

حل معادله تحولی DGLAP برای فرایند ترکش گلوئون در LO و NLO

غلامرضا برون و صلاح الدین زرین

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه

پست الکترونیکی: boroun@razi.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۴/۲۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۹/۳۰)

چکیده

در این مقاله ما معادله تحولی DGLAP^۱ را برای تابع ترکش گلوئون به مزون یا باریون در مرتبه LO^۲ و NLO^۳ با استفاده از روش لاپلاس به دست می آوریم. با استفاده از این روش، معادلات به دست آمده برای مزون های $g \rightarrow \eta_c$ و $g \rightarrow j/\psi$ را تحول می دهیم تا درستی این روش را نشان دهیم. در این روش نیازی به محاسبه توابع در فضای لاپلاس نیست. از روش لاپلاس فقط برای ساده سازی معادلات استفاده می شود.

واژه های کلیدی: ترکش، تحول، لاپلاس

۱. مقدمه

محققان نظری برای محاسبه سطح مقطع در مرتبه NLO معمولاً تابع ترکش و توابع شکافت و ثابت تزویج را در مرتبه NLO محاسبه می کنند. برای محاسبه سطح مقطع ناشی از ترکش پارتونی لازم است که تابع ترکش به مقیاس های انرژی بالاتر تحول داده شود. معادلات DGLAP [۱-۳]، معادلات تحولی هستند که برای تحول تابع ساختار و توابع ترکش استفاده می شوند. تاکنون چندین روش برای حل این معادلات استفاده شده است از جمله روش ملین^۴ [۴، ۵] و روش مشخصه^۵ [۶]. با این روش ها، توابع ساختار و توابع ترکش به

دست آمده در مقیاس های اولیه را در مقیاس های مختلفی تحول می دهند. اما تبدیلات معکوس ملین سخت و در بعضی موارد به صورت تقریبی به دست می آید و همچنین روش مشخصه یک روش تقریبی می باشد. روش دیگری که در چند سال اخیر توانسته توابع ساختار پروتون، گلوئون، توابع توزیع کوارکی و نیز توابع ترکش کوارکی را به درستی تحول دهد، روش لاپلاس می باشد. این روش ابتدا توسط مارتین برای حل معادلات تحولی تابع ساختار به کار گرفته شده که جواب های بسیار دقیقی در توافق با نتایج آزمایشگاهی به دست آورده است [۷-۱۲]. در محاسبه معکوس لاپلاس، روش به کار گرفته شده تقریباً دقیق است و دقت این کار توسط چندین مقاله اثبات شده است [۷-۱۶]. حل معادله تحولی DGLAP به روش لاپلاس نیازمند محاسبه تبدیلات لاپلاس توابع شکافت و توابع ساختار یا ترکش در مقیاس اولیه می باشد. از معایب

۱. Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi

۲. Leading-order

۳. Next to leading-order

۴. Mellin

۵. Characteristics

که در این معادله $P_{gg}^o(z, \mu)$ و $P_{gg}^l(z, \mu)$ و $P_{gg}^v(z, \mu)$ به ترتیب تابع شکافت در مرتبه LO و NLO و NNLO می‌باشند [۲، ۳، ۱۹ و ۲۰] و $\alpha_s(\mu)$ ثابت تزیوج باز بهنجار در QCD است. لازم به ذکر است که، تابع شکافت برای توابع توزیع و توابع ترکش در مرتبه LO یکسان می‌باشند اما برای مراتب بالاتر از مرتبه LO تابع شکافت برای توابع توزیع و توابع ترکش باهم کاملاً متفاوت می‌باشند. تابع تحولی DGLAP را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس ساده کرد و آن را به فضای s برد و سپس به راحتی می‌توان آن را دوباره به فضای z برگرداند. برای این که بتوانیم از روش لاپلاس استفاده کنیم، از تغییر متغیرهایی استفاده می‌کنیم که معادله (۱) و همچنین توابع شکافت را به شکل ساده‌تری از می‌آورد. این تغییر متغیرها به شکل زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} z &\equiv \exp(-v), & x &= \exp(-w), \\ \hat{D}(v, \mu) &\equiv D(\exp(-v), \mu), \\ \hat{P}(v, \mu) &\equiv P(\exp(-v), \mu). \end{aligned} \quad (3)$$

با این تغییر متغیرها ما می‌توانیم معادله (۱) را به صورت زیر بنویسیم.

$$\mu \frac{\partial \hat{D}(v, \mu)}{\partial \mu} = \int_0^v \hat{P}_{gg}(v-w, \mu) \hat{D}(w, \mu) dw. \quad (4)$$

با تعریف لاپلاس زیر می‌توانیم معادله بالا را به فضای لاپلاس ببریم:

$$\begin{aligned} d(s, \mu) &= L[\hat{D}(v, \mu); s] = \int_0^\infty \hat{D}(v, \mu) \exp(-sv) dv, \\ p(s, \mu) &= L[\hat{P}_{gg}(v, \mu); s]. \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از معادلات (۴) و (۵) داریم،

$$d(s, \mu) = d(s, \mu_0) R(s, \mu). \quad (6)$$

که در معادله بالا $R(s, \mu) = \exp\left[\int_{\mu_0}^{\mu} p(s, \mu) \frac{d\mu}{\mu}\right]$ که μ_0 مقیاس اولیه و μ مقیاس تحولی می‌باشد. برای حل معادله (۶) ما باید معادله R را که به صورت تابع نمایی می‌باشد، بسط دهیم. با بسط دادن قسمت نمایی و استفاده از لاپلاس معکوس داریم:

$$\hat{D}(v, s) = L^{-1}\left[d(s, \mu) \left(1 + \int_{\mu_0}^{\mu} p(s, \mu) \frac{d\mu}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\int_{\mu_0}^{\mu} p(s, \mu) \frac{d\mu}{\mu}\right)^2 + \dots\right); v\right]. \quad (7)$$

در معادله (۷) توابع شکافت در مرتبه LO و NLO به صورت زیر ساده می‌شوند:

این روش این است که علاوه بر این که محاسبات در مرتبه NLO کار سختی است، در هر تحولی به روش لاپلاس باید برای برگشت به فضای اولیه از تبدیل معکوس لاپلاس استفاده شود که کار مشکلی می‌باشد و اکثراً به صورت عددی انجام می‌شود.

در این کار با استفاده از روش لاپلاس می‌خواهیم تابع ترکش گلوئون را تحول دهیم. برای تحول تابع ترکش از تبدیل لاپلاس فقط برای ساده کردن فرمول‌ها استفاده می‌کنیم. در این روش نیازی به بردن توابع به فضای لاپلاس نیست [۱۶]. برای اثبات درستی این روش، از توابع ترکش $g \rightarrow \eta_c$ ، $g \rightarrow j/\psi$ استفاده کرده‌ایم که روش محاسبه تابع ترکش و همچنین تحول آن در مرتبه LO در مراجع [۱۷ و ۱۸] آورده شده است. ما تحول این توابع را در مرتبه‌های NLO، LO به دست آورده‌ایم. مقایسه بین آنها نشان می‌دهد که تفاوت مشهودی بین آنها وجود دارد. چون محاسبه سطح مقطع در مرتبه NLO نیازمند محاسبه تابع ترکش و تابع شکافت و ثابت تزیوج در مرتبه NLO می‌باشد، این کار می‌تواند برای محاسبه سطح مقطع در مرتبه NLO و مراتب بالاتر مفید باشد.

۲. فرمول بندی تابع تحولی DGLAP در LO و NLO

تابع تحولی DGLAP بدون در نظر گرفتن سهم کوارکی به صورت زیر می‌باشد [۱ - ۳].

$$\mu \frac{\partial D_{g \rightarrow O}(z, \mu)}{\partial \mu} = \int_z^1 P_{g \rightarrow g}\left(\frac{z}{x}, \mu\right) D_{g \rightarrow O}(x, \mu) \frac{dx}{x}, \quad (1)$$

که $P_{g \rightarrow g}$ تابع شکافت آلتارلی-پاریزی^۱ برای شکافت گلوئون به گلوئونی با کسر تکانه z می‌باشد. تابع شکافت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} P_{gg}(z, \mu) &= P_{gg}^o(z, \mu) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}\right) P_{gg}^l(z, \mu) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}\right)^2 P_{gg}^v(z, \mu) + \dots, \\ P_{gg}(z, \mu) &= P_{gg}^o(z, \mu) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}\right) P_{gg}^l(z, \mu) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}\right)^2 P_{gg}^v(z, \mu) + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

۱. Altarelli-Parisi

آوردن هر تابع ترکش گلوئونی در هر مقیاسی کافی است که شکل جهانی تابع ترکش را در مقیاس اولیه به دست آوریم. در این صورت می توان شکل یا مقدار تابع ترکش را در مقیاس های مختلف به دست آورد. برای اثبات درستی این روابط ما از توابع ترکش گلوئون به $g \rightarrow \eta_c, j/\psi$ که در مراجع [۱۷ و ۱۸] به دست آمده اند استفاده می کنیم. در این مراجع توابع ترکش در مقیاس m_c (جرم کوارک افسون می باشد) به دست آمده اند و در مرتبه LO تحول داده شده اند. شکل تحلیلی این توابع ترکش در مقیاس اولیه به صورت زیر می باشد:

$$D_{g \rightarrow \eta_c}(z, m_c) = \frac{\alpha_s(m_c) |R(\circ)|^2}{24\pi m_c^2} \left[3z - 2z^2 + 2(1-z) \ln(1-z) \right], \quad (12)$$

$$D_{g \rightarrow \psi}(z, m_c) = \frac{5\alpha_s(m_c) |R(\circ)|^2}{1152\pi^2} \int_0^z dr \int_{(r+z)^{1/2}}^{(1+r)^{1/2}} dy \frac{1}{(1-y)^2 (y-r)^2 (y^2-r)^2} \sum_{i=0}^2 z^i \times (f_i(r, y) + g_i(r, y)) \frac{1+r-2y}{2(y-r)\sqrt{y^2-r}} \ln \frac{y-r+\sqrt{y^2-r}}{y-r-\sqrt{y^2-r}}. \quad (13)$$

در معادله بالا توابع f و g به صورت زیر تعریف شده اند:

$$f_0(r, y) = r^2(1+r) \left(3+12r+12r^2 \right) - 16r^2(1+r)(1+2r)y - 2r(3-9r-21r^2+7r^3)y^2 + 8r(4+3r+3r^2)y^3 - 4r(9-3r-4r^2)y^4 - 16(1+3r+3r^2)y^5 + 8(6+7r)y^6 - 32y^7,$$

$$f_1(r, y) = -2r(1+5r+19r^2+7r^3)y + 96r^2(1+r)y^2 + 8(1-5r-22r^2-2r^3)y^3 + 16r(7+3r)y^4 - 8(5+7r)y^5 + 32y^6,$$

$$f_2(r, y) = r(1+5r+19r^2+7r^3) - 48r^2(1+r)y - 4(1-5r-22r^2-2r^3)y^2 - 8r(7+3r)y^3 - 8r(7+3r)y^4 + 4(5+7r)y^5 - 16y^6,$$

$$g_0(r, y) = r^2(1-r) \left(3+24r+23r^2 \right) - 4r^2(7-3r-12r^2)y - 2r^2(17+22r-7r^2)y^2 + 4r^2(13+5r-6r^2)y^3 - 8r(1+2r+5r^2+2r^3)y^4 - 8r(3-11r-6r^2)y^5 + 8(1-2r-5r^2)y^6,$$

$$p^{LO}(s, \mu) = a(\mu) p^s(s), \quad (8)$$

در معادلات بالا $a(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{2\pi}$ و ثابت ساختار در QCD به صورت زیر می باشد:

$$\alpha(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{\ln\left(2 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)\right)}{2 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} + \dots \right), \quad (9)$$

که در این معادله Λ پارامتر قطع QCD می باشد و $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f$ و $\beta_1 = 102 - \frac{38}{3}N_f$ و N_f تعداد طعم های کوارکی فعال می باشد. حال می توانیم معادله (۷) را با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس از فضای s به فضای v برگردانیم و متعاقباً آن را به فضای z ببریم. در مرتبه LO تابع ترکش تحول یافته به صورت زیر به دست می آید:

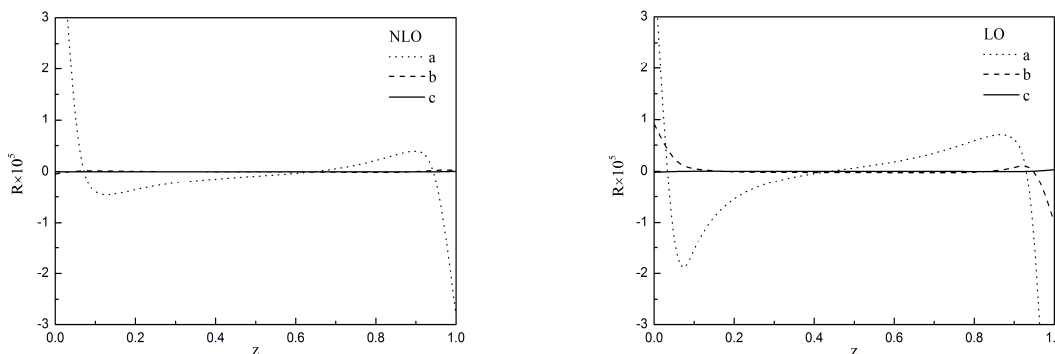
$$D^{LO}(z, \mu) = D(z, \mu_0) + A_0(\mu, \mu_0) \int_x^1 D(z, \mu_0) P^0\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z} + \left(\frac{A_1(\mu, \mu_0)^2}{2} \int_x^1 P^0\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z} \right) \times \int_z^1 D(y, \mu_0) P^0\left(\frac{z}{y}\right) \frac{dy}{y} + \dots, \quad (10)$$

و در مرتبه NLO به صورت زیر می باشد،

$$D^{NLO}(z, \mu) = D(z, \mu_0) + \int_x^1 D(z, \mu_0) \left(A_0(\mu, \mu_0) P^0\left(\frac{x}{z}\right) + A_1(\mu, \mu_0) P^1\left(\frac{x}{z}\right) \right) \frac{dz}{z} + \int_x^1 \left(A_0(\mu, \mu_0) P^0\left(\frac{x}{z}\right) + A_1(\mu, \mu_0) P^1\left(\frac{x}{z}\right) \right) \frac{dz}{z} \int_z^1 D(y, \mu_0) \times \left(A_0(\mu, \mu_0) P^0\left(\frac{z}{y}\right) + A_1(\mu, \mu_0) P^1\left(\frac{z}{y}\right) \right) \frac{dy}{y} + \dots. \quad (11)$$

در معادلات (۱۰) و (۱۱) $A_0(\mu, \mu_0) = \int_{\mu_0}^{\mu} a(\mu) \frac{d\mu}{\mu}$

همان طور که از شکل معادلات (۱۰) و (۱۱) مشخص است این دو معادله، معادله های کلی هستند و می توان برای تحول هر تابع ترکشی استفاده شوند. برای به دست



شکل ۱. منحنی a اختلاف بین چهار جمله اول و دو جمله اول را مشخص می‌کند. منحنی b اختلاف بین شش جمله اول و چهار جمله اول را نشان می‌دهد و منحنی c اختلاف بین ده جمله اول و شش جمله اول را نشان می‌دهد. شکل بالایی مربوط به معادله (۱۰) و شکل پایینی مربوط به معادله (۱۱) می‌باشد.

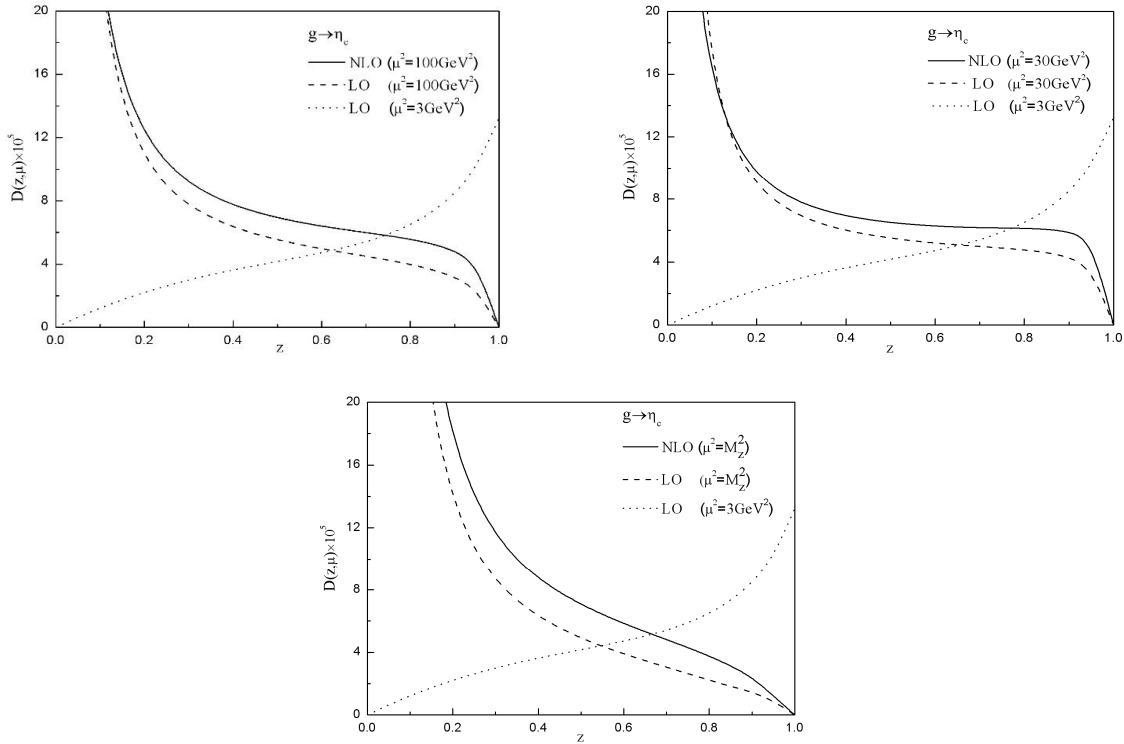
جمله اول و شش جمله اول بسیار کمتر می‌شود حتی این اختلاف نسبت به جملات مشابه در مرتبه LO کمتر است و در انتها اختلاف بین ده جمله اول و شش جمله اول تقریباً صفر می‌شود و با توجه به این توصیف‌ها می‌توان از جملات ده به بعد در معادلات (۱۰) و (۱۱) صرف نظر کرد. در شکل‌های ۲ ما تابع ترکش $g \rightarrow \eta_c$ را در مقیاس‌های مختلف 30 GeV و 100 و M_Z^2 تحول داده‌ایم، همان طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود تحول در مرتبه NLO در این سه شکل بالاتر از تحول در مرتبه LO می‌باشد و هر اندازه مقیاس تحول بالاتر می‌رود میزان انحنای تحول در هر دو مرتبه بیشتر می‌شود و فاصله منحنی‌ها در Z های پایین بیشتر می‌شود. مقدار عددی پارامترهایی که در محاسبات عددی استفاده شده، $\alpha_s^{NLO}(2m_c) = 0.201$ و $\alpha_s^{LO}(2m_c) = 0.26$ ، $m_c = 1/5 \text{ GeV}$ می‌باشند. در شکل‌های ۳ ما تابع ترکش $g \rightarrow j/\psi$ را در مقیاس‌های مشابه به $g \rightarrow \eta_c$ رسم کرده‌ایم. همان طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، اختلاف چشم‌گیری بین تحول در مرتبه LO و NLO وجود دارد. این شکل‌ها نشان می‌دهند هر اندازه مقیاس تحول بالا رود اختلاف بین مرتبه LO و NLO افزایش می‌یابد. با این اوصاف چون سطح مقطع ترکش به صورت خطی وابسته به تابع ترکش می‌باشد، پس سطح مقطع در مرتبه NLO بیشتر از سطح مقطع در LO می‌باشد. بنابراین محاسبه تحول تابع ترکش در NLO می‌تواند محاسبات تئوری

$$g_1(r, y) = -2r^2(1+r)(1-r)(1+vr)y + 8r^2(1+3r)(1-4r)y^2 + 4r(1+10r+5vr^2+4r^3)y^3 - 8r(1+29r+6r^2)y^4 - 8(1-8r-5r^2)y^5,$$

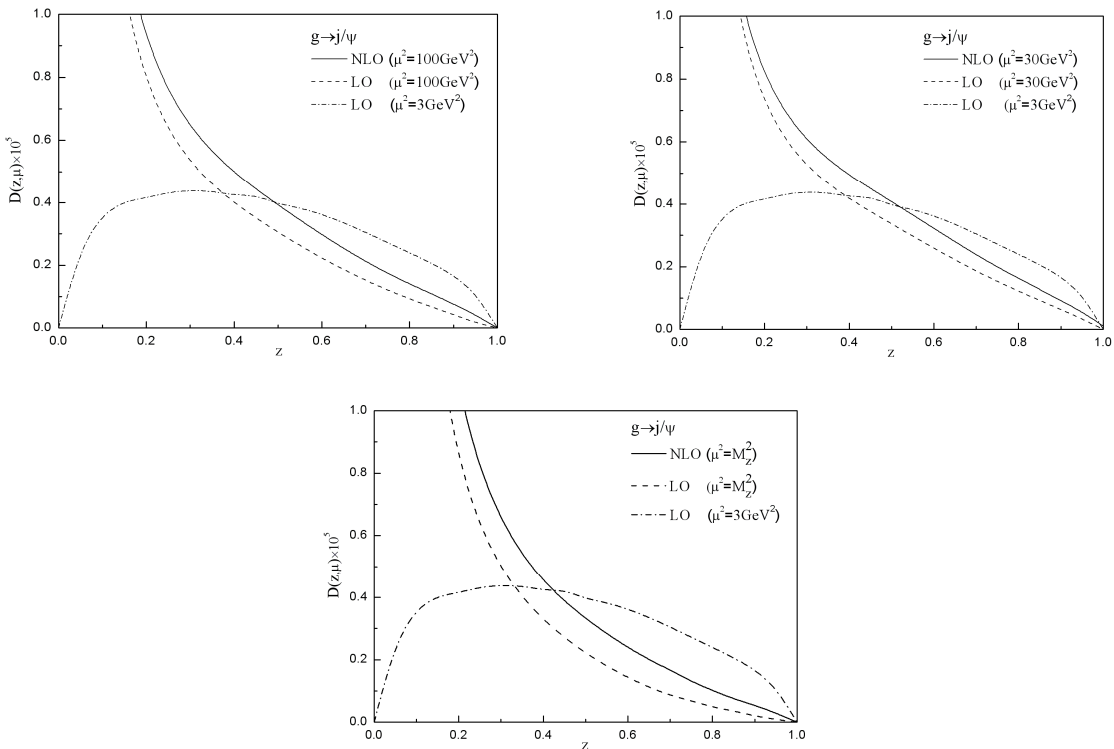
$$g_2(r, y) = r^2(1+r)(1-r)(1+vr) - 4r^2(1+3r)(1-4r)y - 2r(1+10r+5vr^2+4r^3)y^2 + 4r(1+29r+6r^2)y^3 + 4(1-8r-5r^2)y^4.$$

۳. بحث و نتیجه‌گیری

با جایگذاری معادلات (۱۲) و (۱۳) در معادلات (۱۰) و (۱۱) ما می‌توانیم تحول توابع ترکش $g \rightarrow \eta_c$ و $g \rightarrow j/\psi$ را در هر مقیاس دلخواهی به ترتیب در مرتبه LO و NLO به دست آوریم. برای محاسبه تحول تابع ترکش g به مزون‌های مورد نظر ما فقط در معادله‌های (۱۰) و (۱۱) تنها ده جمله اول بسط‌ها را در نظر گرفته‌ایم و از بقیه جملات چشم‌پوشی کرده‌ایم. در شکل ۱ اختلاف بین تعداد جملات (R) این معادلات نشان داده شده است. همان طور این شکل‌ها نمایش می‌دهند در مرتبه LO اختلاف زیادی بین چهار جمله اول و دو جمله اول وجود دارد (منحنی نقطه چین) اما اختلاف بین چهار جمله اول و شش جمله اول بسیار کمتر است (منحنی خط تیره) تا اینکه اختلاف بین ده جمله اول و شش جمله اول ناچیز و تقریباً برابر صفر می‌شود. شکل دوم این اختلاف‌ها را برای معادله (۱۱) نشان می‌دهد. در این شکل اختلاف بین چهار جمله اول و دو جمله اول زیاد است اما اختلاف بین چهار



شکل ۲. تابع ترکش $g \rightarrow \eta_c$ در مقیاس های 30 و 100 و M_Z^2 را از بالا به پایین نشان می دهد.



شکل ۳. تابع ترکش $g \rightarrow j/\psi$ در مقیاس های 30 و 100 و M_Z^2 را از بالا به پایین نشان می دهد.

جدول ۱. احتمال تابع ترکش و میانگین پارامتر ترکش را در مقیاس 30 GeV^2 و مقیاس اولیه در مرتبه LO و NLO نشان می‌دهد.

	$\langle z \rangle$			F.P		
	LO(μ_0)	LO(μ)	NLO(μ)	LO(μ_0)	LO(μ)	NLO(μ)
$g \rightarrow \eta_c$	۰/۶۶	۰/۳۲	۰/۳۷	$4/5 \times 10^{-5}$	$8/4 \times 10^{-5}$	$8/9 \times 10^{-5}$
$g \rightarrow j / \psi$	۰/۴۴	۰/۲۲	۰/۲۵	$3/2 \times 10^{-6}$	$5/8 \times 10^{-6}$	$6/1 \times 10^{-6}$

جدول ۲. احتمال تابع ترکش و میانگین پارامتر ترکش را در مقیاس M_Z^2 و مقیاس اولیه در مرتبه LO و NLO نشان می‌دهد.

	$\langle z \rangle$			F.P		
	LO(μ_0)	LO(μ)	NLO(μ)	LO(μ_0)	LO(μ)	NLO(μ)
$g \rightarrow \eta_c$	۰/۶۶	۰/۱۴	۰/۲۱	$4/5 \times 10^{-5}$	$1/2 \times 10^{-4}$	$1/5 \times 10^{-4}$
$g \rightarrow j / \psi$	۰/۴۴	۰/۱۳	۰/۱۵	$3/2 \times 10^{-6}$	$7/9 \times 10^{-6}$	$9/6 \times 10^{-6}$

$\int_0^1 P_{qq}^*(z, \mu) dz = 0$ اما چون این شرط برای مرتبه NLO وجود ندارد پس احتمال ترکش کواریکی تغییر می‌کند [۱۶]. در مورد تابع ترکش گلوئونی، علاوه بر اینکه احتمال تابع ترکش در مرتبه NLO تغییر می‌کند، در مرتبه LO نیز تغییر می‌کند، چون که $\int_0^1 P_{gg}^*(z, \mu) dz \neq 0$.

را به داده‌های آزمایشگاهی مربوط به سطح مقطع نزدیک‌تر کند. ما اختلاف بین احتمال تابع ترکش تحول (F.P) یافته و میانگین پارامتر ترکش $\langle z \rangle$ در مرتبه NLO را با LO در مقیاس 30 GeV^2 و M_Z^2 در جداول ۱ و ۲ نمایش داده‌ایم. احتمال تابع ترکش کواریکی در مرتبه LO با تحول دادن تغییر نمی‌کند، به دلیل اینکه

مراجع

1. Y L Dokshitzer, *Sov. Phys. JETP*, **46** (1977) 641.
2. V N Gribov and L N Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **15** (1972) 438.
3. G Altarelli and G Parisi, *Nucl. Phys. B* **126** (1977) 298.
4. A Cafarella, C Coriano, and M Guzzi, *Nucl. Phys. B* **748** (1), (2006) 253.
5. A V Kotikov and L N Lipatov, *Nucl. Phys. B* **661**(1) (2003) 19.
6. R Baishya and J K Sarma, *Phys. Rev. D* **74**(10) (2006) 107702.
7. M M Block, L Durand, P Ha, and D W McKay, *Eur. Phys. J. C* **69** (2010) 425.
8. M M Block, L Durand, P Ha, and D W McKay, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 094010.
9. M M Block, L Durand, P Ha, and D W McKay, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 054009.
10. M M Block, *Eur. Phys. J. C* **65** (2010) 1.
11. M M Block, *Eur. Phys. J. C* **68** (2010) 683.
12. M M Block, L Durand, P Ha, and D W McKay, arXiv: 1004.1440 (2010).
13. H Khanpour, A Mirjalili, and S Atashbar Tehrani, *arXiv preprint arXiv:1601.03508* (2016).
14. S A Tehrani, F Taghavi-Shahri, A Mirjalili, and M M Yazdanpanah, *Phys. Rev. D* **87**(11) (2013) 114012.
15. G R. Boroun, S Zarrin, *Eur. Phys. J. Plus*, **10** (2013) 1.
16. G R Boroun, S Zarrin, and S Dadfar, *Nucl. Phys. A* **953** (2016) 21.
17. E Braaten, and T C Yuan, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(11) (1993)1673.
18. J H Kuhn, H Schneider, *Phys. Rev. D* **24**, 2996 (1981), *Z. Phys. C* **11** (1981) 263.
19. G Curci, W Furmanski, and R Petronzio, *Nucl. Phys. B* **175** (1980) 27.
20. E G Floratos, C Kounnas and R Lacaze, *Nucl. Phys. B* **192** (1981) 417.