

## فاز هندسی سامانه‌های اپتومکانیکی

پروین رحیمی، علی مهدی‌فر و احسان عموقربان

دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

پست الکترونیکی: mahdifar\_a@sci.sku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۱/۱۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۴/۶)

### چکیده

در این مقاله، با توجه به مزیت‌های فاز هندسی در کاربردهایی از قبیل محاسبات کوانتومی، به محاسبه فاز هندسی برای سامانه‌های اپتومکانیکی می‌پردازیم. تحقیق حاضر را می‌توان به عنوان گامی مهم در راستای استفاده از سامانه‌های اپتومکانیکی در محاسبات کوانتومی با استفاده از فاز هندسی سامانه‌های مزبور به حساب آورد.

واژه‌های کلیدی: سامانه‌های اپتومکانیکی، فاز هندسی، محاسبات کوانتومی

### ۱. مقدمه

یک ذره باردار از اطراف ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی وجود دارد، با وجود این که ذره و میدان هیچ برهم‌کنشی با یکدیگر ندارند، باعث تغییر فاز تابع موج ذره می‌شود.

پانچاراتنام<sup>۳</sup> در سال ۱۹۵۶ حین مطالعه چرخش قطبش نور با استفاده از قطبنده‌های متوالی، مشاهده کرد که نور عبوری دچار تغییر فاز شده است. این تغییر فاز ناشی از کروی بودن فضای قطبش نور است. در هر سه مثال ذکر شده هندسه مسأله به عنوان عامل اصلی ایجاد تغییرات شناخته می‌شود. نتایجی که بری<sup>۴</sup> در سال ۱۹۸۴ به دست آورد روشن کننده ماهیت آزمایش‌هایی مشابه آزمایش‌های بالا بود. بری نشان داد که عامل

آونگ فوکو<sup>۱</sup> یکی از مهمترین ابزارهای است که نشان دهنده چرخش زمین و همچنین کروی بودن آن است. اگر یک آونگ روی سطح زمین در نظر بگیریم، پس از یک دور کامل زمین دیده می‌شود که صفحه نوسان به اندازه  $2\pi(1-\cos\theta)$  چرخیده است، که  $\theta$  بیانگر عرض جغرافیایی موقعیت آونگ است. میزان این چرخش مستقل از سرعت نوسان آونگ و یا حتی سرعت چرخش زمین است.

یکی از آزمایش‌های مهم در حوزه مکانیک کوانتومی اثر آهارنوف-بوهم<sup>۲</sup> است. در این آزمایش دیده می‌شود که عبور

۳. Pancharatnam

۴. Berry

۱. Focault

۲. Aharonov-Bohm

مجموعه‌ای از کیوبیت‌ها وارد یک سامانه کوانتومی - به عنوان یک درگاه کوانتومی - می‌شوند. درون درگاه عملیات موردنظر طی بازه زمانی مشخصی روی کیوبیت‌ها اعمال شده و سپس حالت نهایی به عنوان خروجی استخراج می‌شود. رایج‌ترین درگاه کوانتومی مورد استفاده درگاه هادامارد<sup>۱</sup> است. این درگاه تبدیل یکانی زیر را روی کیوبیت ورودی اعمال می‌کند

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (۱)$$

$$|x\rangle \xrightarrow{H} \frac{(-1)^x |x\rangle + |1-x\rangle}{\sqrt{2}} \quad (۲)$$

ترکیب این درگاه با درگاه تغییر فاز به صورت

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \exp(i\phi) \end{pmatrix} \quad (۳)$$

$$|x\rangle \xrightarrow{\phi} \exp(ix\phi) |x\rangle \quad (۴)$$

و اعمال آنها به صورت زیر بر حالت  $|0\rangle$ ، کلی‌ترین حالت یک کیوبیت را نتیجه می‌دهد،

$$|0\rangle \xrightarrow{H, \phi, H, \frac{\pi}{2}, \phi} \cos\theta |0\rangle + \exp(i\phi) \sin\theta |1\rangle. \quad (۵)$$

بنابراین درگاه‌های هادامارد و تغییر فاز برای ایجاد هرگونه عملیات یکانی دلخواه روی یک کیوبیت کافی هستند.

الگوی متعارف محاسبات کوانتومی روش محاسبات دینامیکی است که در این روش با کنترل برهم‌کنش‌های داخلی بین کیوبیت‌ها می‌توان به مجموعه‌ای از درگاه‌های کوانتومی مورد نظر دست پیدا کرد. همچنین انجام محاسبات کوانتومی با استفاده از خاصیت‌های هندسی تابع موج نیز امکان‌پذیر است، که این روش با نام محاسبات کوانتومی هندسی شناخته شده است. نشان داده شده است که از فاز هندسی می‌توان به عنوان درگاه کوانتومی تغییر فاز استفاده نمود. با توجه به این که فاز هندسی تنها به بعضی ویژگی‌های هندسی سامانه بستگی دارد و به جزئیات مسیر، زمان، هامیلتونی و حالت‌های اولیه و نهایی تحول وابسته نیست، فرایندهای محاسبات کوانتومی هندسی در مقایسه با محاسبات دینامیکی از مزیت‌های بیشتری برخوردار هستند. مزیت استفاده از فاز هندسی در محاسبات کوانتومی، هندسی محض بودن آن است که سبب مقاوم شدن فاز هندسی

فازی ایجاد شده در تابع موج یک سامانه کوانتومی پس از طی یک تحول چرخه‌ای و بی‌دررو، از دو قسمت تشکیل شده است که قسمت اول وابسته به دینامیک سامانه است در حالی که قسمت دوم کاملاً مستقل از دینامیک است و به هندسه فضای حالت سامانه بستگی دارد.

برهم‌کنش نور با ماده که با گسترش فیزیک مدرن اهمیت فوق‌العاده‌ای یافت، زمینه مطالعاتی بسیاری از فیزیکدانان برای بیش از یک قرن بوده است. با گسترش نظریه کوانتومی نور، شاخه مطالعاتی جدیدی به نام اپتیک کوانتومی شکل گرفت که با گسترش این شاخه، پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در زمینه کنترل سامانه‌های اتمی از طریق وارد آوردن فشار تابشی بر آنها ایجاد شد. مبحث فشار تابشی و یا به عبارتی نیروی ناشی از تکانه نور، اولین بار در قرن ۱۷ میلادی توسط دانشمند معروف یوهانس کپلر، حین مطالعه نحوه ایجاد و جهت‌گیری دنباله یک دنباله دار مطرح شد، ولی گروه والتر و همکارانش در سال ۱۹۸۰ برای اولین بار در آزمایشگاه اثرات فشار تابشی را بر آینه‌های ماکروسکوپی مشاهده کردند. چنین نوع برهم‌کنش نور با ماده (جسم ماکروسکوپی) که در آن فشار تابشی توانایی جابه‌جایی جسم ماکروسکوپی (مانند آینه متحرک) را دارد، به جفت‌شدگی اپتومکانیکی موسوم است. در سال‌های اخیر سامانه‌های اپتومکانیک کاربردهای بسیار گسترده‌ای را در فیزیک تجربی و نظری به خود اختصاص داده‌اند.

گسترش روز افزون دانش بشر و متعاقب آن محدودیت‌های ابزارهای محاسباتی مورد استفاده، نیاز به محاسبات کوانتومی را افزایش می‌دهد. یکی از پیشرفت‌های جالب توجه مکانیک کوانتومی در دهه اخیر استفاده از سامانه‌های کوانتومی در فرایندهای اطلاعاتی مانند محاسبات کوانتومی است. مشاهده شده است که استفاده از این سامانه‌ها جهت انجام محاسبات، به مراتب مؤثرتر و کارآمدتر از تمام الگوریتم‌های موجود در رایانه‌های کلاسیکی است.

یک کیوبیت در مکانیک کوانتومی یک سامانه کوانتومی است که حالت آن به صورت برهم‌نهی حالت‌های متعامد و بهنجار  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  بیان می‌شود [۱]. جهت انجام محاسبات،

۱. Hadamard

در برابر برخی از منابع نوفه می‌شود.

از طرف دیگر، اگر بخواهیم از مزیت مقاومت فاز هندسی در برابر نوفه در درگاه‌های کوانتومی استفاده کنیم، با توجه به این‌که عامل فازی‌ای که تابع موج پس از طی تحول به دست می‌آورد مجموع فازهای دینامیکی و هندسی است، باید به دنبال رهیافت‌هایی باشیم که در آنها مقدار فاز دینامیکی برابر صفر شده و فاز هندسی غیر صفر باقی بماند.

با توجه به کاربرد بسیار زیاد فاز هندسی در محاسبات کوانتومی و همچنین گستردگی کاربرد سامانه‌های اپتومکانیکی، در این پژوهش ابتدا در بخش ۱ به بررسی مفهوم فاز هندسی، استخراج رابطه آن و همچنین بررسی تأثیر کوانتس میدان بر فاز هندسی می‌پردازیم. سپس در بخش ۲ با معرفی سامانه‌های اپتومکانیکی برهنه و مجهز به اتم چگونگی استخراج هامیلتونی آنها را بررسی و سرانجام در بخش ۳ فاز هندسی سامانه‌های اپتومکانیکی را محاسبه می‌کنیم. علاوه بر این، شرایط لازم برای صفر شدن مقدار فاز دینامیکی سامانه‌های اپتومکانیکی مزبور را نیز بررسی خواهیم کرد.

## ۲. فاز هندسی

مفهوم فاز هندسی اولین بار توسط پانکاراتنام حین مطالعه چرخش قطبش نور مطرح شد. او برای بیان این کمیت از مفهوم انتقال موازی استفاده کرد [۲].

در مکانیک کوانتومی به هر سامانه در هر لحظه از زمان بردار حالت  $|\psi\rangle$  نسبت داده می‌شود که با تحول سامانه با گذشت زمان، بردار حالت نیز دچار تغییر می‌شود. اگر این تحول یک تحول چرخه‌ای باشد، بردار حالت اولیه  $|\psi\rangle$  و نهایی  $|\psi'\rangle$  با رابطه  $|\psi'\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle$  به یکدیگر مربوط می‌شوند که در آن  $\varphi$  یک عدد حقیقی است. در مکانیک کوانتومی فاز حاوی اطلاعاتی راجع به تحول سامانه یا در واقع حافظه آن است. بری نشان داد که این فاز علاوه بر قسمتی که منشاء دینامیکی دارد از یک قسمت دیگر نیز تشکیل شده که این قسمت منشاء کاملاً هندسی دارد [۳]. از زمان کشف فاز بری آزمایش‌های زیادی جهت اثبات وجود آن و همچنین بهره‌گیری

از کاربردهای آن انجام شده است. این آزمایش‌ها هم در حوزه مکانیک کوانتومی و هم در حوزه مکانیک کلاسیک صورت گرفته‌اند.

## ۲.۱. استخراج رابطه فاز هندسی

آهارنوف و آناندان در سال ۱۹۸۷ میلادی فاز بری را تعمیم داده و بیان کردند که نه فقط برای هر تحول بی‌درو، بلکه برای هر تحول چرخه‌ای می‌توان فاز هندسی تعریف کرد [۴]. در این بخش روش محاسبه فاز هندسی را در یک تحول چرخه‌ای مرور می‌کنیم.

حالت بهنجار شده  $|\psi(t)\rangle$  را در نظر می‌گیریم که طبق معادله شرودینگر تحول می‌یابد. اگر این سامانه تحولی چرخه‌ای با دوره تناوب  $\tau$  طی کند، بردار حالت آن در لحظه  $\tau$  به صورت

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{i\varphi}|\psi(0)\rangle, \quad (1)$$

است. حال بردار  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-if(t)}|\psi(t)\rangle, \quad (2)$$

به طوری که  $f(t)$  در رابطه زیر صدق کند

$$f(\tau) - f(0) = \varphi, \quad (3)$$

با نوشتن  $|\psi(t)\rangle$  برحسب  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  و جایگذاری آن درون معادله شرودینگر به رابطه زیر می‌رسیم:

$$-\frac{df}{dt} = \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle - \langle \tilde{\psi}(t) | i \frac{d}{dt} | \tilde{\psi}(t) \rangle. \quad (4)$$

کاملاً واضح است که جمله اول به هامیلتونی یا دینامیک سامانه وابسته است، در حالی که جمله دوم مستقل از دینامیک است.

جمله اول فاز دینامیکی و جمله دوم فاز هندسی نامیده می‌شود که به صورت زیر با نمادهای  $\gamma_d$  و  $\gamma_g$  مشخص می‌کنیم

$$\gamma_d = \int_0^\tau \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle dt, \quad (5)$$

$$\gamma_g = \int_0^\tau \langle \tilde{\psi}(t) | i \frac{d}{dt} | \tilde{\psi}(t) \rangle dt. \quad (6)$$

برهم‌کنش یک ذره با اسپین  $\frac{1}{2}$  با میدان مغناطیسی  $B$  یکی از معروف‌ترین مثال‌های مطرح شده جهت محاسبه و اندازه‌گیری فاز هندسی است. فاز هندسی این سامانه برابر  $\pi(1 - \cos\theta)$  به دست می‌آید [۴]. از طرف دیگر، فضای هیلبرت براکنشی

کنیم، می‌توانیم  $\alpha e^{-i\phi}$  و  $\alpha e^{i\phi}$  را جایگزین عملگرهای نابودی و خلق  $\hat{a}$  و  $\hat{a}^\dagger$  کنیم [۵].

$$H = \frac{\Delta}{\gamma} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ \alpha e^{-i\phi} + \hat{\sigma}_- \alpha e^{i\phi}), \quad (۹)$$

که در این رابطه  $\alpha$  بیانگر دامنه نوسانات میدان است. این هامیلتونی را می‌توان به شکل  $\vec{B} \cdot \vec{\sigma}$  نوشت که در آن بردارهای  $\vec{\sigma}$  و  $\vec{B}$  به صورت زیر تعریف شده اند

$$\vec{B} = (g\alpha \cos \phi, g\alpha \sin \phi, \frac{\Delta}{\gamma}), \quad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \quad (۱۰)$$

که در آن  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  ماتریس‌های پائولی هستند. ویژه حالت‌های این هامیلتونی به صورت

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{g^2 \alpha^2 + (\lambda^\pm - \frac{\Delta}{\gamma})^2}} \begin{pmatrix} g\alpha e^{-i\phi} \\ \lambda^\pm - \frac{\Delta}{\gamma} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (۱۱)$$

هستند، که در این رابطه  $\lambda^\pm = \pm \sqrt{g^2 \alpha^2 + (\lambda^\pm - \frac{\Delta}{\gamma})^2}$  با توجه به این که  $a$  و  $b$  مقداری بین صفر و ۱ دارند و  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  می‌توان ضرایب  $a$  و  $b$  را به صورت  $\cos \frac{\theta}{\gamma}$  و  $\sin \frac{\theta}{\gamma}$  در نظر گرفت. بنابراین فاز هندسی این سامانه نیز مشابه وضعیت بررسی شده در [۴] برابر  $\pi(1 - \cos \theta)$  خواهد بود. در حالت کلی فاز هندسی برای کلیه هامیلتونی‌هایی که شکل آنها به صورت  $\vec{B} \cdot \vec{\sigma}$  است، یکسان است و مسیر طی شده توسط بردار اسپین در همه این مسائل شبیه یکدیگر است. حال به بررسی مدل کوانتومی این برهم‌کنش می‌پردازیم. ویژه حالت‌های این هامیلتونی در حالت بازآوایی برابر

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, e\rangle + |n+1, g\rangle), \quad (۱۲)$$

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|n, e\rangle + |n+1, g\rangle)$$

هستند. برای تغییر بی‌دررو حالت‌های میدان، تبدیل  $U(\phi) = e^{-i\phi \hat{a}^\dagger \hat{a}}$  را روی سامانه اعمال می‌کنیم. اعمال این تبدیل باعث چرخش حالت‌های میدان می‌شود. با تغییر بی‌دررو  $\phi$  از صفر تا  $2\pi$ ، فاز هندسی تولید شده توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\gamma_\pm = i \int_c d\phi \langle \psi_n^\pm | U^\dagger(\phi) \frac{d}{d\phi} U(\phi) | \psi_n^\pm \rangle \quad (۱۳)$$

متناظر با این سامانه به صورت یک کره است که با تغییر بی‌دررو راستای میدان، بردار اسپین نیز به آرامی روی این کره حرکت می‌کند. زاویه فضایی محاط شده توسط بردار اسپین به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\Omega = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi(1 - \cos \theta). \quad (۷)$$

بنابراین فاز هندسی این سامانه برابر  $\frac{1}{\gamma}$  زاویه فضایی محاط شده توسط بردار اسپین در فضای هیلبرت برافکنشی است.

## ۲.۲. تأثیر کوانتش میدان بر فاز هندسی

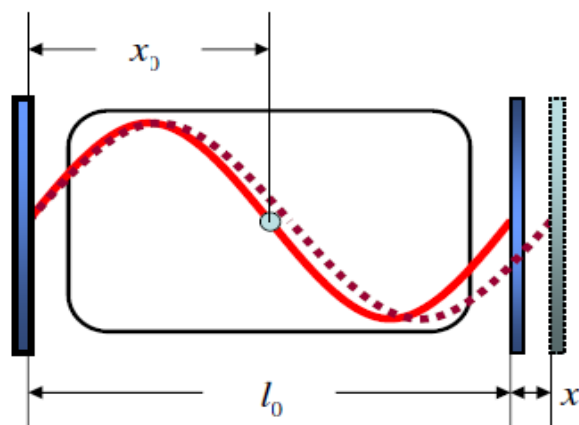
از زمان معرفی فاز هندسی، این فاز توجه زیادی را در بسیاری از زمینه‌ها از جمله تداخل‌سنج‌های نوترونی، محاسبات کوانتومی و... به خود جلب کرده است. در همه این زمینه‌ها، سامانه‌های مورد نظر به صورت نیمه کلاسیکی در نظر گرفته شده و مورد مطالعه قرار گرفتند، به این معنا که میدان الکترومغناطیسی در این مسائل یک میدان کلاسیک بوده است. برهم‌کنش یک ذره با اسپین  $\vec{\sigma}$  با میدان مغناطیسی که راستای میدان به صورت بی‌دررو و دوره‌ای تغییر می‌کند، نیز یکی از این آزمایش‌ها به شمار می‌رفت. بنابراین در این مسائل، اثر میدان خلاء بر فاز هندسی بررسی نشده بود. در سال ۲۰۰۲، گردی<sup>۱</sup> و همکارانش با در نظر گرفتن طبیعت کوانتومی میدان، جنبه‌های جدیدی از این فاز را معرفی کردند.

در این قسمت، ابتدا حالت نیمه کلاسیک این برهم‌کنش را در نظر گرفته و سپس با کوانتیده کردن میدان، اثرات نمایان شده جدید را بررسی می‌کنیم.

هامیلتونی کوانتومی برهم‌کنش اتم دوترازی با بسامد  $\omega$  و میدان کوانتومی با بسامد  $\omega$  که به هامیلتونی جینز-کامینگز معروف است، به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H = \frac{\Delta}{\gamma} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (۸)$$

که در این رابطه،  $\Delta$  وادیدگی سامانه و برابر  $\omega - \nu$  است،  $g$  نیز ثابت جفت‌شدگی سامانه و میدان است. برای حالتی که بخواهیم این برهم‌کنش را به صورت نیمه کلاسیک بررسی



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) جفت شدگی سه‌گانه اتم-میدان-آینه درون یک سامانه اپتومکانیکی حاوی اتم.

میدان و  $\hat{a}$  و عملگرهای نابودی میدان و آینه هستند. جمله  $g\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{b}+\hat{b}^\dagger)$  بیانگر جفت شدگی مدهای اپتیکی و مکانیکی است که در آن ضریب  $g$  به صورت

$$g = \frac{\omega_c}{L} \sqrt{\frac{1}{m\omega_m}} \approx \frac{\omega_c}{L} x_{zpf} \quad (16)$$

تعریف شده است [۷]. این شکل هامیلتونی رایج‌ترین شکل مورد استفاده برای سامانه‌های اپتومکانیکی است.

### ۳.۲. سامانه اپتومکانیک شامل تک اتم دوترازی

وجود سامانه اتمی درون کاواک اپتومکانیک، نتایج فیزیکی بسیار مهمی را در بردارد. یکی از مهم‌ترین این نتایج، تقویت برهم‌کنش بین زیرسامانه‌های سه‌تایی اتم، میدان و آینه متحرک است. سامانه‌ای که قصد مطالعه آن را داریم یک اتم ۲ تراز با بسامد  $\omega_e$  است که درون یک کاواک اپتومکانیکی به دام افتاده است (شکل ۲).

این سامانه از ۳ قسمت تشکیل شده است: یک اتم دوترازی، فوتون‌های درون میدان و آینه متحرک انتهایی. در بسیاری از پژوهش‌های صورت گرفته، بررسی سامانه اپتومکانیک مجهز به اتم درون رژیم جفت‌شدگی ضعیف انجام می‌شود که در این رژیم از جفت‌شدگی سه‌گانه اتم، میدان و آینه صرف نظر می‌شود. شرایطی که شدت جفت‌شدگی سه‌گانه و شدت جفت‌شدگی آینه و میدان از مرتبه بزرگی یکسانی



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) طرحی از یک سامانه اپتومکانیک متعارف.

که  $|\psi^\pm\rangle$  ویژه حالت‌های الگوی جینز کامینگز هستند. با جایگذاری ویژه حالت‌های سامانه درون رابطه (۱۳)، فاز

هندسی متناظر با هر کدام از ویژه حالت‌ها برابر است با [۵]

$$\gamma_\pm = \pi(1 \mp \cos \theta_n) + 2n\pi. \quad (14)$$

باتوجه به این روابط مقدار فاز هندسی به ازای  $n=0$  برابر صفر نیست، در حالی که در مدل نیمه کلاسیک این گونه نیست. در مدل نیمه کلاسیک زمانی که میدانی درون کاواک نباشد ( $\alpha=0$ )، مقدار فاز هندسی نیز برابر صفر خواهد بود و این به این معنی است که وجود حالت خلاء میدان باعث تغییر فاز هندسی می‌شود.

### ۳. سامانه‌های اپتومکانیکی

برهم‌کنش بین آینه متحرک و میدان تابشی (شکل ۱) یکی از مهم‌ترین عناوین مورد بحث در تداخل سنج‌های اپتیکی حساس به فشار تابشی است. این اهمیت تنها به خاطر جنبه‌های عملی این آزمایش نیست، بلکه از این امر که یک سامانه جفت شده آینه-میدان یک سامانه بنیادی و اساسی در اپتیک کوانتومی است، ناشی می‌شود. کاربردهای این سامانه‌ها به قدری قابل ملاحظه است که در حوزه وسیعی از پژوهش‌های اپتیک کوانتومی، می‌توان از آنها بهره جست.

#### ۳.۱. هامیلتونی کوانتومی سامانه اپتومکانیکی برهنه

هامیلتونی کوانتومی یک سامانه اپتومکانیکی به صورت زیر نوشته می‌شود [۶، ۷]:

$$\hat{H} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger). \quad (15)$$

در این رابطه  $\omega_m$  و  $\omega_c$  به ترتیب بیانگر بسامد نوسان آینه و

$$H = (\omega - \xi) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_m^2 x^2 + \frac{\omega_e}{\gamma} \hat{\sigma}_z - g_\pi (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+) x, \quad (19)$$

که ضریب  $g_\pi$  به صورت زیر تعریف شده است

$$g_\pi = g \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) / x. \quad (20)$$

وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن دامنه نوسانات آینه نسبت به طول کاواک خیلی کوچک باشد. بنابراین با استفاده از این تقریب و اعمال تبدیل‌های  $p \rightarrow p' = p$  و

$$q \rightarrow q' = q - \frac{\hat{\pi}}{m\omega_m},$$

$$H = \omega_e \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_e}{\gamma} \hat{\sigma}_z + \omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hat{\pi}^2}{2m\omega_m^2}, \quad (21)$$

که در آن  $n_m$  تعداد فونون‌های متناظر با نوسانات آینه بوده و عملگر  $\hat{\pi}$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\hat{\pi} = \xi \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \frac{\pi}{L} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+). \quad (22)$$

### ۲.۲.۳. رژیم جفت‌شدگی قوی

برای بررسی دینامیک سامانه در رژیم جفت‌شدگی قوی به صورت زیر عمل می‌کنیم. میدان تک‌مد کوانتیده درون کاواک در راستای محور  $x$  را به صورت [۹]

$$\hat{E}(x_0) = \varepsilon \hat{a} \sin kx_0 + h.c. \quad (23)$$

در نظر می‌گیریم که  $x_0$  مکان مرکز جرم اتم و  $\omega_0 = k = \frac{2\pi}{l}$

بسامد میدان درون کاواک بوده که این بسامد وابسته به طول

کاواک است.  $\varepsilon$  نیز برابر  $\sqrt{\frac{\omega_0}{\epsilon_0 v}}$  است که  $v$  و  $\epsilon_0$  به ترتیب

بیانگر حجم کاواک و ثابت دی‌الکتریک در خلاء هستند. زمانی

که به دلیل نوسانات آینه طول کاواک از  $l_0$  به  $l_0 + x$  تغییر پیدا

می‌کند، می‌توان با بسط  $\sqrt{\frac{\omega_0}{\epsilon_0 v}} \sin kx_0$  تا مرتبه اول  $x$ ، به

عبارت مورد نظر برای میدان الکتریکی دست یافت

$$\hat{E}(x_0) \approx \varepsilon \hat{a} \sin kx_0 - \eta' x \hat{a} + h.c., \quad (24)$$

که در آن ضریب  $\eta'$  به صورت زیر تعریف می‌شود

برخوردار باشند، اصطلاحاً رژیم جفت‌شدگی قوی نامیده می‌شود. تحت این شرایط از جمله جفت‌شدگی سه‌گانه نمی‌توان صرف نظر کرد. در این پژوهش با بررسی هر دو رژیم، فاز هندسی را در هر دو حالت به دست خواهیم آورد.

### ۱.۲.۳. رژیم جفت‌شدگی ضعیف

با فرض متحرک بودن اتم، هامیلتونی سامانه در رژیم جفت‌شدگی ضعیف به صورت مجموع انرژی جنبشی اتم، هامیلتونی میدان، انرژی جنبشی و پتانسیل آینه، هامیلتونی برهم‌کنش آینه با میدان و اتم با میدان خواهد بود [۸]:

$$H = \omega_e \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_m^2 \hat{x}^2 + \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\omega_e}{\gamma} \hat{\sigma}_z - \xi \hat{a}^\dagger \hat{a} x + g \sin(kQ) (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+). \quad (17)$$

در این رابطه  $x$  میزان جابه‌جایی آینه از وضعیت تعادل،  $\omega_m$

بسامد نوسانات آینه،  $m$  جرم آینه،  $Q$  و  $M$  موقعیت و جرم

اتم و  $\xi = \frac{\omega_0}{L}$  هستند. بعلاوه  $\hat{a}^\dagger$  و  $\hat{a}$  به ترتیب عملگرهای

خلق و نابودی میدان،  $\hat{P}$  و  $\hat{p}$  تکانه خطی آینه و اتم

و  $\hat{\sigma}^+$ ،  $\hat{\sigma}^-$  و  $\hat{\sigma}_z$  نیز به ترتیب عملگرهای بالابرنده و

پایین‌برنده اتمی و مؤلفه  $z$  ماتریس پائولی هستند. ثابت

برهم‌کنش اتم میدان به صورت  $g \sin(kQ)$  است که این

جمله از طریق کمیت  $k = \frac{\omega_{eff}}{c}$  که  $\omega_{eff}$  به صورت زیر

تعریف شده

$$\omega_{eff} = \omega - \xi q, \quad (18)$$

به موقعیت آینه ( $q$ ) وابسته است. این سامانه را در حالتی که

حرکت مرکز جرم اتم بسیار آهسته باشد (بتوان از آن صرف

نظر کرد) بررسی می‌کنیم. این وضعیت بیانگر یک اتم به دام

افتاده یا سرد شده است. با توجه به شکل هامیلتونی، به دست

آوردن پاسخ دینامیکی این سامانه به صورت تحلیلی ممکن

نیست. از اینرو حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که در آن اتم

در موقعیت  $Q_0$  قرار گرفته، به گونه‌ای که داشته باشیم:

$$k Q_0 = \pi$$

برای به تله اندازی اتم استفاده شود. در این حالت هامیلتونی

سامانه به شکل زیر ساده می‌شود

که در آن بسامد میدان و بسامد نوسانات آینه را به ترتیب با  $\omega_m$  و  $\omega_0$  نشان داده‌ایم. با توجه به شکل هامیلتونی در حالتی که  $g=0$  باشد،  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  و  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$  با هامیلتونی جابه‌جا می‌شوند. بنابراین در این حالت، ویژه حالت هامیلتونی برابر  $|n\rangle_a |m\rangle_b$  است. اما در حالتی که  $g \neq 0$  باشد، هامیلتونی با  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$  جابه‌جا نمی‌شود. بنابراین در این حالت،  $|m\rangle_b$  ویژه حالت آینه نیست. با توجه به این که جمله  $g\hat{a}^\dagger \hat{a}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$  توصیف کننده جابه‌جایی نوسانگر مکانیکی بر اثر فشار تابشی نوسانگر اپتیکی است، بنابراین انتظار داریم ویژه حالت‌های نوسانگر مکانیکی نیز ویژه حالت‌های جابه‌جا شده باشند،

$$|m\rangle_b \rightarrow \hat{D}(\alpha) |m\rangle_b, \quad (30)$$

که در آن عملگر جابه‌جایی  $\hat{D}(\alpha)$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha(\hat{b}^\dagger - \hat{b})} \quad (31)$$

از اینرو ویژه‌حالت‌های این سامانه به صورت زیر خواهد بود:

$$|\psi\rangle = |n\rangle_a |\tilde{m}\rangle_b = |n\rangle_a e^{\alpha(\hat{b}^\dagger - \hat{b})} |m\rangle_b. \quad (32)$$

اکنون برای محاسبه مقدار  $\alpha$  به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} H |n_a, \tilde{m}_b\rangle &= H(|n\rangle_a \hat{D}(\alpha) |m\rangle_b) \\ &= |n\rangle_a [n\omega_0 + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &\quad - gn(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)] (\hat{D}(\alpha) |m\rangle_b). \end{aligned} \quad (33)$$

همچنین برای محاسبه تأثیر عملگرهای  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$  و  $\hat{D}(\alpha)$

بر  $|m\rangle_b$  از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$[\hat{b}, \hat{D}(\alpha)] = \alpha \hat{D}(\alpha), \quad [\hat{b}^\dagger, \hat{D}(\alpha)] = \alpha \hat{D}(\alpha), \quad (34)$$

در این صورت، معادله (۳۳) به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \hat{H} |n_a, m_b\rangle &= |n\rangle_a \hat{D}(\alpha) [\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &\quad + (\omega_m \alpha - gn)(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ &\quad + (\omega_0 n + \omega_m \alpha^2 - 2gn\alpha)] |m\rangle_b, \end{aligned} \quad (35)$$

برای این که این معادله شکل یک معادله ویژه مقادیر به خود

بگیرد، باید ضریب  $(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$  صفر باشد

$$\omega_m \alpha - gn = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{gn}{\omega_m}. \quad (36)$$

در نتیجه ویژه‌مقادیر این سامانه به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\eta' = (\sin kx_0 + kx_0 \cos kx_0) \frac{\epsilon}{l}. \quad (25)$$

بنابراین در رژیم جفت‌شدگی قوی و با اعمال تقریب امواج چرخان<sup>۱</sup> (RWA)، هامیلتونی این سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\gamma\pi}{l} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_e \hat{s}_z - [\mu \hat{E}(x_0) \hat{s}_+ + h.c.] \\ &\sim \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \xi (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &\quad + \omega_e \hat{s}_z + [g \hat{a} \hat{s}_+ + \eta (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \hat{a} \hat{s}_+ + h.c.]. \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن  $\hat{a}^\dagger$ ،  $\hat{b}^\dagger$  به ترتیب عملگرهای خلق میدان و آینه و  $\hat{s}_z$ ،  $\hat{s}_+$  و  $\hat{s}_-$  نیز عملگرهای اسپینی هستند. ضریب برهم‌کنش وابسته به مکان اتم و میدان با  $g$  بیان می‌شود که این ضریب به صورت زیر تعریف شده است:

$$g = -\mu \epsilon \sin kx_0. \quad (27)$$

$\mu$  نیز بیانگر گشتاور دو قطبی الکتریکی و جمله  $\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$  توصیف کننده برهم‌کنش آینه و میدان یا در واقع همان فشار تابشی است. ضریب  $\xi$  برابر  $\frac{\omega_0}{l \sqrt{M \omega_m}}$  است که  $M$  و  $\omega_m$  به ترتیب جرم آینه و بسامد نوسانات آن هستند. جمله  $\eta (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \hat{a} \hat{s}_+$  نیز بیانگر برهم‌کنش سه‌گانه اتم، آینه و میدان است:

$$\eta = \eta' \frac{\mu}{\sqrt{M \omega_m}}. \quad (28)$$

هامیلتونی‌های (۲۱) و (۲۶) مبنای محاسبات ما جهت به دست آوردن فاز هندسی در قسمت بعد خواهند بود.

#### ۴. فاز هندسی سامانه‌های اپتومکانیکی

در این قسمت با به دست آوردن ویژه حالت‌های سامانه‌های اپتومکانیکی برهنه و مجهز به اتم، فاز هندسی سامانه‌های مزبور را محاسبه می‌کنیم.

##### ۱.۴. فاز هندسی سامانه اپتومکانیکی برهنه

یک سامانه اپتومکانیکی معمولی در نظر می‌گیریم. مطابق رابطه

(۱۵) هامیلتونی این سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (29)$$

۱. Rotating Wave Approximation

که در این رابطه  $\Omega$  زاویه فضایی محاط شده توسط بردار حالت  $|\psi\rangle$  روی فضای برافکنشی است.

با فرض این که سامانه درون یکی از ویژه‌حالت‌هایش فراهم شده باشد فاز دینامیکی این سامانه طبق رابطه (۶) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\gamma_d = \int dt E(t)/\hbar. \tag{46}$$

با توجه به رابطه (۳۷) مقدار فاز دینامیکی در صورتی برابر صفر خواهد بود که بسامد نوسانات آینه درون رابطه زیر صدق کند

$$\omega_m = \frac{-n\omega_0 \pm \sqrt{n^2\omega_0^2 - 4mg^2n^2}}{2m}. \tag{47}$$

۲.۴. فاز هندسی سامانه ایتومکانیکی مجهز به اتم در رژیم برهم‌کنش ضعیف

همیلتونی یک سامانه ایتومکانیکی حاوی اتم در رژیم برهم‌کنش ضعیف را به صورت زیر به دست آوردیم:

$$H = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_e}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_m \left( n_m + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m\omega_m^2}. \tag{48}$$

حالت‌های  $|n, e\rangle$  و  $|n+1, g\rangle$  را در نظر می‌گیریم که در آن  $n$  بیانگر تعداد فوتون‌های میدان و  $e$  و  $g$  به ترتیب حالت‌های برانگیخته و پایه اتم دوترازی هستند. این حالت‌ها یک زیرفضای پایدار برای همیلتونی مزبور تشکیل می‌دهند. با قطری کردن همیلتونی بر حسب این حالت‌ها، ویژه حالت‌های همیلتونی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$|+\rangle_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n}{2} \\ \sin \frac{\theta_n}{2} \end{pmatrix}, \quad |-\rangle_n = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta_n}{2} \\ \cos \frac{\theta_n}{2} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

که در آن داریم

$$\tan \theta_n = \frac{2H_{12}}{H_{11} - H_{22}}, \tag{50}$$

و

$$\begin{aligned} H_{11} &= \omega_0(n+1) - \frac{\omega_e}{2} - \frac{1}{2m\omega_m^2} [\xi^2(n+1) + g_\pi^2(n+1)], \\ H_{22} &= \omega_0 n + \frac{\omega_e}{2} - \frac{1}{2m\omega_m^2} [\xi^2 n + g_\pi^2(n+1)], \\ H_{12} &= -\frac{g_\pi \xi}{2m\omega_m^2} (2n+1) \sqrt{n+1} = H_{21}. \end{aligned} \tag{51}$$

$$E = n\omega_0 + m\omega_m - \frac{g^2 n^2}{\omega_m}, \tag{37}$$

در این جا،  $\frac{g^2 n^2}{\omega_m}$  تغییر بسامد حالت فوتون ناشی از فشار تابشی است. برای به دست آوردن فاز هندسی سامانه، تبدیل فازی  $U(\theta, \varphi) = e^{-i\varphi \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y}$  را بر ویژه‌حالت‌ها اعمال می‌کنیم

$$|\tilde{\psi}\rangle = U(\theta, \varphi) |\psi\rangle = e^{-i\varphi \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y} |\psi\rangle \tag{38}$$

در این رابطه  $\hat{J}_z$  و  $\hat{J}_y$  عملگرهای شوینگر هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} \hat{J}_z &= \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}) \\ \hat{J}_y &= \frac{1}{2i} (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{a} \hat{b}^\dagger) \end{aligned} \tag{39}$$

سپس با استفاده از رابطه

$$\gamma_\pm = i \int \langle \psi_n^\pm | U^\dagger(\theta, \varphi) \left[ d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] U(\theta, \varphi) | \psi_n^\pm \rangle \tag{40}$$

مقدار فاز هندسی را به دست می‌آوریم. برای محاسبه فاز هندسی عبارت‌های زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\langle \psi | U^\dagger(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} U(\theta, \varphi) | \psi \rangle = \langle \psi | e^{i\theta \hat{J}_y} e^{i\varphi \hat{J}_z} (-i \hat{J}_z) e^{-i\varphi \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y} | \psi \rangle, \tag{41}$$

$$\langle \psi | U^\dagger(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} U(\theta, \varphi) | \psi \rangle = \langle \psi | e^{i\theta \hat{J}_y} e^{i\varphi \hat{J}_z} (-i \hat{J}_y) e^{-i\varphi \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y} | \psi \rangle. \tag{42}$$

با محاسبه این دو عبارت با استفاده از لم BCH داریم

$$\begin{aligned} \langle \psi | U^\dagger(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} U(\theta, \varphi) | \psi \rangle &= \\ &= -i \langle \psi | \sin \theta \hat{J}_x + \cos \theta \hat{J}_z | \psi \rangle, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | U^\dagger(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} U(\theta, \varphi) | \psi \rangle &= \\ &= -i \langle \psi | \sin \theta \hat{J}_x + \cos \theta \hat{J}_y | \psi \rangle. \end{aligned}$$

محاسبه ارزش انتظاری عملگرهای  $\hat{J}_x$  و  $\hat{J}_y$  و  $\hat{J}_z$ ، روی حالت  $|\psi\rangle$  به روابط زیر منجر می‌شود

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{J}_x | \psi \rangle &= 0, \quad \langle \psi | \hat{J}_y | \psi \rangle = 0, \\ \langle \psi | \hat{J}_z | \psi \rangle &= \frac{1}{2} [n - m - \alpha^2] \end{aligned} \tag{44}$$

با ثابت نگه داشتن  $\theta$  و تغییر بی‌دررو  $\varphi$  از صفر تا  $2\pi$ ، فاز هندسی این سامانه به صورت زیر به دست می‌آید

$$\gamma_g = \frac{\Omega}{2} [n - m - \alpha^2], \tag{45}$$



دلیل رخ می‌دهد که با افزایش طول کاواک و کاهش بسامد نوسانات آینه، سامانه اپتومکانیکی به سمت یک کاواک معمولی میل می‌کند. با توجه به روابط (۶) و (۵۲) مقدار فاز دینامیکی این سامانه نیز در صورتی که رابطه زیر برقرار باشد، برابر صفر است

$$H_{1\pm}^{\pm} = H_{11}H_{2\pm}. \quad (58)$$

با جایگذاری روابط (۵۱) در رابطه بالا مشاهده می‌کنیم که تساوی زیر باید برقرار باشد

$$\frac{-\hbar^2 g_{\pi}^2 \xi^2}{2m^2 \omega_m^2} (\gamma n + 1)^2 (n + 1) = \left[ \hbar \omega (n + 1) - \frac{\hbar \Omega}{2} - \frac{\hbar^2}{2m\omega_m^2} \xi^2 (n + 1)^2 - \frac{\hbar^2}{2m\omega_m^2} g_{\pi}^2 (n + 1) \right] \times \left[ \hbar \omega n + \frac{\hbar \Omega}{2} - \frac{\hbar^2}{2m\omega_m^2} \xi^2 n^2 - \frac{\hbar^2}{2m\omega_m^2} g_{\pi}^2 (n + 1) \right].$$

بنابراین با انتخاب مناسب پارامترهای سامانه به سادگی می‌توان شرایطی را مهیا کرد که در آن مقدار فاز دینامیکی برابر صفر شود.

۳.۴. فاز هندسی سامانه اپتومکانیکی در رژیم برهم‌کنش قوی

قبلاً نشان دادیم که هامیلتونی یک سامانه اپتومکانیکی حاوی اتم در رژیم برهم‌کنش قوی و در تقریب امواج چرخان به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H = \frac{\gamma \pi}{l} \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \omega_m \hat{b}^{\dagger} \hat{b} + \omega_e \hat{s}_z - [\mu E(x_e) \hat{s}_+ + h.c.] \approx \omega_e \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \omega_m \hat{b}^{\dagger} \hat{b} - \xi (\hat{b} + \hat{b}^{\dagger}) \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \omega_e \hat{s}_z + [g \hat{a} \hat{s}_+ + \eta (\hat{b} + \hat{b}^{\dagger}) \hat{a} \hat{s}_+ + h.c.]. \quad (59)$$

با توجه به شکل این هامیلتونی، عملگر  $\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \hat{s}_z$  با هامیلتونی جابه‌جا می‌شود و ثابت حرکت است. بنابراین می‌توان برای این سامانه زیرفضای پایدار  $\{|n_a, e\rangle, |n_a + 1, g\rangle\}$  تعریف کرد که  $|n_a, e\rangle$  بیانگر حالتی است که اتم درون حالت برانگیخته  $e$  باشد و میدان نیز حاوی  $n_a$  فوتون باشد. در چنین حالتی می‌توان هامیلتونی را به صورت زیر نوشت

$$H = H \sum \{|n_a + 1, g\rangle \langle n_a + 1, g| + |n_a, e\rangle \langle n_a, e|\}. \quad (60)$$

ویژه‌مقادیر انرژی متناظر با این ویژه‌حالت‌ها نیز به صورت زیر هستند

$$E_{\pm} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (H_{11} - H_{22})^2 + H_{12}^2}. \quad (52)$$

با اعمال تبدیل  $U(\phi) = e^{-i\phi \hat{a}^{\dagger} \hat{a}}$  روی ویژه‌حالت‌ها و با فرض تغییر بی‌دررو  $\phi$  از صفر تا  $2\pi$ ، مقدار فاز هندسی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma_{\pm} = i \int_c d\phi \langle \psi_n^{\pm} | U^{\dagger}(\phi) \frac{d}{d\phi} U(\phi) | \psi_n^{\pm} \rangle, \quad (53)$$

که در آن  $|\psi_n^{\pm}\rangle$  ویژه‌حالت‌های سامانه هستند و به صورت

$$|\psi_n^{+}\rangle = \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n + 1, g\rangle + \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n, e\rangle, \quad (54)$$

$$|\psi_n^{-}\rangle = -\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n + 1, g\rangle + \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |n, e\rangle,$$

تعریف می‌شوند. با جایگذاری این ویژه‌حالت‌ها درون رابطه (۵۳)، فاز هندسی متناظر با این ویژه‌حالت‌ها به شکل زیر به دست می‌آیند

$$\gamma_n^{\pm} = 2n\pi + \pi(1 \mp \cos \theta_n), \quad (55)$$

که  $\cos \theta_n$  به صورت

$$\cos \theta_n = \frac{(H_{11} - H_{22})^2}{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2} \quad (56)$$

است. با توجه به رابطه بالا، تغییر تعداد فوتون‌ها یا بسامد آینه و یا طول کاواک به معنای تغییر  $\theta_n$  و به زبان دیگر شرایط اولیه سامانه روی کره پوانکاره است، بنابراین انتظار داریم تغییر این پارامترها موجب تغییر فاز هندسی شود.

فاز هندسی سامانه‌ای که در آن اتم دو ترازوی میدان تک‌مدی، درون یک کاواک معمولی برهم‌کنش می‌کنند نیز برابر  $\gamma_{\pm} = 2n\pi + \pi(1 \mp \cos \theta)$  است که در آن داریم [۵]:

$$\cos \theta = \frac{\omega_e - \omega_g}{\sqrt{(\omega_e - \omega_g)^2 + 4g^2(n + 1)}} \quad (57)$$

با جایگذاری مقادیر  $\omega_e$ ،  $\omega_g$ ،  $n$ ،  $g$  مطابق با مقادیر انتخابی برای محاسبه فاز هندسی سامانه اپتومکانیکی، مشاهده می‌شود که فاز هندسی یک کاواک معمولی با فاز هندسی یک کاواک اپتومکانیکی که طول آن زیاد و بسامد نوسانات آینه آن کوچک باشد، تقریباً برابر است. این اتفاق به این

$$g\xi = \Delta\eta, \tag{69}$$

می‌توانیم  $H'_{n_a}$  را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$H'_{n_a} = h(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) + f(\hat{b}, \hat{b}^\dagger)M_{n_a}, \tag{70}$$

که  $M_{n_a}$  و  $f(\hat{b}, \hat{b}^\dagger)$  به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$M_{n_a} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{n_a+1}\eta/\xi \\ \sqrt{n_a+1}\eta/\xi & 0 \end{pmatrix}, \tag{71}$$

$$f(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) = \Delta - \xi(\hat{b} + \hat{b}^\dagger).s \tag{72}$$

ویژه مقادیر ماتریس  $M_{n_a}$  به صورت زیر هستند

$$\lambda^\pm = \frac{1 \pm R_{n_a}}{2}, \quad R_{n_a} = \sqrt{1 + \frac{4\eta^2(n_a+1)}{\xi^2}}. \tag{73}$$

بنابراین رابطه (۷۰) برای این سامانه به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} H_{n_a}^\pm &= h(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) + \lambda^\pm f(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) \\ &= \omega_e + \lambda^\pm \Delta + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - (n_a + \lambda^\pm) \xi (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ &= \beta + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \delta (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \end{aligned} \tag{74}$$

که در آن ضریب  $\delta$  برابر  $\xi(n_a + \lambda^\pm)$  است.

برای قطری کردن  $H_{n_a}$  تبدیل زیر را روی هامیلتونی اعمال می‌کنیم

$$\tilde{H}_{n_a}^\pm = D(\alpha)H_{n_a}^\pm D^\dagger(\alpha), \quad \alpha = -\frac{\delta}{\omega_m}, \tag{75}$$

که عملگر  $\hat{D}(\alpha)$  به صورت زیر تعریف شده است

$$\hat{D}(\alpha) = \exp[\alpha(\hat{b} - \hat{b}^\dagger)]. \tag{76}$$

بنابراین  $\tilde{H}_{n_a}^\pm$  به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{n_a}^\pm &= \beta + \omega_m(\hat{b}^\dagger - \alpha)(\hat{b} - \alpha) - \delta[(\hat{b} - \alpha) + (\hat{b}^\dagger - \alpha)] \\ &= \beta - \frac{\delta^2}{\omega_m} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b}. \end{aligned} \tag{77}$$

همان گونه که از شکل این هامیلتونی مشخص است، این هامیلتونی با عملگر  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$  جابه‌جا می‌شود و بنابراین هامیلتونی در پایه ویژه‌حالت‌های  $|n\rangle_b$  قطری است.

با اعمال این تبدیل، ویژه‌مقادیر انرژی سامانه را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E_{j n_a n_b} &= \beta - \frac{\delta^2}{\omega_m} + \omega_m n_b \\ &= \omega_e(n_a + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}\omega_e + \frac{(-1)^j}{4}R_{n_a}\Delta + n_b\omega_m - \alpha_{j, n_a}^2. \end{aligned} \tag{78}$$

با اثر دادن هامیلتونی روی این حالت‌ها، به عبارت زیر برای هامیلتونی می‌رسیم

$$\begin{aligned} H &= H \sum \{ |n_a+1, g\rangle \langle n_a+1, g| + |n_a, e\rangle \langle n_a, e| \} \\ &= \xi(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) |n_a+1, g\rangle \langle n_a+1, g| \\ &\quad + (\omega_e - \omega_e) |n_a+1, g\rangle \langle n_a+1, g| - \omega_e \\ &\quad - \sqrt{n_a+1}(g - \eta(\hat{b} + \hat{b}^\dagger))(|n_a+1, g\rangle \langle n_a, e| + |n_a, e\rangle \langle n_a+1, g|) \\ &\quad + n_a \xi (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + n_a \omega_e + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b}. \end{aligned} \tag{61}$$

اگر برای حالت‌های  $|n_a, e\rangle$  و  $|n_a+1, g\rangle$  نمایش‌های ماتریسی زیر را در نظر بگیریم

$$|n_a+1, g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n_a, e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{62}$$

می‌توانیم هامیلتونی را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$H_{n_a} = h(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) + H'_{n_a}. \tag{63}$$

که در آن داریم

$$h(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) = \omega_e + \omega_m n_a + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \xi n_a (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \tag{64}$$

و

$$H'_{n_a} = \begin{pmatrix} \Delta - \xi(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) & g - \eta(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ \sqrt{n_a+1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

در این رابطه  $\Delta$  بیانگر وادیدگی بین اتم و فوتون و برابر  $\omega_e - \omega_e$  است.

در حالت کلی یک سامانه اسپین - بوزون با هامیلتونی

$$H_{sp} = h(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) + w(s; \hat{b}, \hat{b}^\dagger) \tag{66}$$

در نظر می‌گیریم. اگر بتوانیم  $w(s; \hat{b}, \hat{b}^\dagger)$  را به صورت زیر به دو قسمت اسپینی و بوزونی تجزیه کنیم،

$$w(s; \hat{b}, \hat{b}^\dagger) = f(\hat{b}, \hat{b}^\dagger)M(s), \tag{67}$$

با استفاده از قطری کردن دو قسمت بوزونی می‌توانیم ویژه

حالت‌ها و ویژه مقادیر  $H_{sp}$  را به دست آوریم

$$H_{sp}^{(+,-)} = h(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) + \lambda_{(+,-)} f(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) \tag{68}$$

که  $\lambda_+$  و  $\lambda_-$  ویژه مقادیر ماتریس  $M(s)$  هستند.

حال به مسأله سامانه ایتومکانیکی باز می‌گردیم. زمانی که

بین ضرایب جفت‌شدگی سامانه رابطه زیر برقرار باشد

$$\gamma_1 = \frac{\Omega}{\gamma} [n_a - n_b + \cos^2 \theta_{n_a} - \alpha^2] \quad (۸۶)$$

$$\gamma_2 = \frac{\Omega}{\gamma} [n_a - n_b + 1 - \cos^2 \theta_{n_a} - \alpha^2]$$

است. صفر شدن فاز دینامیکی برای این سامانه منوط به برقراری معادله زیر است:

$$\omega_e \left( n_a + \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \omega_e + \frac{(-1)^j}{\gamma} R_{n_a} \Delta + n_b \omega_m - \frac{\xi^2}{\gamma \omega_m} \left( \gamma n_a + (-1)^j R_{n_a} + 1 \right) = 0. \quad (۸۷)$$

### ۵. جمع‌بندی

در این مقاله، سامانه‌های اپتومکانیکی برهنه و مجهز به اتم را بررسی و با استفاده از ویژه‌حالت‌های سامانه‌های مزبور، فاز هندسی آنها را محاسبه کردیم. مهمترین نتایج این مقاله عبارتند از:

۱. فاز هندسی سامانه‌های مزبور علاوه بر وابستگی به کمیت‌های کوانتومی سامانه اپتومکانیکی مانند: تعداد فوتون‌های میدان، تعداد برانگیختگی‌های آینه متحرک و وادیدگی اتم-میدان، به پارامترهای کلاسیکی سامانه هم چون طول، جرم و بسامد کاواک و بسامد آینه نیز وابسته است.

۲. نشان داده شد که در شرایط خاص می‌توان به طور هم‌زمان فاز دینامیکی سامانه‌های اپتومکانیکی بررسی شده را نیز صفر کرد.

۳. با توجه به ایده استفاده از فاز هندسی سامانه‌های اپتومکانیکی در درگاه‌های کوانتومی تغییر فاز، امکان مهندسی و کنترل فاز مورد نظر در تجربه از طریق پارامترهای متعدد سامانه‌های اپتومکانیکی امکان‌پذیر خواهد بود.

### سپاس‌گزاری

نویسندگان، از معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهرکرد برای حمایت‌های انجام شده قدردانی می‌نمایند.

ویژه‌حالت‌های سامانه به صورت حاصل ضرب تانسوری حالت‌های پوشیده اتم-میدان و حالت آینه هستند،

$$|\psi_j\rangle = |jn_a\rangle \otimes |n_b\rangle_{jn_a}. \quad (۷۹)$$

حالت اتم-میدان برابر

$$|n_a\rangle = \cos \theta_{n_a} |n_a + 1, g\rangle + \sin \theta_{n_a} |n_a, e\rangle \quad (۸۰)$$

و

$$|n_a\rangle = -\sin \theta_{n_a} |n_a + 1, g\rangle + \cos \theta_{n_a} |n_a, e\rangle \quad (۸۱)$$

است که ضرایب  $\cos \theta_{n_a}$  و  $\sin \theta_{n_a}$  با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$\tan \theta_{n_a} = \frac{\gamma \eta \sqrt{n_a + 1}}{\xi (1 \pm R_{n_a})}. \quad (۸۲)$$

حالت آینه نیز از جابه‌جایی حالت‌های عددی میدان به دست می‌آید

$$|n_b\rangle_{jn_a} = \hat{D}_b(\alpha_{jn_a}) |n_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_b!}} (\hat{b}^\dagger - \alpha_{jn_a})^{n_b} \hat{D}_b(\alpha_{jn_a}) |0\rangle. \quad (۸۳)$$

مشاهده می‌شود که در صورتی که  $\xi = \eta = 0$  باشد، ویژه‌حالت‌ها و ویژه‌مقادیر سامانه، همان گونه که انتظار می‌رود به صورت ویژه‌حالت‌ها و ویژه‌مقادیر مدل جینز کامینگز درخواهند آمد. برای محاسبه فاز هندسی، عبارت‌های زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\langle \psi_j | U^\dagger(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} U(\theta, \varphi) | \psi_j \rangle = \langle \psi_j | e^{i\theta \hat{J}_y} e^{i\varphi \hat{J}_z} (-i\hat{J}_z) e^{-i\varphi \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y} | \psi_j \rangle \quad (۸۴)$$

$$\langle \psi_j | U^\dagger(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} U(\theta, \varphi) | \psi_j \rangle = \langle \psi_j | e^{i\theta \hat{J}_y} e^{i\varphi \hat{J}_z} e^{-i\varphi \hat{J}_z} (-i\hat{J}_y) e^{-i\theta \hat{J}_y} | \psi_j \rangle.$$

با جایگذاری ویژه‌حالت‌ها درون رابطه فاز هندسی داریم

$$\begin{aligned} \langle \psi_j | \hat{J}_x | \psi_j \rangle &= 0, \quad \langle \psi_j | \hat{J}_y | \psi_j \rangle = 0, \\ \langle \psi_1 | \hat{J}_z | \psi_1 \rangle &= \frac{1}{\gamma} [n_a - n_b + \cos^2 \theta_{n_a} - \alpha^2], \\ \langle \psi_2 | \hat{J}_z | \psi_2 \rangle &= \frac{1}{\gamma} [n_a - n_b + 1 - \cos^2 \theta_{n_a} - \alpha^2]. \end{aligned} \quad (۸۵)$$

بنابر این فاز هندسی حالت‌ها برابر

## مراجع

- Phys. Rev. Lett.* **51** (1994) 2539.
7. D P Kleckner, "Micro-Optomechanical Systems for Quantum Optics", PhD Thesis, University of California (2010).
  8. W Wang and L C Wang, *Journal of the Korean Physical Society*, **57** (2010) 705.
  9. Y Chang, H Ian, and C P Sun, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** (2009) 1.
  1. A Ekert, M Ericsson, P Hayden, J A Iones, D K L Oi, V Vedral, *Journal of Modern Optic*, **47** (2000) 2502.
  2. J Anandan, *Nature*, **360** (1992) 307.
  3. M V Berry, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 392** (1984) 45.
  4. Y Aharonov and J S Anandan, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1593.
  5. I Guridi, A Carollo, S Bose, and V Vedral, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 2.
  6. S W S Mckeever, M Moskovitch, and P D C K Law,