alpha x), \quad (14)$$

که مولد پتانسیل مورس با انرژیهای $\epsilon_n^- = A^2 - A_n^2$ است.

$$B_n = B, A_n = A + n\alpha \quad \text{با} \quad W = -A \cot(\alpha x) - \frac{B}{A}, \quad (15)$$

که مولد پتانسیل روزن مورس ۱ با انرژیهای

$$\epsilon_n^- = A^2 - A_n^2 + B^2 \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_n^2} \right) \quad \text{است.}$$

$$B_n = B, A_n = A - n\alpha \quad \text{با} \quad W = A \tanh(\alpha x) + \frac{B}{A}, \quad (16)$$

که مولد پتانسیل روزن مورس ۲ با انرژیهای

$$\epsilon_n^- = A^2 - A_n^2 + B^2 \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_n^2} \right) \quad \text{است.}$$

$$B_n = B, A_n = A + n\alpha \quad \text{با} \quad W = -A \coth(\alpha x) + \frac{B}{A}, \quad (17)$$

که مولد پتانسیل اکارت با انرژیهای

$$\epsilon_n^- = A^2 - A_n^2 + B^2 \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_n^2} \right) \quad \text{است.}$$

$\psi_0^-(x) = \psi_0$ روی صفر ($\epsilon_0^- = 0$) تنظیم شده باشد آنگاه از رابطه (۵) داریم:

$$V^- = \frac{\psi_0''}{\psi_0} = \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)^2 + \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)' \quad (6)$$

اما با مقایسه رابطه (۶) با رابطه (۲) می‌توان ابرپتانسیل W را از رابطه زیر به دست آورد

$$W = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}, \quad (7)$$

و برعکس چنانچه ابرپتانسیل $W(x)$ تابع مشخصی باشد می‌توان ψ_0^- را از رابطه

$$\psi_0^- = \psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\int^x W(x) dx\right), \quad (8)$$

به دست آورد که در آن N_0 ضریب بهنجارش است.

سپس با روش عملگری و به کمک عملگر بالا برنده

$$L_+ = W - \frac{d}{dx}, \quad (9)$$

توابع ویژه سایر ترازهای انرژی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\psi_{n+1}^- = N_{n+1} L_+^{n+1} \psi_0 = N_{n+1} \left(W - \frac{d}{dx} \right)^{n+1} \psi_0. \quad (10)$$

از آنجا که برای این گونه پتانسیلهای می‌توان ϵ_n و ψ_n های معادله شرودینگر را به طور دقیق از روابط (۴) و (۸) و (۱۰) به دست آورد، آنها را پتانسیلهای دارای حل دقیق نامیده‌اند.

تا کنون با این روش تعداد معدودی پتانسیل پیدا شده است که حدود ۱۲ مورد آن مشهوراند و برای آنها ϵ_n ها و ψ_n ها به صورت دقیق محاسبه شده است و سالها سعی می‌شده است پتانسیلهای جدیدتری نیز با روش فوق ایجاد گردد ولی به نظر می‌رسد بعد از مقاله مروری کوپر که در سال ۱۹۹۵ نوشته شده است [۱] تا کنون در مجلات مشهور فیزیک ابرپتانسیل جدید و با اهمیتی معرفی نشده باشد.

۲. دسته بندی ابرپتانسیلهای مشهور

در بحث مکانیک کوانتومی ابرتقارنی تاکنون حدود ۱۲ ابرپتانسیل معروف در مراجع [۱ تا ۱۰] معرفی شده‌اند که معادله شرودینگر با پتانسیلهای حاصل از آنها

۱.۳. ابریپتانسیلی با یک پارامتر متغیر

برای حالت خاص $G=0$ قیود حاصل از شکل ناوردایی (۳)

برای اولین مرحله ($n=0$) به صورت زیراند:

$$\begin{cases} F^2 - \gamma^2 C^2 = F_1^2 - \gamma^2 C_1^2, \\ \gamma FD - \beta \gamma D = \gamma F_1 D_1 - \beta \gamma D_1, \\ D^2 + \gamma FC - \gamma \beta C + \gamma C^2 - \gamma \beta F = \\ D_1^2 + \gamma F_1 C_1 + \gamma \beta C_1 + \gamma C_1^2 + \gamma \beta F_1, \\ \gamma DC - \beta D = \gamma D_1 C_1 + \beta D_1, \\ R_1 = C^2 - C_1^2. \end{cases} \quad (24)$$

و برای این روابط انتخاب زیر صحیح است

$$C_1 = C - \beta, \quad D_1 = D, \quad F = \gamma C. \quad (25)$$

یعنی در حالت $G=0$ ابریپتانسیل مورد نظر ما برای تراز n ام

باید به صورت زیر نوشته شود:

$$W_n = \frac{C_n(\gamma + e^{-\gamma\beta x}) + D_n e^{-\beta x}}{\gamma - e^{-\gamma\beta x}}, \quad (26)$$

و روابط لازم برای شکل ناوردایی بین تراز n و $n+1$ به صورت زیراند:

$$D_n = D, \quad C_n = C - n\beta, \quad (27)$$

و

$$R_{n+1} = C_n^2 - C_{n+1}^2, \quad (28)$$

سپس با استفاده از روابط (۴) و (۲۸) انرژی ترازها به صورت زیر خواهند بود

$$\epsilon_n^- = C^2 - (C - n\beta)^2. \quad (29)$$

با دو تبدیل $C_n \rightarrow iC_n$ و $\beta \rightarrow -i\beta$ چهار رابطه فوق به صورت زیر در می آیند:

$$W_n = \frac{iC_n(\gamma + e^{i\gamma\beta x}) + D_n e^{i\beta x}}{\gamma - e^{i\gamma\beta x}}, \quad (30)$$

$$D_n = D, \quad C_n = C + n\beta, \quad (31)$$

$$R_{n+1} = C_{n+1}^2 - C^2, \quad (32)$$

و

$$\epsilon_n^- = (C + n\beta)^2 - C^2. \quad (33)$$

در حالتی خاص از روابط (۲۶) و (۲۹) و (۳۰) و (۳۳) می توان تعدادی از ابریپتانسیلهای شناخته شده قبلی و انرژیهای

مربوطه را به دست آورد که اهم آنها عبارتند از:

$$B_n = B, \quad A_n = A + n\alpha \quad \text{با} \quad W = -A \tan(\alpha x) + B \sec(\alpha x), \quad (18)$$

که مولد پتانسیل اسکارف ۱ با انرژیهای $\epsilon_n^- = A_n^2 - A^2$ است.

$$B_n = B, \quad A_n = A - n\alpha \quad \text{با} \quad W = A \tanh(\alpha x) + B \operatorname{sech}(\alpha x), \quad (19)$$

که مولد پتانسیل اسکارف ۲ با انرژیهای $\epsilon_n^- = A^2 - A_n^2$ است.

$$W = A \coth(\alpha x) - B \operatorname{cosech}(\alpha x) \quad \text{با}$$

$$B_n = B, \quad A_n = A + n\alpha, \quad (20)$$

که مولد پتانسیل پاشل - تدر تعمیم یافته با انرژیهای $\epsilon_n^- = A^2 - A_n^2$ است.

۳.۲. ابریپتانسیلهایی با دو پارامتر متغیر A, B که عبارتند از:

$$W = A \tan(\alpha x) - B \cot(\alpha x) \quad \text{با}$$

$$B_n = B + n\alpha, \quad A_n = A + n\alpha, \quad (21)$$

که مولد پتانسیل پاشل - تدر ۱ با انرژیهای $\epsilon_n^- = (A_n + B_n)^2 - (A + B)^2$ است و

$$W = A \tanh(\alpha x) - B \coth(\alpha x) \quad \text{با}$$

$$B_n = B + n\alpha, \quad A_n = A - n\alpha, \quad (22)$$

که مولد پتانسیل پاشل - تدر ۲ با انرژیهای $\epsilon_n^- = (A - B)^2 - (A_n - B_n)^2$ است.

۳. ایجاد ابریپتانسیلهای مورد نظر

با توجه به فرم توابع W در روابط (۱۴) تا (۲۲) در این مقاله به کمک دو پارامتر ثابت β و γ و چهار پارامتر کلی C, D, F و G ابریپتانسیل کلی زیر را در نظر می گیریم

$$W = \frac{C e^{-\gamma\beta x} + D e^{-\beta x} + F}{\gamma - e^{-\gamma\beta x}} + G. \quad (23)$$

با اعمال شرط شکل ناوردایی (۳) برای ابریپتانسیل فوق تعدادی رابطه قیدی بین پارامترهای $C, D, F, D, C, C_n, G, F_n$ و D_n پیدا می شود که حل آنها به صورت کلی به سادگی امکان پذیر نیست ولی اگر حالتی خاص را مورد نظر قرار دهیم، سه مورد از آنها منجر به سه دسته نتیجه زیر می شود:

۲.۳. ابر پتانسیلی با دو پارامتر متغیر

در حالت خاص $D=C=0$ با فرض $G=\frac{H}{F}$ رابطه (۲۳) به صورت زیر در می آید

$$W = \frac{F}{\gamma - e^{-\gamma\beta x}} + \frac{H}{F} \quad (34)$$

که برای آن با اعمال شرط نوردایی (۳) برای $n=0$ لازم می شود:

$$\begin{aligned} F^\gamma - F_1^\gamma + 2\gamma(H - H_1) &= 0, \\ \beta(F + F_1) + (H - H_1) &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

و

$$R_1 = \frac{H^\gamma}{F^\gamma} - \frac{H_1^\gamma}{F_1^\gamma} \quad (36)$$

پس از حذف $(H - H_1)$ از دو رابطه (۳۵) می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} F(F - 2\gamma\beta) &= F_1(F_1 + 2\gamma\beta), \\ \text{که در آن جوابی به صورت زیر صدق می کند} \\ F_1 &= F - 2\beta\gamma, \end{aligned} \quad (37)$$

و با قرار دادن (۳۷) در رابطه $\beta(F + F_1) + H - H_1 = 0$ خواهیم داشت:

$$H_1 = H + 2\beta F - 2\beta^\gamma\gamma \quad (38)$$

همچنین با اعمال شرط نوردایی (۳) برای تراز کلی n نیز به روابط زیر می رسیم:

$$\begin{cases} F_n = F - 2n\beta\gamma, \\ H_n = H + 2n\beta F - 2n^\gamma\beta^\gamma\gamma, \end{cases} \quad (39)$$

و

$$R_{n+1} = \frac{H_n^\gamma}{F_n^\gamma} - \frac{H_{n+1}^\gamma}{F_{n+1}^\gamma} \quad (40)$$

و سپس با روابط (۴)، (۳۹) و (۴۰) انرژی ترازها به صورت زیر به دست می آیند:

$$\epsilon_n^- = \frac{H^\gamma}{F^\gamma} - \frac{H_n^\gamma}{F_n^\gamma} = \frac{H^\gamma}{F^\gamma} - \frac{(H + 2n^\gamma\beta^\gamma\gamma)^\gamma}{(F - 2n\beta\gamma)^\gamma} \quad (41)$$

همچنین با تبدیل $F_n \rightarrow iF_n$ و $\beta \rightarrow i\beta$ روابط (۳۴)، (۳۹) و (۴۱) به ترتیب به صورت زیر در می آیند:

$$W = \frac{iF}{\gamma - e^{-\gamma i\beta x}} - i\frac{H}{F} \quad (42)$$

الف) با انتخاب $\gamma=0$ از رابطه (۲۶) رابطه $W = -C - De^{\beta x}$ حاصل می شود که با فرض $-C=A$ و $D=B$ و $\beta=-\alpha$ ابر پتانسیل مورس (۱۴) با انرژیهای $\epsilon_n^- = A^\gamma - (A - n\alpha)^\gamma$ است.

ب) با انتخاب $\gamma=1$ از رابطه (۲۶) $W = C \coth \beta x - \frac{D}{\gamma} \operatorname{cosech} \beta x$ نتیجه می شود که با فرض $C=A$ ، $\beta=\alpha$ و $D=-2B$ ابر پتانسیل پاشل - تدر تعمیم یافته (۲۰) با انرژیهای $\epsilon_n^- = A^\gamma - (A - n\alpha)^\gamma$ است.

ج) با انتخاب $\gamma=1$ از رابطه (۲۶) $W = C \tanh \alpha x - \frac{D}{\gamma} \operatorname{sech} \alpha x$ حاصل می شود که با فرض $C=A$ و $D=-2B$ و $\beta=\alpha$ ابر پتانسیل اسکارف ۲ (۱۹) با انرژیهای $\epsilon_n^- = A^\gamma - (A - n\alpha)^\gamma$ می باشد.

د) با انتخاب $\gamma=-1$ ، $\beta=\alpha$ ، $D=-2B$ و $C=A$ از رابطه (۳۰) می توان رابطه $W = -A \tan \alpha x + B \sec \alpha x$ را نتیجه گرفت که ابر پتانسیل اسکارف ۱ (۱۸) است و انرژیهای آن از رابطه (۳۳) به صورت $\epsilon_n^- = (A + n\alpha)^\gamma - A^\gamma$ می باشد.

ه) با انتخاب $\gamma=1$ ، $\beta=-2\alpha$ ، $D=2i(A-B)$ و $C=A+B$ رابطه (۳۰) به صورت $W = A \tan \alpha x - B \cot \alpha x$ در می آید که ابر پتانسیل پاشل - تدر ۱ است و با توجه به روابط (۳۱) و $C_n = -i(A_n + B_n)$ و $D_n = 2i(A_n - B_n)$ باید هم انرژیهای پاشل - تدر ۱ $\epsilon_n^- = (A + B + 2n\alpha)^\gamma - (A + B)^\gamma$ به دست می آیند.

و) با انتخاب $\gamma=1$ ، $\beta=2\alpha$ ، $D=-2(A+B)$ و $C=A-B$ رابطه (۲۶) به صورت $W = A \tanh \alpha x - B \coth \alpha x$ در می آید که ابر پتانسیل پاشل - تدر ۲ است و با توجه به روابط (۲۷) و $C_n = A_n - B_n$ و $D_n = -2(A_n + B_n)$ باید هم انرژیهای پاشل - تدر ۲ به صورت $\epsilon_n^- = (A - B)^\gamma - (A - B - 2n\alpha)^\gamma$ به دست می آیند.

$$C_1 = C - \beta. \quad (51)$$

با قرار دادن (۵۰) و (۵۱) در رابطه (۴۶) G_1 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G_1 = \frac{G(F + \gamma C) - \beta(\gamma C - F)}{F + \gamma C - 2\gamma\beta}. \quad (52)$$

در مرحله دوم نیز با اعمال شرط شکل ناوردایی (۳) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F_1 = F - 2\gamma\beta, \\ C_1 = C - 2\beta, \\ G_1 = \frac{G(F + \gamma C) - 2\beta(\gamma C - F)}{F + \gamma C - 4\gamma\beta}, \\ R_1 = (G_1 - C_1)^2 - (G_1 - C_1)^2. \end{cases} \quad (53)$$

به همین ترتیب در مرحله n ام نیز خواهیم داشت:

$$F_n = F - n\gamma\beta, \quad (54)$$

$$C_n = C - n\beta, \quad (55)$$

$$G_n = \frac{G(F + \gamma C) - n\beta(\gamma C - F)}{F + \gamma C - 2n\gamma\beta}, \quad (56)$$

$$R_n = (G_{n-1} - C_{n-1})^2 - (G_n - C_n)^2. \quad (57)$$

و با استفاده از رابطه (۴) نیز انرژیهای آن به صورت زیراند:

$$\bar{\epsilon}_n = (G - C)^2 - (G_n - C_n)^2. \quad (58)$$

با تبدیل $C \rightarrow iC$, $F \rightarrow iF$, $G \rightarrow iG$ و روابط (۴۵)

و (۵۸) به صورت زیر در می‌آیند

$$W = i \left(\frac{F + C e^{-\gamma\beta x}}{\gamma - e^{-\gamma\beta x}} + G \right), \quad (59)$$

$$\bar{\epsilon}_n = (G_n - C_n)^2 - (G - C)^2. \quad (60)$$

ولی در روابط (۵۴)، (۵۵) و (۵۶) تغییری حاصل نمی‌شود.

باز هم در اینجا برای اطمینان از صحت روابط فوق حالتی خاصی از دواپرتانسلی (۴۵) و (۵۹) را به ترتیب زیر به دست می‌آوریم:

الف) در حالت خاص $\gamma = 0$ رابطه (۴۵) به صورت

$$W = G - C - F e^{2\beta x}$$

و روابط (۵۴)، (۵۵) و (۵۶) به صورت

$$F_n = F, \quad C_n = C - n\beta, \quad G_n = G + n\beta$$

در می‌آیند که با فرض $G - C = A$ و $F = \beta$ و $\beta = -\frac{\alpha}{\gamma}$ به روابط مربوط

به ابریتانسلی مورس ($W = A - Be^{-\alpha x}$), $A_n = A - n\alpha$,

$$\begin{cases} F_n = F - 2n\beta\gamma, \\ H_n = H - 2n\beta F + 2n^2\beta^2\gamma, \end{cases} \quad (43)$$

$$\bar{\epsilon}_n = \frac{H_n^2}{F_n^2} - \frac{H^2}{F^2} = \frac{(H - 2n\beta F + 2n^2\beta^2\gamma)^2}{(F - 2n\beta\gamma)^2} - \frac{H^2}{F^2}. \quad (44)$$

در حالت خاص $\gamma = 0$ که ابریتانسلی (۳۴) به صورت

$$F = B, \quad -2\beta = \alpha, \quad W = \frac{H}{F} - F e^{+\beta x}$$

و $\frac{H}{F} = A$ ، همان ابریتانسلی مورس $W = A - Be^{-\alpha x}$ است و

از (۳۹) و (۴۱) روابط تبدیل $B_n = B$ و $A_n = A - n\alpha$ و

انرژیهای $\bar{\epsilon}_n = A^2 - (A - n\alpha)^2$ که مربوط به ابریتانسلی

مورس (۱۴) است به دست می‌آیند. علاوه بر آن با $\gamma = \pm 1$ نیز

حالتی خاص $B = 0$ ابریتانسلیهای اسکارف ۲، روزن مورس

۱ و ۲ و پاشل - تیر ۱ و ۲ از ابریتانسلیهای (۳۴) و (۴۲)

حاصل می‌شوند که این نتایج خود تسی برای اطمینان از صحت

آنهاست.

۳.۳. ابریتانسلی با سه پارامتر متغیر

در حالت خاص $D = 0$ که رابطه (۲۳) به صورت زیر در

می‌آید:

$$W = \frac{F + C e^{-\gamma\beta x}}{\gamma - e^{-\gamma\beta x}} + G, \quad (45)$$

با اعمال شرط شکل ناوردایی (۳) برای اولین مرحله ($n = 0$)

ضرورتاً باید قیود زیر برقرار باشند:

$$F^2 - F_1^2 + 2\gamma(FG - F_1G_1) + \quad (46)$$

$$2\gamma^2(CG - C_1G_1) - \gamma^2(C^2 - C_1^2) = 0,$$

$$\gamma(C^2 - C_1^2) - \gamma(CG - C_1G_1) + (FC - F_1C_1) - \quad (47)$$

$$(FG - F_1G_1) - \gamma\beta(C + C_1) - \beta(F + F_1) = 0,$$

$$R_1 = G^2 - G_1^2 + C^2 - C_1^2 - 2(CG - C_1G_1) = \quad (48)$$

$$(G - C)^2 - (G_1 - C_1)^2.$$

اکنون با به دست آوردن G_1 از (۴۶) و (۴۷) و مساوی گذاشتن

آنها به نتیجه زیر می‌رسیم

$$(F + \gamma C)(F + \gamma C - 2\gamma\beta) = (F_1 + \gamma C_1)(F_1 + \gamma C_1 + 2\gamma\beta) \quad (49)$$

که در آن روابط زیر صدق می‌کنند

$$F_1 = F - \gamma\beta, \quad (50)$$

مساوی بررسی شده است و مقادیر ویژه معادله کلاین - گوردان (E_n ها) بر حسب مقادیر ویژه معادله شرودینگر (\in_n ها) به صورت زیر است که در آن جرم سکون ذره است

$$E_n = \sqrt{2m\in_n} \quad (61)$$

از طرف دیگر چنانچه برای پتانسیلی مثل V^- انرژیهای معادله شرودینگر به صورت $\in_n = f(n) - \delta$ باشند که در آن δ ثابتی مستقل از n است، آنگاه برای پتانسیل $V = V^- + \delta$ انرژیهای معادله شرودینگر به صورت $\in_n = f(n)$ و طبق رابطه (61) انرژیهای معادله کلاین گوردان را برای پتانسیل $V = V^- + \delta$ باید از رابطه زیر به دست آورد.

$$E_n = \sqrt{2mf(n)} \quad (62)$$

لذا چنانچه E_n تابع مرتبه اولی از n به دست آید ترازهای انرژی کلاین گوردان فواصل مساوی خواهند داشت و در این قسمت با منظور فوق از بعضی از \in_n های حاصل از ابرپتانسیلهایی که در قسمتهای ۱.۳، ۲.۳ و ۳.۳ به دست آورده ایم به ترتیب زیر استفاده می کنیم:

الف) با توجه به روابط (۳۰) و (۳۳) چنانچه با استفاده از

$$W = \frac{iC(\gamma + e^{i\beta x}) + D e^{i\beta x}}{\gamma - e^{i\beta x}}, \quad (63)$$

پتانسیلی به صورت

$$V = W'' - W' + C^2, \quad (64)$$

تشکیل دهیم برای آن $f(n)$ به صورت زیر است

$$f(n) = \in_n' + C^2 = (C + n\beta)^2 \quad (65)$$

در نتیجه با استفاده از (62) و (65) انرژیهای معادله کلاین گوردان عبارتند از:

$$E_n = \sqrt{2m} |C + n\beta|, \quad (66)$$

که ترازهای انرژی با فواصل مساوی $(E_{n+1} - E_n = \sqrt{2m}\beta)$ هستند.

ب) با توجه به رابطه (44) چنانچه پتانسیل را از رابطه

$$V = W'' - W' + \frac{H^2}{F^2}, \quad (67)$$

و به کمک ابرپتانسیل (42) به دست آوریم خواهیم داشت

$(B_n = B)$ و از رابطه (58) نیز انرژیهای مورس $\in_n = A^2 - (A - n\alpha)^2$ به دست می آیند.

ب) در حالت خاص $\gamma = 1$ که $F_n = F - n\beta$ و $C_n = C - n\beta$ است می توان فرض کرد $C = F$ و سپس با فرض $\beta = -\alpha$ معادله (45) به $W = -F \coth \alpha x + G$ می آید و برای آن $F_n = F + n\beta$ و $G_n = \frac{GF}{F_n}$ اند و با فرض $F = A$ و $G = \frac{B}{A}$ ابرپتانسیل اکارت $W = -A \coth \alpha x + G$ از رابطه (58) انرژیهای اکارت به صورت زیر به دست می آیند:

$$\in_n = \left(\frac{B}{A} - A\right)^2 - \left(\frac{B}{A + n\alpha} - (A + n\alpha)\right)^2 = A^2 - (A + n\alpha)^2 + B^2 \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{(A + n\alpha)^2}\right).$$

ج) در حالت خاص $\gamma = 1$ ، $\beta = \alpha$ ، $F = C = -A$ و $G = i\frac{B}{A}$ نیز مشابه محاسبات فوق ابرپتانسیل (59) به ابرپتانسیل روزن مورس ۱، $\left(W = -A \cot \alpha x - \frac{B}{A}\right)$ و انرژیهای (60) نیز به انرژیهای روزن مورس ۱ تبدیل می شوند:

$$\in_n = (A + n\alpha)^2 - A^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{(A + n\alpha)^2}.$$

د) در حالت خاص $\gamma = -1$ ، $\beta = \alpha$ ، $C = -F = A$ و $G = \frac{B}{A}$ نیز ابرپتانسیل (45) به ابرپتانسیل روزن مورس ۲، $\left(W = A \tanh \alpha x + \frac{B}{A}\right)$ و انرژیهای (58) نیز به انرژیهای روزن مورس ۲ تبدیل می شوند.

$$\in_n = A^2 - (A - n\alpha)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{(A - n\alpha)^2}.$$

۴. کاربرد برای ذرات بنیادی

در مقاله های طیف سنجی کوآرکونیم به کمک معادله کلاین گوردان [۱۱] و حالت همدوس برای ذره نسبیتی بدون اسپین [۱۲] کاربردهایی از انرژیهای معادله شرودینگر در به دست آوردن طیف انرژیهای ذرات نسبیتی وارد شده و اهمیت ترازهای انرژی معادله نسبیتی کلاین - گوردان با فواصل

رابطه (۷۶) پیدا می‌شوند که دارای ترازهای انرژی با فواصل مساوی $(E_{n+1} - E_n = \sqrt{2m\beta^2})$ است.

بدیهی است بین دو تابع (۷۱) و (۷۷) تفاوت اساسی وجود ندارد ولی ابرتانسلی (۶۳) کلی‌تر از (۷۱) و (۷۷) است.

۵. نتیجه‌گیری

به طور خلاصه می‌توان گفت که با این محاسبات توانسته‌ایم سه نوع ابرتانسلی جدید پیدا کنیم، دسته اول ابرتانسلی (۲۶) همراه با روابط تبدیل (۲۷) و انرژیهای (۲۹) و یا ابرتانسلی (۳۰) همراه با روابط تبدیل (۳۱) و انرژیهای (۳۳) که یک پارامتر متغیر دارند و به ازای مقادیر خاصی از پارامترها به ابرتانسلیهای مورس، پاشل - تلمر تعمیم یافته، پاشل - تلمر ۱ و ۲ و اسکارف ۱ و ۲ تبدیل می‌شوند.

دسته دوم ابرتانسلی (۳۴) همراه با روابط تبدیل (۳۹) و انرژیهای (۴۱) و یا ابرتانسلی (۴۲) همراه با روابط تبدیل (۴۳) و انرژیهای (۴۴) که دو پارامتر متغیر دارند و به ازای مقادیر خاصی از پارامترها به ابرتانسلیهای مورس، اسکارف ۲، روزن مورس ۱ و ۲ و پاشل - تلمر ۱ و ۲ تبدیل می‌شوند.

دسته سوم ابرتانسلیهای (۴۵) و (۵۹) با روابط تبدیل (۵۴)، (۵۵) و (۵۶) و به ترتیب با انرژیهای (۵۸) و (۶۰) که دارای سه پارامتر متغیراند و به ازای مقادیر خاصی از پارامترها به ابرتانسلیهای مورس، اکارت و روزن مورس ۱ و ۲ تبدیل می‌شوند.

چنانچه بخواهیم نظیر مقاله "حالت همدوس برای ذره نسبیتی بدون اسپین [۱۲]" برای ذرات بنیادی از معادله کلاین گوردان و پتانسیلهای جدیدی که پیدا کرده‌ایم استفاده کنیم دسته اول دارای ترازهای انرژی با فواصل مساوی اند ولی به ازای مقادیر کلی پارامترها دسته دوم و سوم ترازهای انرژی با فواصل غیر مساوی دارند و با اعمال قید مساوی شدن فواصل ترازها، این دو دسته نیز به ابرتانسلیهایی با یک پارامتر متغیر تبدیل می‌شوند.

$$f(n) = \left(\frac{H - 2n\beta F + 2n^2\beta^2\gamma}{F - 2n\beta\gamma} \right)^2. \quad (68)$$

و لذا از (۶۲) و (۶۸) انرژیهای معادله کلاین گوردان آن را باید از رابطه زیر به دست آورد.

$$E_n = \sqrt{2m} \left| \frac{H - 2n\beta F + 2n^2\beta^2\gamma}{F - 2n\beta\gamma} \right|, \quad (69)$$

که برای ایجاد ترازهای با فواصل مساوی کافی است که از حالت خاص $H = \frac{F^2}{2\gamma}$ استفاده می‌شود که در این صورت داریم:

$$E_n = \sqrt{2m} \left| \frac{F}{2\gamma} - n\beta \right|, \quad (70)$$

$$W = iF \left(\frac{1}{\gamma - e^{-2i\beta x}} - \frac{1}{2\gamma} \right) = \frac{iF}{2\gamma} \left(\frac{\gamma + e^{-2i\beta x}}{\gamma - e^{-2i\beta x}} \right). \quad (71)$$

با توجه به رابطه (۶۷) برای پتانسیل $V = W^2 - W' + \frac{F^2}{4\gamma^2}$ انرژیهای معادله کلاین گوردان از رابطه (۷۰) به دست می‌آیند که دارای ترازهای انرژی با فواصل مساوی $(E_{n+1} - E_n = \sqrt{2m\beta^2})$ هستند.

ج) با توجه به رابطه (۶۰) اگر پتانسیل را از رابطه

$$V = W^2 - W' + (G - C)^2, \quad (72)$$

و به کمک ابرتانسلی (۵۹) به دست آوریم، داریم:

$$f(n) = (G_n - C_n)^2. \quad (73)$$

لذا از رابطه (۶۲) E_n ها عبارتند از

$$E_n = \sqrt{2m} |G_n - C_n|, \quad (74)$$

که با استفاده از روابط (۵۵) و (۵۶) به صورت زیر در می‌آیند

$$E_n = \sqrt{2m} \left| \frac{G(F + \gamma C) - n\beta(\gamma C - F)}{F + \gamma C - 2n\beta\gamma} - C + n\beta \right|. \quad (75)$$

اگر از حالت خاص $F = \gamma(C - 2G)$ استفاده کنیم رابطه (۷۵) به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$E_n = \sqrt{2m} |G - C + n\beta|. \quad (76)$$

نتیجه اینکه وقتی پتانسیل (۷۲) از ابرتانسلی

$$W = i(C - G) \frac{\gamma + e^{-2i\beta x}}{\gamma - e^{-2i\beta x}}, \quad (77)$$

به دست آید انرژیهای معادله کلاین گوردان با این پتانسیل از

مراجع

- (1988) 163.
8. R Dutt, A Khare and U Sukhatme, *Phys. Lett B* **181** (1986) 295.
 9. J Dabrowska, A Khare and U Sukhatme, *J. of Phys. A* **21** (1988) L 195.
 10. L Gedenshtein, *JETP Lett* **38** (1983) 356.
 ۱۱. منصور حقیقت، بهروز میرزا و علی دادخواه، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۲، ۳ (۱۳۷۹).
 12. M Haghightat and A Dadkhah, *Phys. Lett. A* **316** (2003) 271.
 1. F Cooper, A Khare and U Sukhatme, *Phys. Rep.* **251** (1995) 267.
 2. F Cooper, J N Ginocchio and A Wipf, *Phys. Lett. A* **129** (1988) 145.
 3. F Cooper, J N Ginocchio and A Khare, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 2458.
 4. A Khare and U Sukhatme, *J. of Phys. A* **26** (1993) L 901.
 5. A Khare and U Sukhatme, *J. of Phys. A* **21** (1988) L 501.
 6. C Chuan, *J. of Phys. A* **24** (1991) L 1165.
 7. R Dutt, A Khare and U Sukhatme, *Am. J. of Phys.* **58**