

## بررسی پایداری حالت همگام در شبکه‌ای از نگاشت‌های آشوبناک با روش سنجه ماتریسی

فاطمه آقائی، سید سعید حسینی، کیوان آقابابائی سامانی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

پست الکترونیکی: f.aghaei@ph.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۵/۱۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۱۰/۱۶)

### چکیده

بررسی پایداری حالت همگام یک مسئله مهم در همگام‌سازی است. در این مطالعه به بررسی سنجه ماتریسی که روشی برای بررسی پایداری حالت همگام در شبکه‌های نگاشت‌های آشوبناک است، می‌پردازیم. سنجه ماتریسی، معیاری است که تنها به ساختار شبکه بستگی دارد و مستقل از نوع نگاشت است. با استفاده از این معیار و با مقایسه آن با آستانه همگام‌سازی، که به تابع نگاشت بستگی دارد، می‌توان نشان داد، دستگاه تحت چه شرایطی حالت همگام پایدار خواهد داشت. برای این کار روش سنجه ماتریسی را برای شبکه‌های با پارامترها و توپولوژی‌های مختلف به کار می‌بریم. محاسبات عددی ما نشان می‌دهد، شبکه‌های متراکم‌تر به ازای بازه‌های بزرگ‌تری از شدت جفت‌شدگی پایدار باقی می‌مانند. اندازه شبکه، پارامتر مهم دیگری در پایداری حالت همگام است؛ مرتبه مقدار و اندازه بازه پایداری را اندازه شبکه مشخص می‌کند. همچنین نتایج ما نشان می‌دهد، از میان شبکه‌های متراکم، شبکه‌های تصادفی و بی‌مقیاس بازه‌های پایداری بزرگ‌تری دارند. در انتها نیز از تابع خطا برای ارزیابی درستی نتایج سنجه ماتریسی استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: همگام‌سازی، پایداری، سنجه ماتریسی، نگاشت آشوبناک، پارامتر شبکه، توپولوژی شبکه

### ۱. مقدمه

روش نه تنها برای بررسی پایداری همگام‌سازی دستگاه‌های دینامیکی زمان-گسسته، بلکه برای دستگاه‌های دینامیکی زمان پیوسته نیز ارائه شده است. سنجه ماتریسی<sup>۱</sup>، کوچک‌ترین اندازه یک ماتریس نامنفی وابسته به ماتریس جفت‌شدگی است که به صورت تابعی از شدت جفت‌شدگی ساخته می‌شود. این معیار می‌تواند، بازه‌هایی از شدت جفت‌شدگی را مشخص کند که در معادلات دینامیکی

همگام‌سازی دستگاه‌های دینامیکی، یک رفتار جمعی است که در زمینه‌های مختلف از شبکه‌های اجتماعی و اقتصادی تا شبکه‌های عصبی مشاهده شده است [۱-۱۲]. روش‌های متعددی برای مطالعه پایداری همگام‌سازی ارائه شده است [۱۳-۱۸] که از میان آن‌ها روش سنجه ماتریسی برای بررسی پایداری حالت همگام بسیاری از شبکه‌های دستگاه‌های دینامیکی مشابه جفت‌شده، قابل استفاده است [۱۸-۲۲]. فرمول‌بندی ریاضی این

۱. Matrix measure

ماتریس جفت‌شدگی دلخواه قابل استفاده، و مستقل از جواب حالت همگام است. در این جا این روش را که در مرجع [۲۲] معرفی شده است، به اختصار شرح می‌دهیم. شبکه‌ای متشکل از  $N$  نگاشت در نظر می‌گیریم که دینامیک هر یک از آن‌ها با معادله زیر مشخص می‌شود:

$$x_i(t+1) = f[x_i(t)] + \varepsilon \sum_{j=1}^N W_{ij} \{f[x_j(t)] - f[x_i(t)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

در این معادله  $f[x(t)]$  معادله نگاشت منزوی،  $W$  ماتریس جفت‌شدگی و  $\varepsilon$  شدت جفت‌شدگی را نشان می‌دهند. اگر  $X$  را به صورت  $X_{1i}(t) = x_i(t) - x_1(t)$  تعریف کنیم، داریم:

$$X_{1i}(t+1) = f[x_i(t)] - f[x_1(t)] + \varepsilon \sum_{j=1}^N W_{ij} (f[x_j(t)] - f[x_i(t)]) - \varepsilon \sum_{j=1}^N W_{1j} (f[x_j(t)] - f[x_1(t)]), \quad i = 2, \dots, N. \quad (2)$$

معادله (۲) را به شکل ماتریسی نیز می‌توان نوشت:

$$\bar{X}(t+1) = (I_{N-1} + \varepsilon S_W) \bar{f}[x(t)], \quad (3)$$

که در این رابطه

$$\bar{f}[x(t)] = \{f_1[x_2(t)], \dots, f_{N-1}[x_N(t)]\} = \{f[x_2(t)] - f[x_1(t)], \dots, f[x_N(t)] - f[x_1(t)]\}^T$$

$$\bar{X}(t) = \{X_{12}(t), X_{13}(t), \dots, X_{1N}(t)\}^T,$$

$$S_W = \begin{pmatrix} -(w_{12} + \sum_{j \neq 2} w_{2j}) & w_{23} - w_{13} & \dots & w_{2N} - w_{1N} \\ w_{32} - w_{12} & -(w_{13} + \sum_{j \neq 3} w_{3j}) & \dots & w_{3N} - w_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N2} - w_{12} & w_{N3} - w_{13} & \dots & -(w_{1N} + \sum_{j \neq N} w_{Nj}) \end{pmatrix}$$

و برای به دست آوردن شرط همگام‌سازی موضعی، اختلال کوچکی از خمینه همگام‌سازی،  $\bar{X}(t) \rightarrow \bar{X}(t) + \bar{\eta}(t)$ ، در نظر می‌گیریم و دینامیک آن را با خطی کردن معادله (۳) حول خمینه همگام،  $x_1(t)$ ، به دست می‌آوریم:

$$\bar{\eta}(t+1) = f'[x(t)](I_{N-1} - \varepsilon S_W) \bar{\eta}(t). \quad (4)$$

اگر با استفاده از ماتریس مربعی دلخواه  $M$ ، تابع

جفت شده جواب همگام می‌دهد. برای دستگاه‌های دینامیکی آشوبناک، دو نوع همگام‌سازی موضعی<sup>۱</sup> و سرتاسری<sup>۲</sup> مطرح می‌شود که روش سنجه ماتریسی می‌تواند برای پیش‌بینی پایداری همگام‌سازی در هر دو نوع آن معیار ارائه کند. برتری دیگر این روش این است که برای بررسی پایداری حالت همگام، به دانستن جواب همگام نیازی ندارد [۲۰-۲۲].

برای شبکه‌های پیچیده، توپولوژی‌های مختلفی وجود دارد [۲۳ و ۲] که شبکه‌های منظم<sup>۳</sup> [۲]، جهان کوچک<sup>۴</sup> [۲۵، ۲۴، ۲]، تصادفی<sup>۵</sup> [۲۶، ۲] و بی مقیاس<sup>۶</sup> [۲۷ و ۲] از رایج‌ترین آنهاست. بررسی ارتباط میان پارامترهای شبکه مانند توزیع درجات رأس‌ها، اندازه شبکه، احتمال بازآرایی، و توپولوژی بر پایداری حالت همگام، از مهم‌ترین مسائل مربوط به موضوع همگام‌سازی است. در این مطالعه خواهیم دید، پارامترهای شبکه و نوع توپولوژی شبکه چگونه بر پایداری همگام‌سازی اثر می‌گذارند.

در بخش ۲ روش سنجه ماتریسی برای نگاشت‌های آشوبناک<sup>۷</sup> را به اختصار بیان می‌کنیم. در بخش ۳ این معیار را برای شبکه‌های مختلف به کار می‌بریم و تأثیر پارامترها و توپولوژی شبکه را بر همگام‌سازی تحقیق می‌کنیم. در بخش ۴ نیز تابع خطا<sup>۸</sup> را به عنوان معیار ساده‌ای برای سنجش نتایج سنجه ماتریسی معرفی خواهیم کرد.

## ۲. سنجه ماتریسی

سنجه ماتریسی روشی اساسی برای مطالعه پایداری همگام‌سازی‌های موضعی و سرتاسری در شبکه‌های نگاشت‌های آشوبناک است. این روش برای هر شبکه‌ای با هر

۱. Local

۲. Global

۳. Regular

۴. Small world

۵. Random

۶. Scale free

۷. Chaotic maps

۸. Error function

### ۳. بررسی پایداری همگام‌سازی با استفاده از روش

#### سنجه ماتریسی

در این جا روش سنجه ماتریسی را برای حالت‌های مختلفی از شبکه‌های منظم، جهان کوچک، تصادفی و بی‌مقیاس به کار می‌بریم و آن را به شکل تابعی از پارامتر جفت‌شدگی رسم می‌کنیم. ابتدا به بررسی نقش پارامترهای شبکه از جمله توزیع درجات رأس‌ها و اندازه شبکه در هر نوع توپولوژی می‌پردازیم. سپس اندازه شبکه و تعداد کل یال‌ها را ثابت نگه داشته، و اثر توپولوژی را در پایداری حالت همگام بررسی می‌کنیم.

همه شبکه‌های مورد بررسی در این مقاله متقارن هستند و برای شبکه‌های متقارن داریم  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_\infty$  [۲۸]، به همین دلیل ما تنها  $\mu = \mu_1$  را در نمودارها ترسیم می‌کنیم؛ زیرا همان طور که اشاره شد، سنجه ماتریسی شرط کافی برای پایداری همگام‌سازی را ارائه می‌دهد و کفایت کوچک‌ترین سنجه ماتریسی از مقدار آستانه کوچک‌تر باشد تا همگام‌سازی رخ دهد. در ادامه مطالب، عبارت «بازه پایداری شدت جفت‌شدگی» یا «بازه پایداری»، را برای نشان دادن بازه‌هایی از شدت جفت‌شدگی به کار می‌بریم که به ازای آن‌ها حالت همگام پایدار خواهیم داشت. این بازه‌ها با علامت  $\Delta \mathcal{E}_s$  نشان داده شده‌اند.

#### ۳.۱. شبکه‌های منظم

در یک شبکه منظم، همه رأس‌ها هم درجه‌اند، بنابراین درجه هر رأس با میانگین درجات رأس‌ها برابر است،  $\langle k \rangle = k$  [۲]. در شکل ۱ سنجه ماتریسی بر حسب شدت جفت‌شدگی برای شبکه‌های منظمی با اندازه یکسان و تعداد درجات مختلف رسم شده است. این نمودار نشان می‌دهد: برای نگاشت‌های آشوبناک با  $\Lambda > 1$ ، بازه‌های پایداری شدت جفت‌شدگی از  $\mathcal{E} = 0$  آغاز می‌شود، در حالی که نگاشت‌های  $\Lambda < 1$  تنها حول  $\mathcal{E} = 1/N$  می‌توانند همگام‌سازی پایدار داشته باشند. همچنین برای نگاشت‌های  $\Lambda > 1$ ، همواره بازه پایداری وجود دارد، در صورتی که برای نگاشت‌های  $\Lambda < 1$ ، هر چه آستانه کوچک‌تر و به مقدار صفر نزدیک‌تر باشد، تعداد درجات رأس‌ها باید بیشتر باشد تا بتواند حالت همگام را به پایداری برساند. یک نکته

نامنفی  $V(t) = \bar{\eta}^T(t) M^T M \bar{\eta}(t)$  را تشکیل دهیم و ماتریس  $U$  را به شکل

$$U = M^{-T} (I + \varepsilon S_W) M^T M (I + \varepsilon S_W) M^{-1}$$

تعریف کنیم، خواهیم دید:

$$V(t) \leq f'[x(t-1)]^\top \mu_\alpha(U) V(t-1), \quad (5)$$

که در این نامساوی  $\mu_\alpha(U)$  و  $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$  سنجه‌های ماتریس  $U$  هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند [۲۸]:

$$\mu_1(B) = \max_j \{ \operatorname{Re}(b_{jj}) + \sum_{i=1, i \neq j}^N |b_{ij}| \},$$

$$\mu_2(B) = \frac{1}{2} \nu_{\max}(B^H + B),$$

$$\mu_\infty(B) = \max_i \{ \operatorname{Re}(b_{ii}) + \sum_{j=1, j \neq i}^N |b_{ij}| \}.$$

در این نمادگذاری،  $\nu_{\max}(\cdot)$  بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار ماتریس  $U^H$  و  $U$  ترانپوز مختلط ماتریس  $U$  هستند. پس به آسانی می‌توان شرط کافی را برای پایداری همگام‌سازی موضعی به دست آورد [۲۲]:

$$\mu_\alpha(U) \leq e^{-2\lambda_f}, \quad (6)$$

که در آن  $\lambda_f$  نمای لیاپانف تابع  $f$  است. اما اگر تابع نامنفی  $V(t)$  را به شکل

$$V(t) = \bar{X}^T(t) M^T M \bar{X}(t),$$

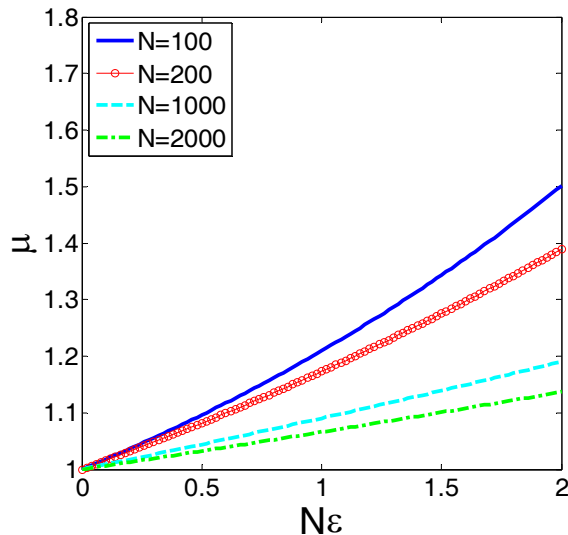
تعریف کنیم، با استفاده از نامساوی

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup |f'| |x - y|$$

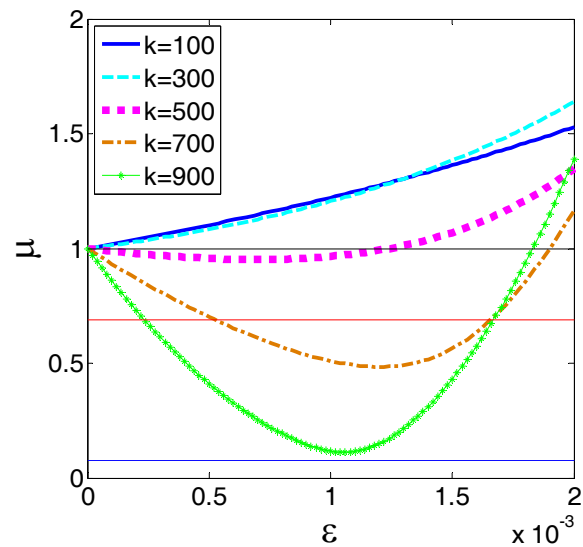
به شرط کافی برای پایداری همگام‌سازی سرتاسری دست می‌یابیم:

$$\mu_\alpha(U) \leq \frac{1}{\sup |f'|}. \quad (7)$$

طرف راست معادلات (۶) و (۷) آستانه همگام‌سازی نامیده می‌شوند که در ادامه این مطالعه با نماد  $\Lambda$  نشان داده شده‌اند. حالت همگام به ازای مقادیری از شدت جفت‌شدگی رخ می‌دهد که آستانه همگام‌سازی حداقل از یکی از سنجه‌های ماتریسی مقدار بزرگ‌تری داشته باشد.



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر اندازه شبکه بر سنجه ماتریسی برای شبکه‌های منظم با  $k=10$ .



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر تعداد درجات رأس‌ها بر سنجه ماتریسی برای شبکه‌های منظم با اندازه  $N=1000$ .

### ۲.۳. شبکه‌های جهان کوچک

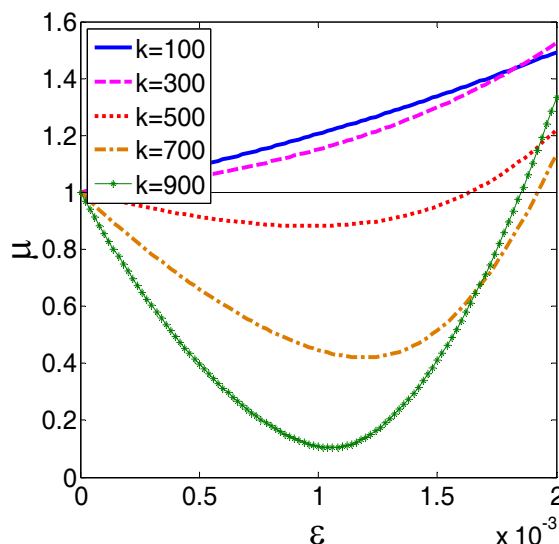
شبکه جهان کوچک شبکه‌ای است که طول کوتاه‌ترین مسیر آن کم و ضریب خوشگی آن بزرگ باشد [۲]. برای ساخت یک شبکه جهان کوچک مدل‌های مختلفی ارائه شده است که از میان آن‌ها مدل‌های واتس-استروگتس<sup>۱</sup> و نیومن-واتس<sup>۲</sup> مشهورترند [۲۵، ۲۴]. در این جا از مدل واتس-استروگتس استفاده، و سنجه ماتریسی بر حسب شدت جفت‌شدگی برای شبکه‌هایی با میانگین درجات رأس‌ها و اندازه‌های مختلفی از شبکه‌های جهان کوچک محاسبه، و مشاهده شد نتایج به دست آمده دقیقاً با نتایج حاصل از شبکه‌های منظم منطبق است (شکل‌های ۴ و ۵). در شکل ۶ اندازه و میانگین درجات یک شبکه جهان کوچک را ثابت نگه داشته و مقدار پارامتر بازآرایی را تغییر دادیم. در این شکل می‌بینیم، افزایش احتمال بازآرایی موجب افزایش بازه پایداری می‌شود. مشاهدات ما نشان می‌دهد، در شبکه‌های بزرگ نقش این پارامتر به طور چشم‌گیری کم‌رنگ می‌شود.

دیگر در این نمودار افزایش اندازه بازه پایداری با افزایش مقدار آستانه است.

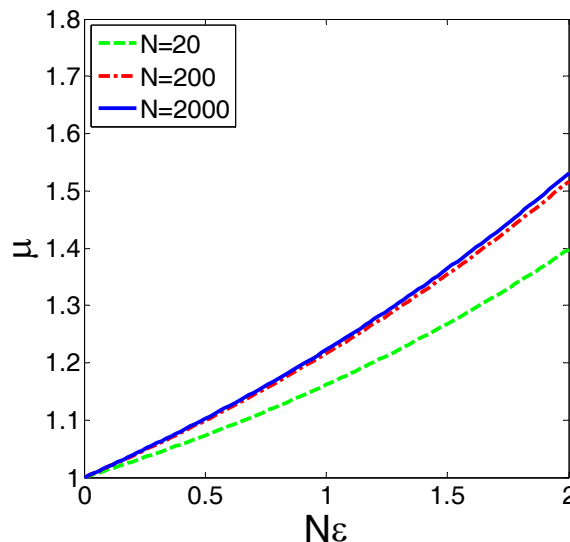
شکل ۲ سنجه ماتریسی را بر حسب شدت جفت‌شدگی برای شبکه‌های منظمی با اندازه (تعداد رأس‌ها)  $k$  یکسان و تعداد درجات مختلف نشان می‌دهد. مقایسه نتایج آن نشان می‌دهد: برای نگاشت‌های با  $\Lambda > 1$  همیشه بازه پایداری وجود دارد که از  $\varepsilon = 0$  آغاز می‌شود و با افزایش اندازه شبکه به ازای یک مقدار آستانه مشخص،  $\Delta\varepsilon_s$  کاهش اما  $N\Delta\varepsilon_s$  افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌کنیم در یک شبکه مشخص هر چه مقدار آستانه نگاشت بزرگ‌تر باشد، بازه پایداری بزرگ‌تر است. در شکل ۳ مقادیر  $k$  و  $N$  را به گونه‌ای تغییر داده‌ایم که نسبت  $k$  به  $N$  ثابت باقی بماند. مشاهده می‌شود: برای همه نگاشت‌های با  $\Lambda > 1$  بازه پایداری وجود دارد که همیشه از  $\varepsilon = 0$  شروع می‌شود و نه تنها برای نگاشت‌های  $\Lambda > 1$  بلکه برای نگاشت‌های  $\Lambda < 1$  نیز بازه پایداری با افزایش مقدار آستانه، افزایش می‌یابد. به علاوه افزایش اندازه شبکه،  $\Delta\varepsilon_s$  را کاهش می‌دهد. همچنین می‌بینیم که در شبکه‌های بزرگ، اندازه شبکه تأثیری در میزان  $N\Delta\varepsilon_s$  ندارد، در صورتی که برای شبکه‌های کوچک با افزایش اندازه شبکه به ازای یک مقدار آستانه مشخص و  $k/N$  ثابت،  $N\Delta\varepsilon_s$  کاهش می‌یابد (اثر تنهایی اندازه شبکه).

۱. Watts- Strogatz

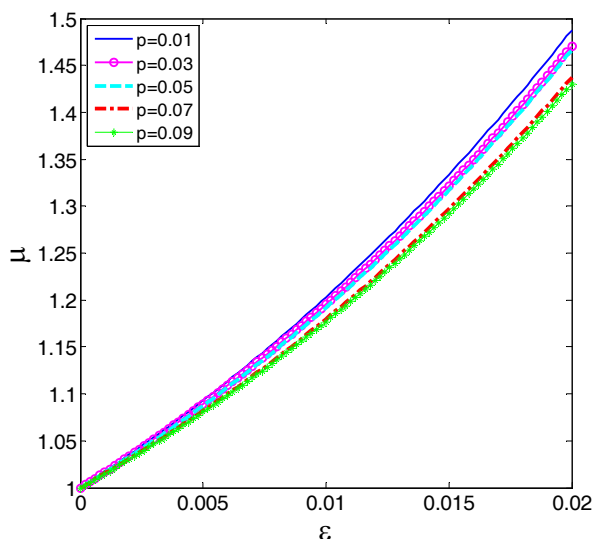
۲. Newman- Watts



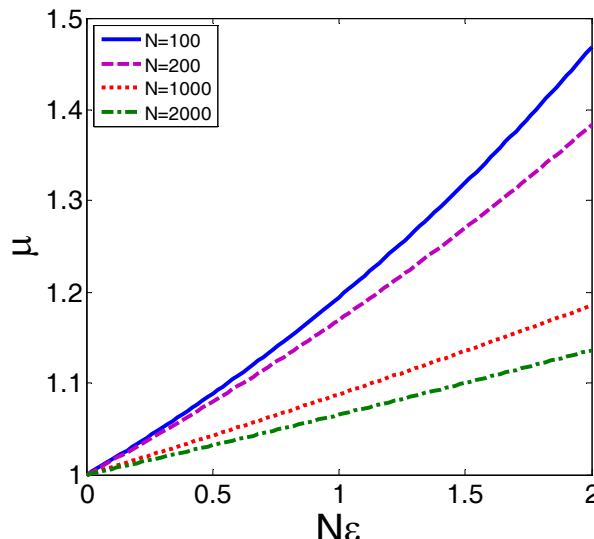
شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر تعداد درجات رأس‌ها بر سنجۀ ماتریسی برای شبکه‌های جهان کوچک با  $N = 1000$  و  $p = 0.03$ .



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر اندازه شبکه بر سنجۀ ماتریسی برای شبکه‌های منظم با  $k/N = 0.1$ .



شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر احتمال بازآرایی بر سنجۀ ماتریسی برای شبکه‌های جهان کوچک با  $\langle k \rangle = 10$  و  $N = 100$ .



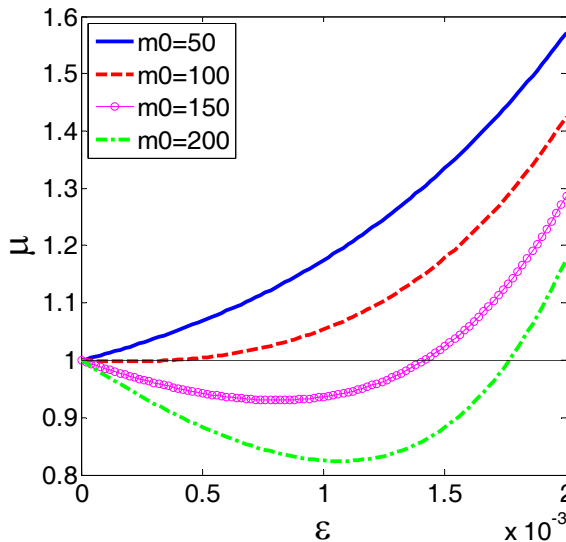
شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر اندازه شبکه بر سنجۀ ماتریسی برای شبکه‌های جهان کوچک با  $\langle k \rangle = 10$  و  $p = 0.03$ .

### ۳.۳. شبکه‌های تصادفی

یک شبکه تصادفی با ایجاد یال‌های تصادفی بین رأس‌های منزوی ساخته می‌شود. در این جا برای ساخت شبکه‌های تصادفی از مدل اردوش-رنی<sup>۱</sup> استفاده، و پارامتر احتمال مربوط به آنها با حرف  $p$  نشان داده شده است [۲، ۲۶].

ماتریسی مربوط به شبکه‌هایی با اندازه یکسان و مقادیر پارامتر احتمال متفاوت در شکل ۷ ترسیم شده است. این شکل نشان می‌دهد که برای نگاشت‌های با  $\Lambda > 1$  در هر شبکه تصادفی با هر مقدار  $p$ ، یک بازۀ پایداری وجود دارد، در حالی که برای نگاشت‌های با  $\Lambda < 1$ ، هر چه  $\Lambda$  کوچک‌تر باشد، مقدار پارامتر احتمال باید بزرگ‌تر باشد تا بتواند بازۀ پایداری داشته

۱. Erdos-Renyi

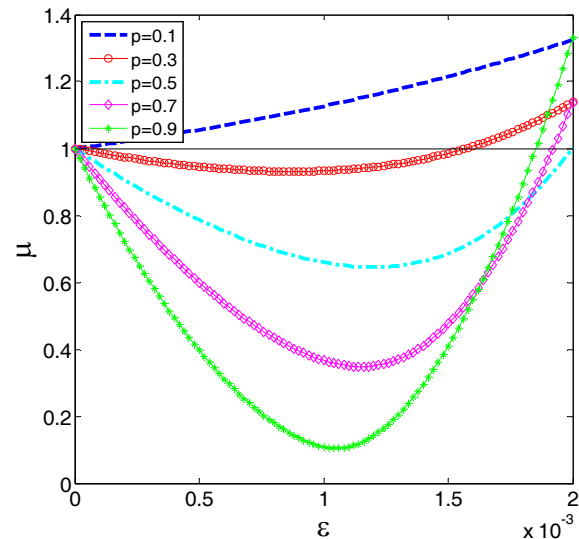


شکل ۸. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر اندازه هسته اولیه بر سنجه ماتریسی شبکه‌های بی‌مقیاسی با  $m = m_0$  و  $k^0 = m_0 - 1$  و  $N = 1000$ .

است. بر طبق این نمودار، به ازای همه مقادیر  $m_0$ ، بازه‌های پایداری نگاشت‌های  $\Lambda > 1$  از مقدار  $\varepsilon = 0$  شروع می‌شود، اما  $\Delta\varepsilon_s$  نگاشت‌های  $\Lambda < 1$ ، در صورت وجود، بازه‌ای حول مقدار  $\varepsilon = 1/N$  است. با این حال، در هر دو نوع نگاشت، با افزایش مقدار آستانه، بازه پایداری بزرگ‌تر می‌شود. نکته دیگر این است که امکان پایداری حالت همگام برای نگاشت‌های با  $\Lambda > 1$ ، به ازای تمامی مقادیر اندازه هسته اولیه وجود دارد، در صورتی که برای نگاشت‌های  $\Lambda < 1$ ، هر چه مقدار  $\Lambda$  کوچک‌تر باشد، اندازه هسته اولیه باید بزرگ‌تر باشد تا بتواند بازه پایداری ایجاد کند.

سنجه‌های ماتریسی شبکه‌های بی‌مقیاسی با  $m$ ‌های مختلف که در شکل ۹ رسم شده‌اند، نشان می‌دهند: به ازای هر مقدار  $m$ ، هر چه مقدار  $\Lambda$  بزرگ‌تر باشد، بازه پایداری بزرگ‌تر است. همچنین مشاهده می‌شود، در حالی که نگاشت‌های  $\Lambda > 1$  به ازای هر مقدار  $m$ ،  $\Delta\varepsilon_s$  دارند که در همه آنها ابتدای این بازه  $\varepsilon = 0$  است، نگاشت‌های  $\Lambda < 1$  فقط در شبکه‌هایی به همگامی می‌رسند که مقدار  $m$  به اندازه کافی بزرگ باشد و بازه پایداری آن‌ها جایی در نزدیکی  $\varepsilon = 1/N$  واقع می‌شود.

اندازه تعدادی شبکه بی‌مقیاس را در شکل ۱۰ تغییر داده، اما



شکل ۹. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر پارامتر احتمال بر سنجه ماتریسی برای شبکه‌های تصادفی با  $N = 1000$ .

باشد. علاوه بر این، برای نگاشت‌های با  $\Lambda > 1$ ،  $\Delta\varepsilon_s$  همواره از  $\varepsilon = 0$  شروع می‌شود، در حالی که برای نگاشت‌های  $\Lambda < 1$ ،  $\Delta\varepsilon_s$  در صورت وجود، حول مقدار  $\varepsilon = 1/N$  است.

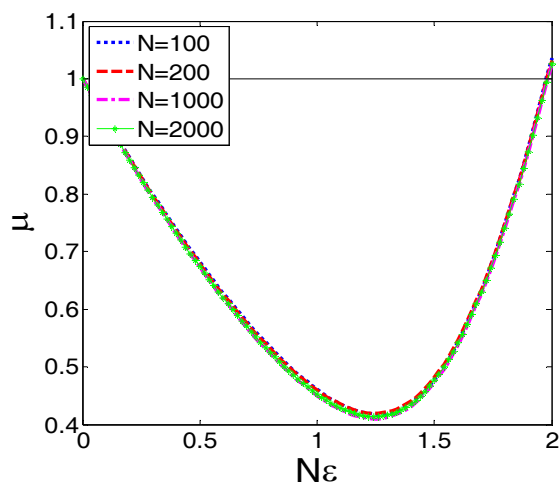
ما سنجه ماتریسی را برای شبکه‌های تصادفی با  $p$  ثابت و  $N$  متفاوت نیز ترسیم کرده، و مشاهده کردیم هر چه  $N$  بزرگ‌تر شود،  $\Delta\varepsilon_s$  کوچک‌تر اما  $N\Delta\varepsilon_s$  بزرگ‌تر می‌شود. با این حال هر چه شبکه بزرگ‌تر باشد، نقش  $N$  بر تغییر  $\Delta\varepsilon_s$  کم‌تر است.

### ۴.۳. شبکه‌های بی‌مقیاس

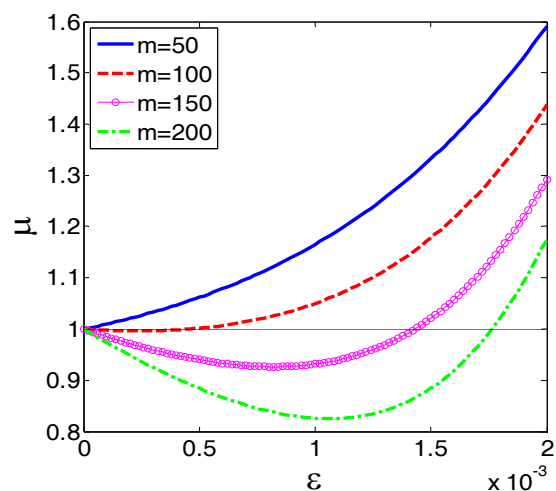
شبکه بی‌مقیاس شبکه‌ای است که توزیع درجات آن از یک رابطه توانی پیروی می‌کند. در این مقاله، مدل باراباسی-آلبرت<sup>۱</sup> برای ساخت شبکه‌های بی‌مقیاس به کار برده شده است [۲۷، ۲]. یک شبکه منظم اولیه با تعداد  $m_0$  رأس و  $k^0$  درجه، و تعداد رأس‌هایی که در هر مرحله اضافه می‌شود،  $m$  و  $m \leq m_0$ ، پارامترهای مورد نیاز برای ایجاد یک شبکه بی‌مقیاس باراباسی-آلبرت هستند.

در شکل ۸ سنجه‌های ماتریسی مربوط به شبکه‌های بی‌مقیاسی با اندازه‌های مختلف هسته اولیه نمایش داده شده

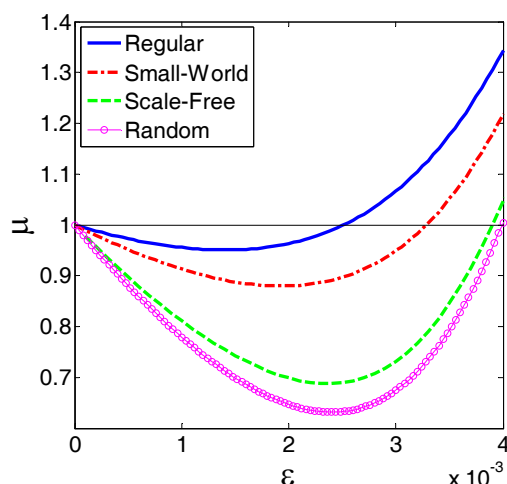
۱. Barabasi- Albert



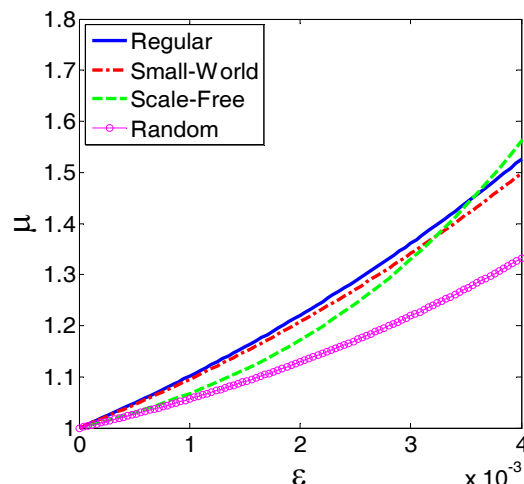
شکل ۱۰. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر اندازه شبکه بر سنج‌ ماتریسی شبکه‌های بی‌مقیاسی با  $m^0/N = 0.4$  و  $m^0 = m^*$  و  $k^0 = -1$ .



شکل ۹. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر تعداد یال‌های اضافه شده در هر مرحله بر سنج‌ ماتریسی شبکه‌های بی‌مقیاسی با  $m^0 = 200$  و  $k^0 = m^0 - 1 = 199$ ،  $N = 1000$ .



شکل ۱۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر توپولوژی بر سنج‌ ماتریسی برای شبکه‌هایی با  $N = 500$  و  $\langle k \rangle = 250$ .



شکل ۱۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر توپولوژی بر سنج‌ ماتریسی برای شبکه‌هایی با  $N = 500$  و  $\langle k \rangle = 50$ .

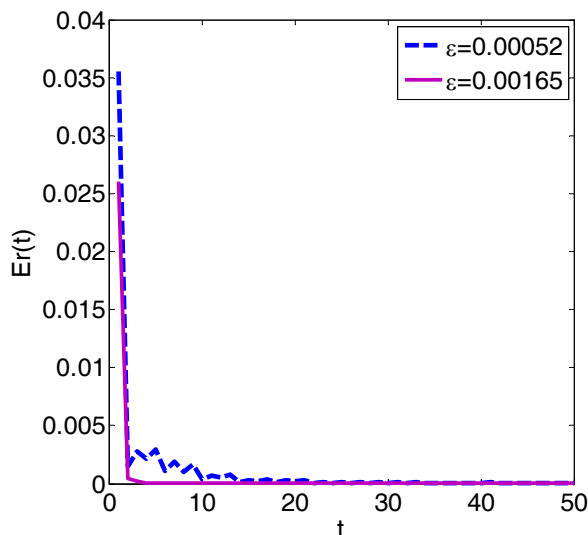
با تغییر توپولوژی شبکه می‌توان حالت همگام یک دستگاه را به پایداری رسانید. برای بررسی این مسئله، اندازه شبکه و تعداد کل یال‌های شبکه را ثابت نگه می‌داریم و سنج‌ ماتریسی را برای شبکه‌های با توپولوژی‌های مختلف به دست می‌آوریم. سنج‌ ماتریسی شبکه‌های با توپولوژی‌های مختلف به ازای  $N = 500$  و  $\langle k \rangle = 50$  در شکل ۱۱ رسم شده است. این نمودار نشان می‌دهد: در شبکه‌های تُنک<sup>۱</sup>، شبکه‌ای که

نسبت  $m^0/N$  را ثابت نگه داشته‌ایم تا نقش اندازه شبکه را در پایداری حالت همگام شبکه‌های بی‌مقیاس بررسی کنیم. این نمودار نشان می‌دهد، افزایش اندازه شبکه در حالی که  $m^0/N$  ثابت است،  $\Delta \varepsilon_s$  را به ازای یک آستانه مشخص طوری تغییر می‌دهد، که  $N \Delta \varepsilon_s$  ثابت می‌ماند.

### ۵.۳. مقایسه توپولوژی‌های مختلف شبکه

روش سنج‌ ماتریسی این امکان را فراهم می‌کند که بدانیم آیا

۱. Sparse



شکل ۱۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع خطا برای نگاشت آشوبناک لوجیستیک با  $r=3.6$  در شبکه منظمی با  $N=1000$  و  $k=700$  به ازای شدت جفت‌شدگی‌های  $\varepsilon=0.00052$  و  $\varepsilon=0.00165$ .

می‌پردازد. برای ارزیابی درستی پیش‌بینی رفتار دستگاه، می‌توان از پارامترهای نظم استفاده کرد [۲۹]. اما ساده‌ترین راه برای تشخیص درستی پیش‌بینی رفتار نگاشت‌ها در یک دستگاه مشخص، استفاده از تابع خطاست که رابطه آن عبارت است از:

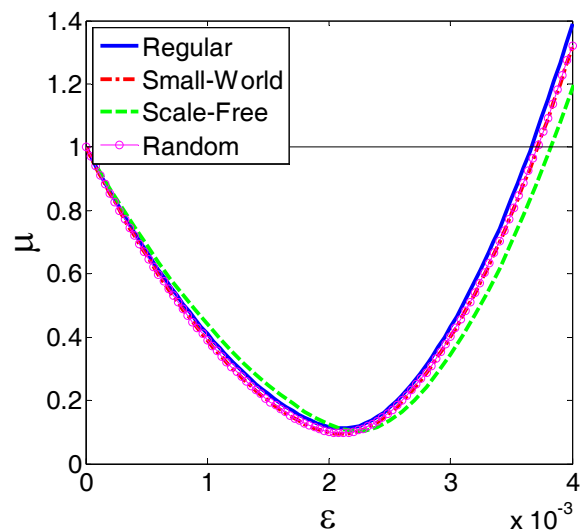
$$Er(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |X_{1j}(t)|. \quad (8)$$

اگر مقدار تابع خطا با گذشت زمان به صفر میل کند، بدین معنی است که حالت همگام پایدار باقی می‌ماند.

در این جا صحت پیش‌بینی روش سنجه ماتریسی را برای مثالی از یک نگاشت لوجیستیک بررسی می‌کنیم. نگاشت لوجیستیک که برای توصیف تحول جمعیت گونه‌های مختلف جانوری در طول زمان استفاده می‌شود، از دینامیک زیر پیروی می‌کند [۲۹]:

$$x(t+1) = rx(t)(1-x(t)), \quad (9)$$

که  $x(t) \in [0, 1]$  جمعیت گونه و  $r \in [4, 0]$  نرخ رشد را مشخص می‌کنند. اگر نرخ رشد را  $r=3.6$  در نظر بگیریم، با توجه به معادلات (۶) و (۷)، برای همگام‌سازی موضعی مقدار آستانه  $0.69$  و برای همگام‌سازی سرتاسری مقدار  $0.77$  به



شکل ۱۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تأثیر توپولوژی بر سنجه ماتریسی برای شبکه‌هایی با  $N=500$  و  $\langle k \rangle = 450$ .

بزرگ‌ترین بازه پایداری را فراهم می‌کند، به مقدار  $\Lambda$  بستگی دارد؛ با این حال، به ازای تمام مقادیر  $\Lambda$ ، شبکه جهان کوچک نسبت به شبکه منظم، و شبکه تصادفی نسبت به شبکه‌های منظم و جهان کوچک بازه پایداری بزرگ‌تری دارند.

در شکل ۱۲ که سنجه ماتریسی شبکه‌های با توپولوژی‌های مختلف به ازای  $N=500$  و  $\langle k \rangle = 250$  نمایش داده شده است، می‌بینیم که وقتی مقدار  $\langle k \rangle / N$  به اندازه کافی بزرگ باشد، بزرگ‌ترین بازه پایداری به شبکه تصادفی تعلق دارد، با این حال در برخی از موارد بزرگ‌ترین بازه پایداری در شبکه بی‌مقیاس مشاهده شده است.

اگر چه ساختار شبکه‌های با توپولوژی‌های مختلف به ازای مقادیر  $N=500$  و  $\langle k \rangle = 450$  به یکدیگر شبیه‌اند، اما شکل ۱۳ نشان می‌دهد، شبکه بی‌مقیاس بازه پایداری را به ازای مقادیر کوچک آستانه، جا به جا می‌کند.

#### ۴. تابع خطا

روش سنجه ماتریسی تنها به پیش‌بینی پایداری یا ناپایداری حالت همگام در شبکه‌ای از دستگاه‌های دینامیکی جفت‌شده



رفتارهای متفاوتی در پایداری حالت همگام از خود نشان می‌دهند: نگاشت‌های با  $\Lambda > 1$  در همه شبکه‌ها دارای بازه پایداری هستند، اما نگاشت‌های با  $\Lambda < 1$  تنها در شبکه‌های متراکم همگام می‌شوند. بنابراین تعداد یال‌های شبکه یکی از مهمترین پارامترها در پایداری همگام‌سازی در دستگاه‌های با نگاشت  $\Lambda < 1$  است. علاوه بر این مشاهده می‌کنیم هر چه مقدار آستانه بزرگ‌تر باشد، اندازه بازه پایداری بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر در یک شبکه مشخص می‌توان با تغییر نگاشت‌ها که رأس‌های شبکه را تشکیل می‌دهند، مقدار آستانه را تغییر داد و حالت همگام را در دستگاه به پایداری رسانید.

اگر چه بازه پایداری نگاشت‌های با  $\Lambda > 1$  همواره از  $\varepsilon = 0$  شروع و در یک  $\varepsilon_{\text{Max}} = \Delta \varepsilon_s$  خاتمه می‌یابد و بازه پایداری نگاشت‌های  $\Lambda < 1$ ، در صورت وجود، حول مقدار  $\varepsilon = 1/N$  واقع می‌شود، مقدار و اندازه بازه‌های پایداری برای هر دو نوع آن‌ها از مرتبه  $1/N$  است. بنابر این با افزایش تعداد نگاشت‌ها، همگامی به ازای مقدار و اندازه بازه کوچکتری از شدت جفت‌شدگی پایدار می‌ماند؛ پس همیشه افزایش شدت جفت‌شدگی پایداری حالت همگام را به دنبال ندارد و در شبکه‌های بزرگ‌تر برهم‌کنش‌های ضعیف‌تر هستند که به همگام‌سازی می‌انجامند.

توپولوژی شبکه، عامل دیگری است که بر پایداری حالت همگام اثر می‌گذارد؛ نتایج ما تصدیق می‌کند که شبکه‌های تصادفی و بی‌مقیاس برای کسب بازه‌های پایداری بزرگ‌تر مستعدترند. همچنین با ساخت شبکه‌های متراکم به روش بی‌مقیاس، می‌توان بازه‌های پایداری را جابه‌جا، و امکان پایداری حالت همگام را برای مقادیر بزرگتری از شدت جفت‌شدگی فراهم کرد.

### قدردانی

از جناب آقای میلاد یوسف‌پور که در محاسبه داده‌ها با ما همکاری نمودند، تشکر می‌نمایم.

دست می‌آید. مقایسه این مقادیر با نتایج سنجه‌های ماتریسی شبکه‌ها به ما می‌گوید بازه پایداری شدت جفت‌شدگی این نگاشت در هر شبکه چقدر است. برای مثال مطابق با شکل ۱، این نگاشت در یک شبکه منظم با  $N = 1000$  و  $k = 700$  به ازای شدت جفت‌شدگی‌هایی که در بازه  $[0.00052, 0.00165]$  قرار می‌گیرند، همگام‌سازی موضعی پایدار دارد؛ اما همگام‌سازی سرتاسری پایداری برای آن پیش‌بینی نمی‌شود. شکل ۱۴ نمونه‌ای از رفتار تابع خطا را برای شبکه منظمی از ۱۰۰۰ نگاشت لجیستیک با ۷۰۰ همسایه، به ازای مقادیر مرزی بازه پایداری معرفی شده توسط روش سنجه ماتریسی نشان می‌دهد.

شکل ۱۴ به ما می‌گوید، روش سنجه ماتریسی رفتار دستگاه را به درستی پیش‌بینی کرده است. یاد آور می‌شویم چون روش سنجه ماتریسی از شرط کافی استفاده می‌کند، امکان پایداری همگام‌سازی برای مقادیر شدت جفت‌شدگی خارج از بازه پایداری نیز وجود دارد.

### ۵. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، سنجه ماتریسی را به عنوان روشی برای بررسی پایداری حالت همگام در شبکه‌هایی از نگاشت‌های آشوبناک بازبینی کردیم. این روش به دلیل مزیت‌های کاربردهای فراوانی دارد، از جمله این که می‌تواند برای بررسی پایداری هر دو نوع همگام‌سازی موضعی و سرتاسری معیارهایی معرفی کند؛ به جواب حالت همگام نیاز ندارد، و برای شبکه‌هایی با هر نوع ماتریس جفت‌شدگی قابل استفاده است. با این حال این روش فقط به حالت‌هایی محدود می‌شود که تابع جفت‌شدگی با تابع نگاشت منزوی یکسان باشد.

سنجه ماتریسی را برای شبکه‌های منظم، جهان کوچک، تصادفی و بی‌مقیاس به کار بردیم تا دریابیم تحت چه شرایطی می‌توانیم دستگاه‌هایی با بازه‌های پایداری بزرگتری از شدت جفت‌شدگی بسازیم. محاسبات عددی ما نشان می‌دهد در همه این شبکه‌ها، نگاشت‌های با  $\Lambda > 1$  و  $\Lambda < 1$

## مراجع

14. X F Wang and G Chen, *IEEE Trans. Circuits Syst., I: Fundam. Theory Appl.* **49** (2002) 54.
15. V N Belykh, I V Belykh, and M Hasler, *Phys. D* **195** (2004) 188.
16. R E Amritkar, S Jalan, and C K Hu, *Phys. Rev. E* **72** (2005) 016212.
17. R He and P G Vaidya, *Phys. Rev. E* **57** (1998) 1532.
18. W L Lu and T P Chen, *Phys. D* **198** (2004) 148.
19. W He and J Cao, *Chaos* **19** (2009) 013118.
20. M Chen, *IEEE Trans. Circuits Syst., II: Analog Digital Signal Process* **53** (2006) 1185.
21. M Chen, *Phys. Rev. E* **76** (2007) 016104.
22. P Li, M Chen, Y Wu, and J Kurths, *Phys. Rev. E* **79** (2009) 067102.
23. S H Strogatz, *Nature* **410** (2001) 268.
24. D J Watts, S H Strogatz, *Nature*. **393** (1998) 440.
25. M E J Newman, D J Watts, *Phys. Lett. A* **263** (1999) 341.
26. P Erdos and A Renyi, *Publ. Math. Debrecen.* **6** (1959) 290.
27. A L Barabasi and R Albert, *Science* 286 (1999) 509.
28. R A Horn and C R Johnson, “*Matrix Analysis*”, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
29. S C Mandrubia, A S Mikhailov, and D H Zanette, “*Emergence of Dynamical Order*”, World Scientific (2004).
1. R Albert and A L Barabasi, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 47.
2. S Boccaletti, V Latora, Y Moreno, M Chavez, and D U Hwang, *Phys. Rep.* **424** (2006) 175.
3. A Pikovsky, M Roseblum, and J Kurths, “*Synchronization*”, Cambridge University Press, Cambridge, England (2001).
4. S H Strogatz, “*Sync: How Order Emerges From Chaos In the Universe, Nature, and Daily Life*”, Hyperion, New York (2003).
5. X Li, Y Y Jin and G chen, *Phys. A* **328** (2003) 387.
6. S H Strogatz and I Stewart, *American Scientific.* **269** (1993) 102.
7. I Kanter, W Kinzel, and E Kanter, *Europhys. Lett.* **57** (2002) 141.
8. G Chen, J Zhou and Z Liu, *Int. J. Bifurcation Chaos.* **14** (2004) 2229.
9. J Cao, P Li, and W Wang, *Phys. Lett. A* **353** (2006) 318.
10. k Wang, Z Teng, H Jiang, *Phys. A* **387** (2008) 631.
11. J H Park and O M Kwon, *Mod. Phys. Lett. B* **23** (2009) 1743.
12. C J Cheng, T L Liao, J J Yan, and C C Hwang, *Phys. Lett. A* **338** (2005) 28.
13. L M Pecora and T L Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2109.