

الکترواستاتیک در فضا زمانهای کرمچاله‌ای

بهرام نصر اصفهانی

گروه فیزیک دانشگاه کاشان

e-mail: nasr@kashanu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۰/۹/۲۱ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۱/۲۶)

چکیده

با در نظر گرفتن حالت ایستای معادلات ماکسول در یک هندسه پس زمینه کرمچاله‌ای، شکل تعمیم یافته معادله لاپلاس برای پتانسیل الکترواستاتیکی به دست آمده است. به دلیل هندسه خاص گلوگاه، خطوط میدان از یک سو همگرا و از سوی دیگر واگرا می شوند. از این رو، برای ناظر دور، کرمچاله به مانند یک توزیع بار رفتار می کند و انتظار داریم که این رفتار پتانسیل را به طرز محسوسی در اطراف گلوگاه اصلاح کند. با یافتن پاسخهای دقیق پتانسیل در حالت‌های در نظر گرفته شده و همچنین با در نظر گرفتن یک محیط دی‌الکتریک هم ارز و محاسبه بارهای قطبیده، این موضوع تحقیق شده است.

واژه‌های کلیدی: کرمچاله‌های گذرپذیر، معادلات ماکسول، شرایط مرزی، محیط دی‌الکتریک

۱. مقدمه

کرمچاله‌ها (در مقایسه با سیاهچاله‌ها) نداشتن افق است که عبور دو طرفه نور و ذرات مادی را از آنها امکان پذیر می سازد [۳]. کار موریس و تورن سرآغاز تحقیقات دامنه داری در مورد جنبه‌های مختلف کرمچاله‌ها شد که شاید جالبترین آنها امکان ساختن ماشین زمان باشد. چنانچه قوانین فیزیک اجازه دهند و تمدن پیشرفته‌ای بتواند کرمچاله‌ای گذر پذیر را در فضا بر پا کند، آنگاه می توان آن را به یک ماشین زمان برای سفر به گذشته تبدیل کرد [۲]. مرور کوتاهی بر برخی از دیگر جنبه‌های کرمچاله‌ها را می توان در مرجع شماره [۵] دید. در حال حاضر تعدادی از جوابهای کرمچاله‌ای ایستا و یا در حال تحول در چارچوب نظریه نسبیت عام و همین طور نظریه برانس دیکی پیدا شده اند [۶-۱۰]. یکی از مسایل بحث بر انگیز در مورد کرمچاله‌های گذرپذیر، مسئله نقض شرایط انرژی توسط ماده‌ای است که

کرمچاله‌ها فضا زمانهایی هستند با توپولوژی غیر بدیهی که می توانند دو ناحیه از یک فضا زمان را به هم وصل کنند یا پلهایی باشند بین فضا زمانهای متفاوت. تقریباً یک سال بعد از ارائه فرمولبندی نهایی نظریه نسبیت عام توسط آلبرت اینشتین، لودویگ فلام با مطالعه جواب شوارتزشیلد معادلات اینشتین که به تازگی ارائه شده بود اندیشه وجود جواب کرمچاله‌ای را بنا نهاد [۱]. این بدان معنی است که کرمچاله‌ها پیش از سیاهچاله‌ها معرفی شده اند. مفهوم کرمچاله‌ها بعداً توسط هرمان ویل در دهه ۱۹۲۰، اینشتین و ناتان روزن در دهه ۱۹۳۰ و جان ویلر در دهه ۱۹۵۰ مورد بررسی قرار گرفت و توسعه یافت [۲]. اما این موضوع علاقه زیادی را جلب نکرد تا اینکه در سال ۱۹۸۸ موریس و تورن در مقاله‌ای دسته جدیدی از کرمچاله‌ها را با عنوان کرمچاله‌های گذر پذیر معرفی کردند. ویژگی مهم این

است را تعیین خواهیم کرد. این بحثی است آموزنده که به طور بنیادی نقش یک هندسه پس زمینه کرمچاله ای را بر پدیده های الکترومغناطیسی نشان می دهد.

۲. معادلات ماکسول در یک میدان گرانشی

در یک میدان گرانشی و در غیاب چشمه های بار و جریان، معادلات ماکسول را می توان چنین نوشت

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \quad F^{*\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (1)$$

که در آن $F_{\mu\nu}$ مؤلفه های تانسور الکترومغناطیس است و $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. اکنون در یک دستگاه مختصات دکارتی مشخص با متریک $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ تعریف می کنیم $H^{\mu\nu} = \sqrt{-g} F^{\mu\nu}$. به سادگی می توان دید که بر حسب این تانسور جدید، معادلات ماکسول (۱) به شکل زیر در می آیند [۱۲]

$$H^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad H^{*\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (2)$$

توجه کنید که این معادلات به معادلات ماکسول در یک فضای تخت شباهت دارند. هندسه پس زمینه حذف نشده است، بلکه در روابط سازگاری $H^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$ نهفته است. دستگام مختصات مورد نظر را چنان بر می گزینیم که در آن بتوان مؤلفه های تانسور های پاد متقارن \mathbf{F} و \mathbf{H} را به شکل زیر بر حسب مؤلفه های بردار های \mathbf{E} ، \mathbf{D} ، \mathbf{B} و \mathbf{H} نوشت

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & \cdot & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & \cdot & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$H^{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & \cdot & H_3 & -H_2 \\ D_2 & -H_3 & \cdot & H_1 \\ D_3 & H_2 & -H_1 & \cdot \end{pmatrix},$$

با این انتخاب، معادلات ماکسول (۲) در حالت ایستا می شوند

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

همراه با روابط سازگاری

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k - (\mathbf{G} \times \mathbf{H})_i, \quad (5)$$

و

آنها را ایجاد کرده است [۳]. برای ماده نقض کننده شرایط انرژی تنش از چگالی جرم-انرژی بزرگتر است و بنابراین می توان اثبات کرد که ناظر هایی وجود دارند که چگالی جرم-انرژی را منفی اندازه می گیرند [۹ و ۵]. از این رو این یک ماده نامتعارف است. میدانهای کوانتومی می توانند شرایط انرژی را نقض کنند و بنا بر این به وجود آمدن کرمچاله ها در لحظه های آغازین جهان ممکن بوده است. مسئله نقض شرایط انرژی، برای کرمچاله های گذریز ایستا و همین طور وابسته به زمان به طور مفصل بررسی شده است [۱۱]. بررسیها نشان می دهند که فقط برای کرمچاله های ایستا ماده به طور کلی نقض کننده شرایط انرژی است. در حالی که برای کرمچاله های در حال تحول (اما غیر توری) ماده می تواند به طور کلی یا در بازه های زمانی معینی شرایط انرژی را بر آورده سازد [۱۲]. این مطلب احتمال وجود کرمچاله ها را در دوره های بعدی جهان افزایش می دهد.

نمونه های زیادی از دستگاه هایی که به دلیل اثرهای کوانتومی شرایط انرژی را نقض می کنند معرفی شده اند [۱۳]. اما، هنوز مسئله وجود ماده نامتعارف به طور کلی حل نشده است. با این حال، برخی از افراد نوعی نگرش به موضوع را مطرح کرده اند که در آن فرض می شود کرمچاله ها وجود دارند و سپس پیامدهای آنها مورد توجه قرار می گیرند. از سال ۱۹۹۰ تاکنون مطالعات زیادی از این نوع انجام گرفته است که شاید مهمترین آنها از نظر مشاهده ای، مسئله انتشار انواع مختلف آشفتگیها در این گونه هندسه ها باشد. مطالعه بازتاب و عبور امواج نرده ای بی جرم و نیز انتشار امواج الکترومغناطیسی در یک هندسه کرمچاله ای ایستا نمونه های مشخص این مطالعات هستند [۱۵ و ۱۴].

در این مقاله ابتدا شکل تعمیم یافته معادله لاپلاس برای پتانسیل الکتروستاتیکی را در یک هندسه کرمچاله ای بدست می آوریم و سپس با یافتن پاسخهایی دقیق و اعمال شرایط مرزی مناسب، تاثیر این هندسه را بر پتانسیل حاصل از توزیعهای بار واقع در خارج کرمچاله مورد بررسی قرار می دهیم. به دلیل هندسه خاص گلوگاه کرمچاله انتظار داریم که پتانسیل بیشتر در این ناحیه اصلاح گردد. فرض بر این است که میدان حاصل از این توزیعهای بار در تانسور تنش-انرژی کرمچاله بی تاثیر است. شرایطی که در آنها این تقریب برقرار

برقرار باشد. در هر متریک متقارن کروی و ایستا مانند متریک (۱۲)، رویه‌هایی که در آنها، $g_{\phi\phi} = -e^{2\Phi} \rightarrow 0$ ، افق نامیده می‌شوند. کرمچاله‌های گذر پذیر نباید افقی داشته باشند چرا که وجود افق مانع عبور دو طرفه از آنها می‌شود. از این رو لازم است که تابع $\Phi(r)$ همه جا محدود باشد. در ادامه برای سادگی قرار می‌دهیم $\Phi(r) = 0$.

مطابق با مطالب بخش قبل لازم است که متریک (۱۱) را در دستگاه مختصات دکارتی بنویسیم. به این منظور تبدیل $r = f(\rho)$ را اعمال می‌کنیم. پس از جایگذاری و انجام محاسبات لازم، نتیجه می‌شود که اگر تابع $f(\rho)$ معادله

$$\rho \frac{df}{d\rho} = \sqrt{f^2 - f B(f)}, \quad (13)$$

را برآورده سازد آنگاه متریک (۱۲) به شکل زیر در می‌آید

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(\rho) \left[d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (14)$$

که در آن $A(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho}$. سپس با استفاده از تعریفهای معمول

$$x = \rho \cos \phi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta$$

در متریک (۱۴)، به دست می‌آوریم

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(\rho) \left(\delta_{ij} dx^i dx^j \right), \quad (15)$$

که عبارت است از نمایش متریک کرمچاله‌ای (۱۲) در دستگاه مختصات دکارتی.

اکنون متریک (۱۵) را در رابطه (۷) به کار می‌بریم و ضریب گذردهی الکتریکی ϵ را محاسبه می‌کنیم

$$\epsilon(\rho) = A(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho}. \quad (16)$$

با توجه به رفتار مجانبی متریک کرمچاله‌ای به سادگی می‌توان دید که $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \epsilon(\rho) = 1$.

از سوی دیگر، از قانون گاوس $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ همراه با رابطه سازگاری (۱۰) و تعریف پتانسیل الکتریکی $\mathbf{E} = -\nabla \psi$ نتیجه می‌گیریم

$$\nabla^2 \psi + \frac{1}{\epsilon(\rho)} \frac{d\epsilon(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0, \quad (17)$$

که می‌توانیم آن را تعمیم معادله لاپلاس در میدان گرانشی بنامیم. با توجه به اینکه معادله (۱۷) در دستگاه مختصات کروی (ρ, θ, ϕ) جدا می‌شود، جواب کلی آن را چنین می‌نویسیم

$$\psi(\rho, \theta, \phi) = \sum_l \sum_m a_{lm} R_l(\rho) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_i = \mu_{ik} \mathbf{H}_k + (\mathbf{G} \times \mathbf{E})_i, \quad (6)$$

که در اینجا

$$\epsilon_{ik} = \mu_{ik} = -\sqrt{-g} \frac{g_{ik}}{g_{\phi\phi}}, \quad (7)$$

و

$$\mathbf{G}_i = -\frac{g_{oi}}{g_{\phi\phi}}. \quad (8)$$

اکنون می‌بینیم که معادلات ماکسول در یک میدان گرانشی به طور صوری با معادلات ماکسول در یک فضازمان تخت در حضور یک محیط هم‌ارزند. خواص این محیط توسط ضرایب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی داده شده در رابطه (۷) توصیف می‌شود. در اینجا بحث خود را به فضازمانهای ایستا محدود می‌کنیم. به علاوه، دستگاه مختصات دکارتی را چنان بر می‌گزینیم که متریک g در آن قطری باشد. در این شرایط روشن است که $\mathbf{G} = 0$ و ضرایب گذردهی الکتریکی و مغناطیسی قطری خواهند بود به طوری که می‌توان نوشت

$$\epsilon_{ik} = \mu_{ik} = \epsilon \delta_{ik}. \quad (9)$$

همچنین روابط سازگاری (۵) و (۶) به ترتیب به شکلهای ساده

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (10)$$

و

$$\mathbf{B} = \epsilon \mathbf{H} \quad (11)$$

در می‌آیند.

۳. معادلات الکترواستاتیک در یک هندسه کرمچاله‌ای

به عنوان هندسه پس‌زمینه، متریک زیر را بر می‌گزینیم

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (12)$$

که در واقع عبارت است از شکل کلی متریک برای یک کرمچاله گذر پذیر ایستا در یک مختصات کروی (t, θ, ϕ) [۱]. در اینجا $\Phi(r)$ تابع جابه‌جایی به سرخ و $B(r)$ تابع شکل نامیده می‌شود. تابع شکل، شکل فضایی کرمچاله را مشخص می‌کند و باید شرط $B(r) \leq r$ را برآورده سازد تا هندسه کرمچاله‌ای ممکن باشد. معادله $B(r) = r$ مکان گلوگاه کرمچاله را مشخص می‌کند که در واقع کران پایین مختصه r است. در اینجا کرمچاله‌هایی را در نظر می‌گیریم که به طور مجانبی تخت هستند. در این صورت باید شرط $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B(r)}{r} = 0$

اکنون از معادله بالا $\varepsilon(\rho)$ را در دستگاه معادلات (۲۱) جایگذاری می‌کنیم. پس از حل به دست می‌آوریم

$$R_1(\rho) = \frac{A_1 \rho^{l+1} + C_1 \rho^{-l}}{\rho + \rho_0}, \quad (23)$$

که در آن A_1 و C_1 ثابت‌هایی هستند که با شرایط مرزی تعیین می‌شوند. در اینجا ما یک مسئله داخلی را با شرایط مرزی $\psi(S, \theta, \phi) = V(\theta, \phi)$ و $\psi(\rho_0, \theta, \phi) = 0$ در آن S یک مرز دلخواه در اطراف کره‌چاله است. بر این اساس جواب کلی پتانسیل را می‌توان چنین نوشت.

$$\psi(\rho, \theta, \phi) = \sum_l \sum_m a_{lm} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{l+1} \right] \left[\left(\frac{\rho^{l+1}}{\rho + \rho_0} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) \right] \quad (24)$$

همراه با

$$a_{lm} = \left(\frac{S + \rho_0}{S^{l+1}} \right) \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{S} \right)^{l+1} \right]^{-1} \int Y_{lm}^*(\theta, \phi) V(\theta, \phi) d\Omega \quad (25)$$

همان‌طور که انتظار داریم در حالت $\rho_0 = 0$ یعنی در غیاب کره‌چاله، جواب بالا به جواب در فضای تخت [۱۳] تبدیل می‌گردد. گرچه در جواب کلی (۲۴) توانهای منفی وجود دارند اما این جواب تکین نیست، چون همواره $\rho \geq \rho_0 > 0$. به عنوان ساده‌ترین انتخاب قرار می‌دهیم $V(\theta, \phi) = V_0$ ، آنگاه فقط a_{00} غیر صفر است و یک جواب متقارن کروی به شکل زیر داریم

$$\psi(s) = V_0 \left(\frac{S + \rho_0}{S - \rho_0} \right) \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} \right). \quad (26)$$

$$B(r) = \frac{B_0 r^2}{r} \quad \text{۲.۴. کره‌چاله‌ای با } B_0$$

به عنوان انتخابی دیگر تابع شکل را در متریک (۱۲)

می‌گیریم $B(r) = \frac{B_0 r^2}{r}$ که در آن B_0 ثابت است. آنگاه این تابع شکل را در معادله (۱۳) قرار می‌دهیم و از آن انتگرال می‌گیریم. به دست می‌آوریم

$$\varepsilon(\rho) = \frac{\rho^2 + \rho_0^2}{\rho^2}, \quad (27)$$

که در آن $\rho_0 = \frac{B_0}{\rho}$. بنا بر این دستگاه معادلات (۲۱) می‌شود

که در آن $R_1(\rho)$ یک تابع نامعلوم و a_{lm} ضریب بسط است. با جایگذاری این جواب در معادله (۱۷)، معادله زیر برای $R_1(\rho)$ حاصل می‌شود

$$R_1'' + \left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) R_1' - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R_1 = 0. \quad (19)$$

این معادله ای است که رفتار شعاعی پتانسیل را توصیف می‌کند.

در حالت ساده $l=0$ ، به راحتی می‌توانیم انتگرال اول معادله (۱۹) را به شکل زیر حساب کنیم

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{a_{00} R_0}{\sqrt{\varepsilon} \pi} \right) = \frac{Q}{\varepsilon(\rho) \rho^2}, \quad (20)$$

که در آن برای استفاده‌های بعدی ضریب $\frac{a_{00}}{\sqrt{\varepsilon} \pi}$ را وارد کرده‌ایم و Q یک ثابت انتگرال‌گیری است که آن را مثبت می‌گیریم. این عبارت یادآور میدان الکتریکی خارج از یک توزیع بار متقارن کروی واقع در یک محیط است. بنا بر این، می‌توان نتیجه گرفت که برای یک ناظر دور دست فضازمان کره‌چاله ای مانند یک جسم باردار رفتار می‌کند. البته این نتیجه برای هر فضازمان همسانگرد مانند (۱۲) درست است. اما در مورد فضازمان کره‌چاله ای چون $\rho \neq 0$ ، میدان فاقد تکینگی است.

در حالت کلی می‌توان معادله (۱۹) را به دو معادله مرتبه اول زیر تبدیل کرد

$$R_1'(\rho) = \frac{T_1(\rho)}{\rho^2 \varepsilon(\rho)}, \quad T_1'(\rho) = l(l+1) \varepsilon(\rho) R_1(\rho) \quad (21)$$

که برای حل کردن آنها لازم است عبارت صریحی برای $\varepsilon(\rho)$ داشته باشیم. به عبارت دیگر باید هندسه پس زمینه به طور کامل معلوم باشد. در ادامه، دو هندسه ویژه که در واقع ساده‌ترین کره‌چاله‌های گذرپذیر هستند را در نظر می‌گیریم.

۴.۱. کره‌چاله‌ای با تابع شکل ثابت

به عنوان ساده‌ترین انتخاب، تابع شکل را در متریک کره‌چاله ای (۱۲) ثابت می‌گیریم $B(r) = B_0$. با این تابع شکل، جواب معادله (۱۳) عبارت است از

$$\frac{f(\rho)}{\rho} = \varepsilon(\rho) = \frac{(\rho + \rho_0)^2}{\rho^2}, \quad (22)$$

که در آن $\rho_0 = \frac{B_0}{\rho}$.

$$u_E = \left(\frac{1}{\lambda\pi} \varepsilon(\rho) \mathbf{E}^2 \right)_{\rho=\rho_0} \quad (30)$$

و در ادامه برای سادگی تنها میدان الکتریکی با تقارن کروی را در نظر می‌گیریم. از سوی دیگر، با توجه به معادلات اینشتین، چگالی جرم-انرژی ماده پس زمینه برای متریک کرمچاله‌ای (۱۲) را در گلوگاه می‌توان چنین نوشت [۳]

$$u_M = \left(\frac{1}{\lambda\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{dB(r)}{dr} \right)_{r=B(r)} \quad (31)$$

که در آن r طبق (۱۳) به ρ مربوط می‌شود.

در مورد کرمچاله با تابع شکل ثابت، با استفاده از رابطه (۲۶) چگالی انرژی الکتریکی (۳۰) به صورت زیر می‌شود

$$u_E = \frac{2}{\pi} \left(\frac{4S+B_0}{4S-B_0} \right) \frac{V_0^2}{B_0^2} \quad (32)$$

در حالی که چگالی جرم-انرژی u_M همه جا صفر است. بنابراین، حتی یک میدان الکتریکی کوچک می‌تواند اختلال بزرگی را ایجاد کند که باعث می‌شود کرمچاله مورد نظر محو شود. با اینکه کرمچاله با تابع شکل ثابت نمونه ساده‌ای است و جوابهای پتانسیل به طور دقیق برای آن به دست می‌آیند اما متأسفانه به طور شدید تحت تاثیر میدان خارجی ناپایدار است. با وجود این، چنان که (۳۲) نشان می‌دهد هرچه شعاع گلوگاه بزرگتر باشد اختلال کمتر است. به علاوه، اگر V_0 خیلی کوچک باشد و مرز S خیلی دور از گلوگاه واقع شود باز هم از مقدار اختلال کاسته می‌شود.

برای کرمچاله زیربخش ۲.۵، چگالی انرژی الکتریکی (۳۰)

با استفاده از رابطه (۲۹) به صورت، $u_E = \frac{4V_0^2}{\pi^2 B_0^2}$ می‌شود که

در آن شرط $S \gg \rho_0$ را اعمال کرده ایم. همچنین چگالی

جرم-انرژی ماده پس زمینه می‌شود $u_M = \frac{-1}{\lambda\pi G B_0^2}$ که منفی

است. نسبت این دو چگالی از شعاع گلوگاه B_0 مستقل و با

V_0^2 متناسب است. بنابر این تنها با کوچک انتخاب کردن V_0

می‌توان اختلال ناشی از میدان الکتریکی را کاهش داد. روشن

است که این کرمچاله نسبت به کرمچاله با تابع شکل ثابت

پایدارتر است.

۵. محیط دی الکتریک هم ارز

با توجه به ضریب گذردهی الکتریکی $\varepsilon(\rho)$ که پیشتر

$$R'_1(\rho) = \frac{T_1(\rho)}{(\rho^2 + \rho_0^2)} \quad , \quad T'_1(\rho) = l(1+l) \left(\frac{\rho^2 + \rho_0^2}{\rho^2} \right) R_1(\rho) \quad (28)$$

بررسی نشان می‌دهد که این دستگاه را تنها پس از انتخاب l می‌توان به طور دقیق حل کرد. برای مثال تعدادی از جوابهای به دست آمده چنین‌اند

$$R_0(\rho) = a_0 + b_0 \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$$

$$R_1(\rho) = \left(\rho - \frac{\rho_0^2}{\rho} \right) \left(a_1 + b_1 \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \right) + b_1 \rho_0$$

$$R_r(\rho) = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \left[\left(\rho - \frac{\rho_0^2}{\rho} \right)^2 + r \rho_0^2 \right] \left[a_r + r b_r \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] + r b_r \rho_0 \left(\rho - \frac{\rho_0^2}{\rho} \right) \right\}$$

روشن است که با افزایش l جوابها به مراتب پیچیده‌تر می‌شوند.

در این مورد نیز مانند زیر بخش قبل، یک مسئله داخلی را با

شرایط مرزی $\psi(\rho_0, \theta, \phi) = 0$ و $\psi(S, \theta, \phi) = V(\theta, \phi)$ در

نظر می‌گیریم. در این صورت داریم

$$a_{lm} = R_1(S)^{-1} \int Y_{lm}^*(\theta, \phi) V(\theta, \phi) d\Omega$$

$R_1(\rho) = 0$. به عنوان مثال، در حالت $V(\theta, \phi) = V_0$ جواب

تقارن کروی زیر را به دست می‌آوریم

$$\psi(\rho) = V_0 \frac{\tan^{-1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{\pi}{4}}{\tan^{-1} \left(\frac{S}{\rho_0} \right) - \frac{\pi}{4}} \quad (29)$$

۳.۴ چگالی انرژی الکتریکی

در آغاز فرض کردیم که میدان حاصل از توزیع بار خارجی

در تانسور تنش-انرژی کرمچاله بی تاثیر است. در اینجا

می‌خواهیم با محاسبه چگالی انرژی الکتریکی و مقایسه با

چگالی جرم-انرژی ماده پس زمینه، شرایط لازم برای این فرض

را تعیین کنیم. این چگالیه را فقط در گلوگاه محاسبه می‌کنیم.

در این صورت برای چگالی انرژی الکتریکی می‌نویسیم

۶. نتیجه گیری

با بررسی جوابهایی که در بخش چهارم برای $R_1(\rho)$ به دست آمده‌اند به این ویژگی مهم آنها پی می‌بریم که با وجود توانهای منفی، هیچکدام تکین نیستند، چون همواره $\rho \geq \rho_0 > 0$. این مطلب نقش توپولوژی غیر بدیهی کرمچاله‌ای را به خوبی نشان می‌دهد. برای روشن شدن این موضوع، نمودار $R_1(\rho)$ مربوط به کرمچاله زیر بخش ۴-۲ (در یک مسئله داخلی) در شکل‌های ۱-الف، ۱-ب و ۱-ج به ترتیب به ازای $l=1, l=0, l=1$ و $l=2$ ترسیم شده است (منحنیهای توپر). برای مقایسه، بخش شعاعی پتانسیل در غیاب متریک کرمچاله‌ای نیز نشان داده شده است (منحنیهای خط چین). دیده می‌شود که بیشترین تاثیر بر پتانسیل در نزدیکی گلوگاه رخ می‌دهد.

علاوه بر این، می‌توانیم نتایجی را به صورت کلی برای متریک (۱۲) در مورد رفتار میدان الکتریکی و میدان جابه جایی به دست آوریم. با توجه به مطالب بخش ۵، به دلیل وجود بارهای قطبیده، شار میدان الکتریکی در اطراف کرمچاله ناپیوسته خواهد بود. بخشی از خطوط E قبل از رسیدن به گلوگاه توسط بارهای قطبیده حجمی جذب می‌شوند و خطوط باقیمانده همراه با خطوط تولید شده توسط بار مثبت قطبیده گلوگاه، از گلوگاه عبور می‌کند. این در حالی است که مطابق با رابطه $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ، شار خالص میدان جابه جایی برای هر سطح بسته دلخواه Σ صفر است. اما باید توجه کرد که به دلیل توپولوژی غیر بدیهی کرمچاله، همواره بخشی از سطح Σ یک کره به شعاع گلوگاه خواهد بود. به طوری که می‌توان نوشت

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \oint_{\Sigma'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da + \oint_{\Sigma_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

که در آن Σ' سطح دلخواهی است که کرمچاله را احاطه کرده است و Σ_0 کره‌ای است به شعاع گلوگاه. به کمک رابطه بالا و روابط بخش ۵ می‌توان شاری که به سطح Σ' وارد و از گلوگاه خارج می‌شود را حساب کرد

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da &= -\oint_{\Sigma_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \oint_{\Sigma_0} \varepsilon(\rho) \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \rho^2 d\Omega \\ &= \sqrt{4\pi} a_{\infty} \varepsilon(\rho_0) \rho_0^2 \left(\frac{dR_0}{d\rho} \right)_{\rho_0} = 4\pi Q. \end{aligned} \quad (37)$$

به عنوان مثال، در شکل ۲ طرحی دو بعدی از خطوط \mathbf{D} و همین طور سطوح همپتانسیل در حالتی که پتانسیل تقارن کروی دارد نشان داده شده است.

معرفی شد، می‌توانیم یک محیط دی الکتریک هم ارز متناظر با هندسه پس زمینه در نظر بگیریم [۱۵]. چنین محیط دی الکتریکی یک محیط خطی، همسانگرد ولی ناهمگن است و هرچه از گلوگاه دورتر شویم خواص آن به خواص خلاء نزدیکتر می‌شود. به این ترتیب، با محاسبه بارهای قطبیده، می‌توانیم تاثیر هندسه کرمچاله‌ای بر پتانسیل را به طریق دیگری توجیه کنیم.

به منظور بررسی خواص این محیط، بردار قطبش

$$\mathbf{P} = -\left[\frac{\varepsilon(\rho) - 1}{4\pi} \right] \nabla \psi, \quad (33)$$

را در نظر می‌گیریم. بنابراین، چگالی بار قطبیده حجمی چنین به دست می‌آید

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \psi = \frac{1}{4\pi \varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad (34)$$

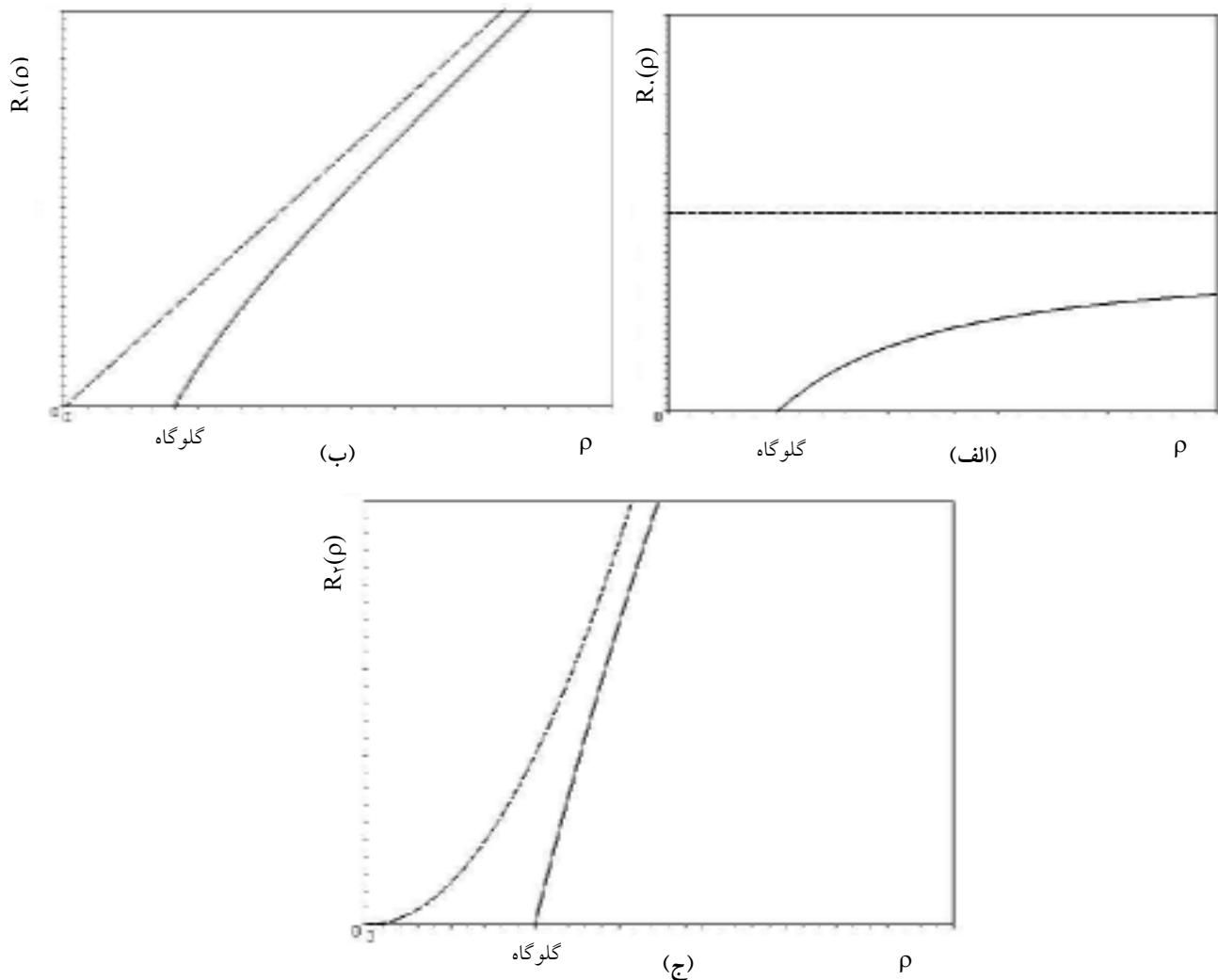
که در آن از (۱۷) استفاده کرده ایم. اکنون ψ را از (۱۸) در (۳۴) جایگذاری می‌کنیم و با انتگرالگیری در کل فضا بار قطبیده حجمی به دست می‌آوریم. داریم

$$\begin{aligned} Q_V &= \frac{1}{4\pi} \sum_l \sum_m a_{lm} \left[\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{dR_1}{d\rho} \rho^2 d\rho \int Y_{lm}(\theta, \phi) d\Omega \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} a_{00} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{dR_0}{d\rho} \rho^2 d\rho = -Q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon(\rho_0)} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

که در آن در تساوی آخر از (۲۰) استفاده کرده ایم. علاوه بر این، بار قطبیده سطحی درست در مرز گلوگاه می‌شود

$$\begin{aligned} Q_s &= \left[\frac{\varepsilon(\rho_0) - 1}{4\pi} \right] \rho_0^2 \int \frac{\partial \psi}{\partial \rho} d\Omega = \\ &a_{00} \left[\frac{\varepsilon(\rho_0) - 1}{4\pi} \right] \rho_0^2 \frac{dR_0}{d\rho} \Big|_{\rho_0} = Q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon(\rho_0)} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

که در اینجا نیز از (۱۸) و (۲۰) استفاده شده است. البته همان طور که انتظار داشتیم بار قطبیده کل محیط صفر است. باید توجه نمود که $\varepsilon(\rho_0)$ برای هر انتخاب تابع شکل در متریک (۱۲) عددی است مستقل از ρ_0 . از این رو بارهای قطبیده بالا برای هر کرمچاله به اندازه شعاع گلوگاه بستگی ندارند. بدیهی است که با عوض کردن تابع شکل مقدار این بارها نیز تغییر می‌کند.

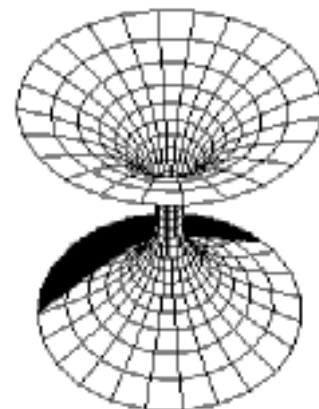


شکل ۱. نمودارهای $R_l(\rho)$ مربوط به کرمچاله زیر بخش ۴-۲ در یک مسئله داخلی به ازای $l=0$ ، $l=1$ و $l=2$ توسط منحنیهای توپر نشان داده شده اند. به منظور مقایسه، رفتار پتانسیل در غیاب کرمچاله نیز توسط منحنیهای خط چین نمایش داده شده است.

در اینجا نکته مهمی وجود دارد. با بررسی رابطه های (۳۵)، (۳۶) و (۳۷) می بینیم که بارهای قطبیده حجمی و سطحی و همین طور شار میدان جابجایی به درون کرمچاله فقط به ضریب a_{00} بستگی دارند و بنابراین اگر پتانسیل را چنین بنویسیم

$$\psi(\rho, \theta, \phi) = \frac{a_{00}}{\sqrt{4\pi}} R_0(\rho) + \sum_{l=1} \sum_m a_{lm} R_l(\rho) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (38)$$

تنها جمله اول منجر به مقدار های غیر صفر برای آنها خواهد شد. چنانچه شرایط مرزی را بگونه ای برگزینیم که a_{00} صفر شود آنگاه شار خالص میدان جابه جایی حاصل برای هر کدام از سطوح Σ' و Σ_0 به تنهایی صفر است. در مورد میدان



شکل ۲. طرحی دوبعدی از خطوط D (یالها) و سطوح همپتانسیل (دایره‌ها) در یک هندسه کرمچاله‌ای در حالتی که پتانسیل تقارن کروی دارد.

الکتريکی، گرچه هر کدام از بارهای قطبيده سطحی و حجمی صفر است اما چگالی این بارها صفر نیست و ناپیوستگی شار

به طور موضعی وجود دارد.

مراجع

۱. L Flamm, *Physik Z* **17** (1916) 448.
۲. J A Wheeler, *Geometrodynamics*, Academic, NY (1962).
۳. M S Morris, K S Thorne, *Am. J. Phys.* **56**(5) (1988) 395.
۴. M S Morris, K S Thorne, U Yurtsever, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1446.
۵. B Nasr-Esfahani, *Ph.D. Thesis*, Shiraz University, Shiraz (1999).
۶. N Riazi, B Nasr-Esfahani, *Astrophysics and Space Science*, **271**(3) (2000) 237.
۷. K K Nandi, A Islam, J Evans, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 2497.
۸. ب. نصر اصفهانی، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۴، ۲، ۱۳۷۹ (۲۲۹).
۹. ب. نصر اصفهانی، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۴، ۵، ۱۳۸۰ (۲۵۹).
۱۰. S W Kim, *Phys. Rev. D* **58** (1998).
۱۱. D Hochberg, M Visser, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 4421.
۱۲. T A Romman, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 1370.
۱۳. S Kim, H Lee, *Phys. Lett. B* **458** (1999) 245.
۱۴. S Kar, D Sahdev, B Bhawal, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 853.
۱۵. S E P Bergliaffa, K E Hibberd, *Phys. Rev. D* **62** (2000).
۱۶. J D Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1989.