

## پایداری حل‌های منفرد معادله غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم

محمد مهدی گلشن<sup>۱</sup> و مریم مرادی<sup>۲</sup>

۱. بخش فیزیک دانشگاه شیراز

۲. گروه فیزیک دانشگاه الزهرا (س)

(دریافت مقاله: ۸۱/۱۲/۴ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۵/۲)

### چکیده

در این مقاله به بررسی تحلیلی پایداری حل‌های منفرد معادلات غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم (CQNLS) که حاکم بر انتشار تپ الکترومغناطیسی در فیبرهای نوری غیر خطی می‌باشد، پرداخته می‌شود. با فرض اینکه به حل‌های منفرد معادله مذکور اختلالی به شکل  $\delta u(\xi, T) = (a(T) + ib(T))e^{i\beta\xi}$  وارد می‌شود، با استفاده از نظریه عملگرها نشان می‌دهیم که اختلال وارده رشد ندارد و حل منفرد CQNLS پایدار می‌ماند. همچنین نشان می‌دهیم که تحت این اختلال، اولین وردش هامیلتونی CQNLS صفر بوده و دومین مرتبه وردش مثبت خواهد بود که نشانگر پایداری حل‌های منفرد این معادله تحت اثر اختلال وارده است.

واژه‌های کلیدی: اثرات غیر خطی، CQNLS، حل‌های منفرد، پایداری

### ۱. مقدمه

سالیته‌های اپتیکی از جمله موضوعاتی است که، چه از جنبه نظری و چه از جنبه کاربردی، در چند دهه اخیر شدیداً مورد توجه قرار گرفته است [۱، ۲، ۳]. به‌طور کلی امواج منفرد (که سالیته‌های اپتیکی نوع خاصی از آن می‌باشند) در محیط‌هایی که اثرات غیر خطی، اثر پاشندگی را خنثی می‌کنند ایجاد می‌شوند [۴]. از آنجا که قطبش محیط تابعی از میدان الکتریکی اعمال شده می‌باشد، با افزایش شدت میدان، اثرات غیرخطی در قطبش ظاهر شده که استفاده از آن در معادلات ماکسول منجر به معادله غیر خطی شرودینگر می‌شود [۵]. اگر در بسط قطبش بر حسب میدان الکتریکی (محیط همسانگرد فرض می‌شود) جملات مرتبه سوم و مرتبه پنجم در نظر گرفته شوند، رفتار موج الکترومغناطیسی توسط معادله غیر خطی شرودینگر مرتبه سوم (Cubic Nonlinear Schrödinger Equation) و مرتبه پنجم (Cubic-Quintic Nonlinear Schrödinger Equation) بیان می‌شود که اختصاراً به ترتیب CNLSE و CQNLS نامیده می‌شوند. اثرات

جمله غیر خطی مرتبه پنجم، بخصوص در فیبرهای سیلیکای آلانئیده، حائز اهمیت بوده و موضوع گزارشات متعددی را تشکیل می‌دهد [۶، ۷].

حل‌های منفرد (سالیته‌های CNLSE) و پایداری آنها از روش‌های عددی و همچنین تحلیلی و به خصوص هنگامیکه در یک محیط غیرخطی دو مؤلفه میدان الکتریکی با یکدیگر جفت می‌شوند (معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه سوم) به طور مشروح گزارش شده است [۸، ۹، ۱۰]. از طرف دیگر هر چند که گزارشاتی در خصوص پایداری حل‌های منفرد CQNLS به روش‌های عددی در دسترس است [۱۱، ۱۲]، تاکنون پایداری تحلیلی این قبیل حل‌ها بررسی نشده است. هدف این مقاله بررسی شرایط پایداری حل‌های منفرد CQNLS می‌باشد. برای این منظور پس از معرفی CQNLS حل‌های منفرد آن را به شکل عمومی  $u_s(\xi, T) = e^{i\beta\xi} u_s(T)$ ، که در آن  $\xi$  و  $T$  به ترتیب مختصه معرف محور فیبر و مختصه زمانی است ارائه نموده،  $u_s(T)$  را تعیین می‌نماییم. شکل این حل و نیز نمودار

قطبش الکتريکی به صورت زیر بر حسب میدان الکتريکی اعمال شده، نوشته می‌شود [۱۴]:

$$\vec{P} = \chi \vec{E} + \chi^{(2)} \left| \vec{E} \right|^2 \vec{E} + \chi^{(3)} \left| \vec{E} \right|^4 \vec{E} + \dots, \quad (1)$$

که در آن  $\chi^{(j)}$  ( $j=1,2,3,\dots$ )،  $j$  امین مرتبه پذیرفتاری، برای مواد همسانگرد اعدادی ثابت می‌باشند. با استفاده از رابطه (۱) در تعریف جابه‌جایی الکتريکی (در فضای فوریه):

$$\vec{D}(\omega) = \vec{E}(\omega) + \epsilon \vec{P}(\omega) \equiv \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \quad (2)$$

که در آن  $\epsilon(\omega)$  گذردهی الکتريکی (تأخیری) [۱۵] می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\epsilon(\omega) = (1 + \epsilon \pi \chi^{(1)}) + [\epsilon \pi \chi^{(2)} \left| \vec{E}(\omega) \right|^2 + \epsilon \pi \chi^{(3)} \left| \vec{E}(\omega) \right|^4 + \dots]. \quad (3)$$

جمله اول سمت راست معادله (۳) گذردهی الکتريکی خطی و جمله دوم، معرف گذردهی الکتريکی غیر خطی می‌باشند. با توجه به تعریف ضریب شکست محیط،  $n = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ ، ضریب شکست محیط غیر خطی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$n = n_0 + n_2 \left| \vec{E}(\omega) \right|^2 + n_4 \left| \vec{E}(\omega) \right|^4 + \dots, \quad (4)$$

که در آن  $n_0 = (1 + \epsilon \pi \chi^{(1)})$  ضریب شکست خطی بوده و سایر جملات شامل  $n_2$ ،  $n_4$ ، و... اثرات غیر خطی در ضریب شکست خواهند بود [۱۶].

حال با استفاده از قانون آمپر-ماکسول و قانون فاراده، معادله حاکم بر انتشار تپهای عرضی الکترومغناطیسی در امتداد محور فیبر (محور Z ها) و در فضای فوریه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^2 E(z, \omega)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) E(z, \omega) = 0. \quad (5)$$

اگر تبدیل فوریه عبارت زیر

$$E(z, t) = A(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c., \quad (6)$$

را به عنوان حل معادله (۵) در آن جایگزین نموده، از مشتق مرتبه دوم دامنه در امتداد محور فیبر صرف نظر نماییم، خواهیم داشت،

$$i \frac{\partial A(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} + (k - k_0) A(z, \omega - \omega_0) = 0, \quad (7)$$

که در آن  $k = \sqrt{\epsilon(\omega)} \frac{\omega}{c}$ ، ثابت انتشار بوده و با توجه به رابطه (۳) شامل اثرات پاشندگی و همچنین غیر خطی می‌باشد. اکنون با توجه به تعریف  $k$ ، آنرا حول  $\omega_0$  بسط داده و از جملات مرتبه سوم و بالاتر صرف نظر می‌نماییم، در این صورت،

تحوالی آن نشان می‌دهد که  $u(\xi, T)$  در حقیقت یک موج منفرد است.

برای بررسی پایداری جوابهای منفرد CQNLSE، فرض می‌کنیم که جوابها دچار اختلالی به شکل  $u_s(T) \rightarrow u_s(T) + \delta u(\xi, T)$  که در آن  $\delta u(\xi, T) = (a(T) + ib(T)) e^{\gamma \xi}$  عامل اختلال است، می‌گردند. با استفاده از نظریه عملگرها [۱۳، ۹] نشان می‌دهیم که  $\gamma^2$  برای CQNLSE منفی بوده که در نتیجه عامل اختلال در راستای محور فیبر نوسانی و فاقد رشد می‌باشد. به عبارت دیگر جوابهای CQNLSE تحت این قبیل اختلالات در امتداد محور فیبر پایدار می‌باشند. همچنین این اختلال را در هامیلتونی CQNLSE به کار گرفته نشان می‌دهیم که وردش مرتبه اول هامیلتونی نسبت به این اختلال صفر بوده و وردش مرتبه دوم آن مثبت است که این نتیجه نیز تأییدی بر پایداری حلها تحت اینگونه اختلالات خواهد بود.

سازمان این مقاله به ترتیب زیر می‌باشد. پس از مقدمه، در قسمت دوم از بسط قطبش الکتريکی بر حسب توانهای میدان الکتريکی در معادلات ماکسول استفاده نموده، معادله غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم، CQNLSE، را استخراج می‌نماییم. قسمت سوم این مقاله به ارائه حلهای منفرد CQNLSE اختصاص دارد. در قسمت چهارم، معیار پایداری جوابهای منفرد CQNLSE و بویژه علامت  $\gamma^2$  را تعیین نموده و نشان می‌دهیم که اختلالات فوق الذکر رشد نخواهند داشت. وردشهای هامیلتونی CQNLSE قسمت پنجم را در بر می‌گیرد. در این قسمت نشان خواهیم داد که وردش مرتبه اول هامیلتونی CQNLSE تحت اختلالات فوق الذکر صفر و وردش مرتبه دوم آن مثبت است. قسمت آخر این مقاله به بحث و نتیجه گیری اختصاص خواهد داشت.

## ۲. انتشار تپ الکترومغناطیسی در فیبرهای نوری غیرخطی

واکنش مواد دی الکتريک نسبت به اعمال میدانهای الکترومغناطیسی قوی، غیرخطی خواهد بود. واکنش غیر خطی مواد مربوط به حرکت غیر هارمونیک الکترونها مقید تحت تأثیر میدان اعمالی است [۱۴]. واکنش مواد دی الکتريک (با صرف نظر کردن از اثرات مغناطیسی) به میدانهای الکترومغناطیسی قوی، در قالب قطبش الکتريکی ماده، غیر خطی خواهد بود. برای یک دی الکتريک همسانگرد و همگن،

طول موج  $\gamma_2$  در رابطه (۱۵) منفی [۱۱] و در نتیجه  $\delta$  منفی خواهد بود. چنانچه خواهیم دید، علامت  $\delta$  (و یا  $\gamma_2$ ) در پایداری حلهای انفرادی CQNLSE نقش اساسی خواهند داشت.

### ۳. حلهای منفرد CQNLSE

برای به دست آوردن حلهای معادله CQNLSE بدین ترتیب عمل می‌کنیم که حلی به صورت  $u(\xi, T) = u_s(T)e^{i\beta\xi}$  را در معادله (۱۶) جایگزین نموده، معادله دیفرانسیل حاصل برای  $u_s(T)$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial T^2} - \beta u_s + |u_s|^2 u_s + \delta |u_s|^4 u_s = 0, \quad (18)$$

را مستقیماً انتگرال گیری می‌نماییم. حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$u(\xi, T) = \frac{\sqrt{2}c_1}{[c_1 \cosh(\gamma_2 c_1 T) + 1]^{1/2}} e^{i\beta\xi}, \quad (19)$$

که در این رابطه  $c_1^2 = 2\beta$  و  $c_1^2 = 1 + \frac{\delta}{\beta} \delta c_1^2$  می‌باشد [۱۹]. از طرف دیگر به سهولت می‌توان نشان داد که اگر در رابطه (۱۹) تبدیلات  $T \rightarrow T - w\xi$  و  $\beta\xi \rightarrow \beta\xi + wT$  مجدداً حلی از CQNLSE خواهد بود [۱۱، ۱۶]:

$u(\xi, T) = \sqrt{2}c_1 e^{i(\beta\xi + wT)} [1 + c_1 \cosh(\gamma_2 c_1 (T - w\xi))]^{-1/2}$ . (۲۰)

یاد آوری می‌شود که شکل اخیر حل معادله CQNLSE در مختصات ثابت (آزمایشگاه) می‌باشد. در شکل‌های ۱ و ۲، نمودار رابطه (۲۰) بر حسب  $\xi$  و  $T$  و به ترتیب برای  $\delta$  های منفی و مثبت نمایش داده شده است. همان گونه که از رابطه (۲۰) و این نمودارها مشخص است، به ازای  $\delta$  های منفی (و یا  $\gamma_2$  های منفی) حلها بدون تغییر شکل در امتداد محور فیبر ( $\xi$ ) و نیز زمان ( $T$ ) منتشر می‌شوند، پس حلی که در رابطه (۲۰) آمده است در واقع یک موج منفرد است.

### ۴. معیار تحلیلی پایداری حلهای منفرد CQNLSE

همان گونه که قبلاً نیز آمد، هدف از این گزارش، بررسی پایداری حلهای CQNLSE تحت اختلالاتی به شکل،

$$u_s(T) \rightarrow u_s(T) + \delta u(\xi, T) = u_s(T) + (a(T) + ib(T))e^{i\gamma\xi}, \quad (21)$$

می‌باشد. یاد آوری می‌شود که اگر در این اختلال  $\gamma^2$  منفی باشد، اختلال رشد نداشته و جوابهای CQNLSE پایدارند. بنابراین، در ادامه به بحث در مورد تعیین علامت  $\gamma^2$  خواهیم پرداخت. با

$$k - k_0 = k_{nli} \Big|_{\omega=\omega_0} + k'(\omega - \omega_0) \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2} k'' (\omega - \omega_0)^2 \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (8)$$

که در آن مطابق معمول:

$$k_0 = n_0 \frac{\omega_0}{c}, \quad (9)$$

$$k_{nli} \Big|_{\omega=\omega_0} = (n_2 \bar{E}(\omega_0))^2 + n_4 \bar{E}(\omega_0)^4 + \dots \frac{\omega_0}{c}, \quad (10)$$

$$\beta_1 = k' = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{V_g}, \quad (11)$$

$$\beta_2 = k'' = \left( \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{V_g} \right) \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (12)$$

روابط (۱۱) و (۱۲) به ترتیب معرف پاشندگی محیط و پاشندگی سرعت گروه می‌باشند. با جایگزینی روابط (۱۰) الی (۱۲) در رابطه (۸)، استفاده از نتیجه در رابطه (۷) و نهایتاً استفاده از معکوس تبدیلات فوریه، معادله غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma_1 |A|^2 A + \gamma_2 |A|^4 A = 0, \quad (13)$$

که در آن

$$\gamma_1 = n_2 \frac{\omega_0}{c}, \quad (14)$$

و

$$\gamma_2 = n_4 \frac{\omega_0}{c}, \quad (15)$$

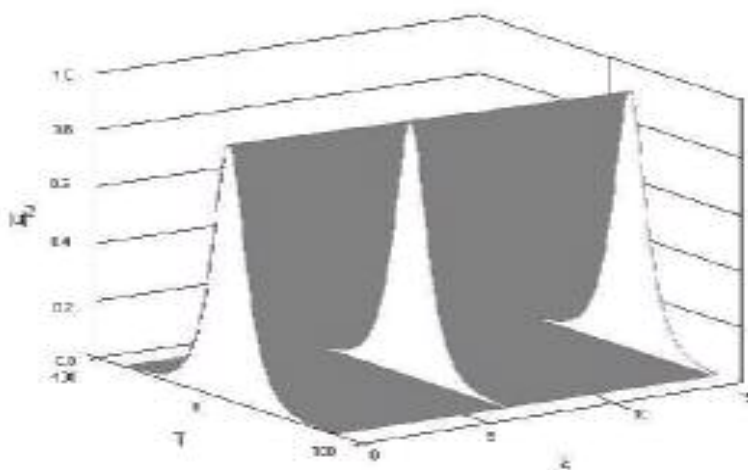
خصوصیات غیر خطی فیبر را تعیین می‌کنند. معادله (۱۳) با تغییر مناسبی از متغیرها (بر حسب متغیرهای بدون بعد و در مختصاتی که همراه تب حرکت می‌کند) [۱۷، ۱۸] به شکل متعارف زیر در خواهد آمد:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + |u|^2 u + \delta |u|^4 u = 0, \quad (16)$$

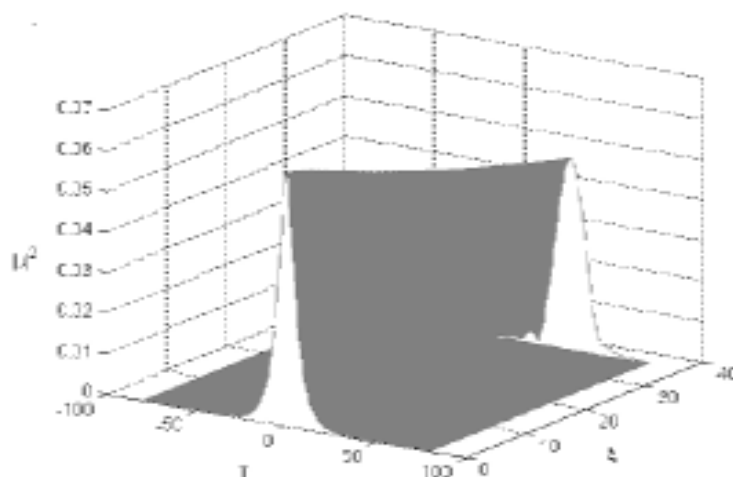
که در آن  $\xi$  معرف مختصه‌ای در امتداد فیبر،  $T$  معرف زمان،

$$\delta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2 z_c}, \quad (17)$$

بوده و  $z_c$  طول پاشندگی (طولی که در آن پاشندگی اهمیت پیدا می‌کند) [۱۷] می‌باشد. معادله (۱۶) همان CQNLSE است که پایداری و شکل حلهای منفرد آن موضوع اصلی این مقاله است. خاطر نشان می‌شود که در استخراج CQNLSE، معادله (۱۶)، از اتلاف در فیبر صرف نظر شده است. این چشمپوشی به‌ویژه در فیبرهایی از جنس سیلیکا و در طول موج  $\lambda = 1/55 \mu m$  که در آن اتلاف کمینه است، به واقعیت نزدیک است [۱۸]. در این



شکل ۱. نمودار انتشار تپ الکترومغناطیسی در فیبر نوری مرتبه پنجم به ازای  $\delta < 0$ .



شکل ۲. نمودار انتشار تپ الکترومغناطیسی در فیبر نوری غیرخطی مرتبه پنجم به ازای  $\delta > 0$ .

توجه می‌شود که  $u_s$  در دو رابطه اخیر قسمت مستقل از  $\xi$  در رابطه (۱۹) است. اگر معادله (۲۳) را با ضرب طرفین از چپ در  $L_0^{-1}$  برای  $b$  حل نموده و حاصل را در معادله (۲۲) بکار گیریم، خواهیم داشت:

$$L_1 a = -\gamma^2 L_0^{-1} a, \tag{26}$$

که پس از ضرب در  $a^*(T)$  از سمت چپ و انتگرال گیری روی  $T$ ، می‌توان آن را برای  $\gamma^2$  به صورت زیر حل نمود:

$$\gamma^2 = \frac{\langle a | L_1 | a \rangle}{-\langle a | L_0^{-1} | a \rangle}, \tag{27}$$

جایگزینی جواب اختلال یافته در CQNLS و فرض آنکه اختلال مورد نظر به قدری کوچک است که می‌توان از توانهای دوم و بالاتر آن صرف نظر نمود، خواهیم داشت:

$$L_1 a = \gamma b, \tag{22}$$

$$L_0 b = -\gamma a \tag{23}$$

که در آن دو عملگر هرمیتی  $L_1$  و  $L_0$  عبارتند از:

$$L_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \beta + u_s^2 + \delta u_s^4, \tag{24}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \beta + \gamma u_s^2 + \delta \delta u_s^4, \tag{25}$$

اگر تمامی ویژه مقادیر  $L_1$  منفی بوده، حلها پایدار خواهند بود. از طرف دیگر می توان نشان داد که  $L_1$  دارای سه ویژه مقدار  $\beta$  و  $-\beta$  و  $3\beta$  می باشد [۱۹] که ویژه مقدار صفر (ویژه حالت متناظر با ویژه مقدار صفر  $\langle s | \frac{d}{dT} | s \rangle$  است که با توجه به جایگزیده بودن حلهای منفرد CQNLSE بر  $|s\rangle$  عمود است [۱۹]) در رابطه (۳۰) ظاهر نشده و  $\lambda$  باید بین  $-\beta$  و  $3\beta$  قرار گیرد. بنابراین شرط دیگری برای حلهای منفرد CQNLSE را مورد بررسی قرار می دهیم. به ازای  $\lambda = 0$  در رابطه (۳۰) خواهیم داشت،

$$g(\cdot) = \sum_m \frac{c_m^\gamma}{\lambda_m} \quad (31)$$

در حقیقت علامت  $g(\cdot)$  در رابطه (۳۱) بیانگر علامت  $\lambda$  در رابطه (۳۰) خواهد بود. چرا که اگر  $g(\cdot)$  مثبت باشد، برای آنکه  $g(\lambda)$  برابر با صفر شود، باید  $\lambda < 0$  باشد که در نتیجه آن  $\gamma$  منفی و حلها پایدارند در غیر این صورت، اگر  $g(\cdot)$  منفی باشد، حلها ناپایدار خواهند بود. برای تعیین علامت  $g(\cdot)$ ، از بسط  $|s\rangle$  بر حسب ویژه حالتها  $L_1$  (رابطه (۲۹)) و معادله ویژه مقادری  $L_1^{-1}$  (با ویژه مقادیر  $\lambda_m^{-1}$ ) استفاده نموده، خواهیم داشت،

$$g(\cdot) = \langle s | L_1^{-1} | s \rangle \quad (32)$$

اگر از معادله حاکم بر  $u_s(T)$ ، معادله (۱۶) (به بخش اول مراجعه شود)، نسبت به  $\beta$  مشتق گرفته و از، رابطه (۲۵) استفاده کنیم رابطه زیر نتیجه خواهد شد،

$$L_1 \frac{\partial}{\partial \beta} |s\rangle = |s\rangle \quad (33)$$

با استفاده از روابط (۳۲) و (۳۳) نتیجه می شود که،

$$g(\cdot) = \left\langle s \left| \frac{\partial s}{\partial \beta} \right. \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_s|^2 dT = \frac{1}{2} \frac{dP}{d\beta} \quad (34)$$

که در آن  $P = \int_{-\infty}^{+\infty} |u_s|^2 dT$  معرف توان تب الکترومغناطیسی است [۹، ۱۰]. استفاده از قسمت مستقل از  $\beta$  ی رابطه (۱۹)، در رابطه (۳۴) نتیجه می دهد که:

$$\frac{dP}{d\beta} = -\frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{\beta} c_\beta^\gamma} \frac{1}{\delta} \quad (35)$$

بدین ترتیب، پایداری حلهای منفرد CQNLSE بستگی به علامت  $\delta$  خواهد داشت. همان گونه که در آخر بخش ۲ آمد، در

که در رابطه اخیر، ضربهای داخلی را بر حسب نمادهای دیراک<sup>۱</sup> توصیف کرده ایم. پس از بسط  $|a\rangle$  بر حسب ویژه حالتها  $L_0$  و با توجه به آنکه  $L_0$  تنها دو ویژه مقدار صفر و  $-\beta$  دارد [۱۹]، به سهولت می توان نشان داد که  $\langle a | L_0^{-1} | a \rangle$  همیشه منفی و بنابراین منجر کسر در رابطه (۲۷) همواره مثبت است. در نتیجه علامت  $\gamma$  همان علامت صورت کسر می باشد. اکنون اگر پیشینه صورت کسر منفی باشد، آنگاه کل کسر و در نتیجه  $\gamma$  منفی بوده و اختلال مورد بحث نوسانی خواهد بود. برای تعیین علامت پیشینه عبارت  $\langle a | L_1 | a \rangle$  از ضرایب نامعین لاگرانژ استفاده می کنیم [۱۳]،

$$L_1 |a\rangle = \lambda |a\rangle + q |s\rangle \quad (28)$$

که در آن  $|s\rangle \equiv u_s(T)$ ،  $q$  و  $\lambda$  ضرایب نامعین لاگرانژ می باشند. با توجه به آنکه  $|a\rangle$  و  $|s\rangle$  متعامد و بهنجار می باشند [۱۹] (این دو قید منشاء وجود دو ضریب نامعین لاگرانژ در معادله اخیر است) مشاهده می شود که  $\lambda$  در معادله (۲۸) همان صورت کسر در رابطه (۲۷) است. پس برای تعیین علامت  $\gamma$  نیاز به تعیین علامت بزرگترین مقدار  $\lambda$  خواهد بود. برای تعیین علامت  $\lambda$  به طریق زیر عمل می نمایم،

با توجه به آنکه  $L_1$  عملگری هرمیتی است، ویژه حالتها آن مجموعه کاملی را تشکیل می دهند. بنا براین  $|a\rangle$  و  $|s\rangle$  را می توان بر حسب این ویژه حالتها بسط داد:

$$|a\rangle = \sum_m a_m |F_m\rangle \quad , \quad |s\rangle = \sum_m c_m |F_m\rangle \quad (29)$$

استفاده از رابطه (۲۹) در رابطه (۲۸) و تعامد  $|a\rangle$  و  $|s\rangle$  عبارت زیر را نتیجه می دهد:

$$g(\lambda) = \sum_m \frac{|c_m^\gamma|^2}{\lambda_m - \lambda} = 0 \quad (30)$$

که در آن  $\lambda_m$  ها ویژه مقادیر عملگر  $L_1$  می باشند. رابطه (۳۰) بیانگر این واقعیت است که بزرگترین مقدار  $\lambda$  باید بین دو ویژه مقدار بزرگتر عملگر  $L_1$  واقع شود (در غیر این صورت جملات معادله (۳۰) هم علامت بوده و جمع جبری آنها صفر نخواهد شد). اگر تمامی ویژه مقادیر  $L_1$  مثبت باشند، آنگاه  $\lambda$  نیز مثبت بوده و حلها ناپایدارند. همچنین

۱. به عنوان مثال،  $\langle f | L | g \rangle = \int dT f^*(T) L g(T)$  و نظایر آن.

$\delta u$  و  $(\delta u)_T$  صرف نظر می‌نماییم. پس از انجام عملیاتی که طولانی ولی سراسر است، می‌توان نشان داد که،

$$\delta^\gamma H_N = -\langle b|L_0|b\rangle - \langle a|L_1|a\rangle. \quad (40)$$

اگر از همان روشی که در بخش قبل برای تعیین علامت  $\langle a|L_0^-|a\rangle$  به کار رفته است مجدداً استفاده کنیم، می‌توان نشان داد که،

$$\langle b|L_0|b\rangle = -\beta|c|^2 < 0. \quad (41)$$

توجه می‌شود،  $-\beta$ ، تنها ویژه مقداری است که ویژه حالت متناظر با آن (با احتمال  $|c|^2$ ) در بسط  $|b\rangle$  ظاهر می‌شود. همچنین با توجه به مطالب بخش قبل،  $\langle a|L_1|a\rangle$  نیز منفی است. بدین ترتیب وردش مرتبه دوم  $H_N$  مثبت خواهد بود و در نتیجه این اختلالات باعث کمینه شدن  $H_N$  می‌شود. پس تحت این قبیل اختلالات جوابهای منفرد CQNLSE پایدار هستند.

### ۶. نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از نظریه عملگرها، معیار پایداری حلهای منفرد معادلات غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم، CQNLSE، ارائه شده است. برای این منظور نشان داده ایم که اگر حلهای منفرد CQNLSE دچار اختلالی به صورت  $\delta u = (a(T) + ib(T))e^{i\gamma\xi}$  شوند،  $\gamma^2$  منفی بوده و در نتیجه در امتداد محور  $\xi$  (محور فیر در فیبرهای نوری) این اختلال رشد ندارد. تعیین علامت  $\gamma^2$  وابسته به علامت ویژه مقادیر عملگر هرمیتی  $L_1$  (رابطه (۲۷)) خواهد بود. از آنجا که برای QNLSE،  $L_1$  دارای ویژه مقادیر مثبت و منفی است، علاوه بر این، علامت مشتق توان تپ الکترومغناطیسی نسبت به ثابت انتشار،  $\frac{dP}{d\beta}$  لازم خواهد بود. در این مقاله روش تعیین علامت این کمیت را ارائه نموده، نشان داده ایم که مثبت است و در نتیجه  $\gamma^2$  برای CQNLSE همواره منفی و حلهای پایدار خواهند بود. وردشهای مرتبه اول و دوم هامیلتونی نیز ارائه شده، نشان داده ایم که این هامیلتونی تحت این قبیل اختلالات کمینه می‌باشد که این خود تأییدی بر پایداری حلهای منفرد QNLSE می‌باشد.

CQNLSE،  $\delta$  منفی بوده و در نتیجه رابطه (۳۵) همیشه مثبت است. پس حلهای منفرد CQNLSE، تحت اختلالاتی به صورت رابطه (۲۱)، همانند CNLSE، پایدار می‌باشند [۸].

### ۵. وردش هامیلتونی CQNLSE

به عنوان تأییدی بر نتیجه به دست آمده، هامیلتونی [۲۰] CQNLSE را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$H = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} (|u_T|^2 - |u|^4 - \frac{2}{\gamma} \delta |u|^6) dT. \quad (36)$$

در این رابطه  $u_T = \frac{\partial u}{\partial T}$  می‌باشد. اگر  $u$  و  $u^*$  را به عنوان مختصه و تکانه تعمیم یافته در نظر گرفته و از قلاب پواسون استفاده شود، می‌توان نشان داد که هامیلتونی (۳۶)، CQNLSE را نتیجه می‌دهد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد معادله (۱۸) که از CQNLSE به ازای  $u(\xi, T) = u_s(T)e^{i\beta\xi}$  به دست می‌آید نیز از هامیلتونی زیر،

$$(37)$$

$$H_N = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} (|u_{sT}|^2 - |u_s|^4 - \frac{2}{\gamma} \delta |u_s|^6) dT + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} |u_s|^2 dT,$$

حاصل می‌شود. ابتدا وردش مرتبه اول هامیلتونی (۳۷) را تحت اختلالی به شکل رابطه (۲۱) محاسبه می‌کنیم:

$$\delta H_N = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} (|u_{sT} + (\delta u)_T|^2 - |u_s + \delta u|^4 - \frac{2}{\gamma} \delta |u_s + \delta u|^6) dT + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} |u_s + \delta u|^2 dT. \quad (38)$$

با صرف نظر کردن از مرتبه‌های دوم و بالاتر  $\delta u$  و همچنین  $(\delta u)_T (= \frac{\partial}{\partial T}(\delta u))$  به سهولت می‌توان نشان داد که،

$$\delta H_N = 0. \quad (39)$$

نتیجه اخیر بدان معنی است که به ازای این گونه اختلالات، هامیلتونی CQNLSE بهینه است. برای تعیین اینکه هامیلتونی CQNLSE تحت این اختلال بیشینه یا کمینه است، وردش مرتبه دوم آن را محاسبه می‌نماییم. برای این منظور اختلال مورد بحث را در معادله (۳۷) قرار داده از مرتبه‌های سوم و بیشتر

## مراجع

12. S Gatz and J Herrmann, *IEEE J. Quantum Electron.* **28** (1992) 1732.
13. E A Kuznetsov, A M Rubenchik and V E Zakharov, *Phys. Rep.* **142**,3 (1986) 103-165.
14. R W Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, San Diego, CA, 1992).
15. L D Landau and E M Lifshits, *Electrodynamics of Continuous Media*, (Oxford Pergaman Press, 1963) Translated from Russian.
16. D I Pushkarov and S Tanev, *Opt. Commun.*, **124** (1996) 354.
17. G P Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, (Academic Press, 1995).
18. A Hasegawa, *Solitons in Optical Communication*, (Clarendon Press, 1995).
۱۹. م. مرادی، "بررسی پایداری حلهای منفرد معادلات جفت شده غیر خطی شرودینگر مرتبه پنجم"، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه الزهراء(س)، شهریور ۱۳۸۱.
20. J M Arnold, *Phys. Rev. E.* **60** (1999) 1.
1. T Georges and F Favre, *J. Opt. Soc. Am. B*, **10**, (1993) 1880.
2. V E Zakharov and A B Shabat, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **61**, (1971) 118 [*Sov. Phys. JETP*, **34**, (1972) 62]; **64**, (1973) 1627 [**37**, (1973) 823].
3. A Hasegawa and F D Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142, (1973) 171.
4. H Russell, *American Scientist*, **80**, (1992), 350-361.
5. P G Drazin and R S Johnson, *Solitons: An introduction*, Cambridge University Press (1989).
6. S Tanev, D I Pushkarov, *Opt. Commun.*, **141**, (1997) 322.
7. S Gatz, J Herrmann, *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**, (1991) 2296.
8. D J Mitchell and A W Snyder, *J. Opt. Soc. Am. B*, **10**, (1993) 1572.
9. Y Chen, *Phys. Rev. E*, **57**, 3, (1998) 3542.
10. Y Chen and J. Atai, *Opt. Commun.*, **150** (1998) 381-389.
11. S Cowan, R H Enns, S S Rangnekar and S Sanghera, *Can. J. Phys.* **64** (1986) 311.