

روش انتگرال مسیر برای مدل هابارد تک نواره

سیاوش آزاکوف^۱، نادر حیدری^۲

۱. مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، زنجان

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده: در این مقاله طرق مختلفی که تاکنون با استفاده از روش انتگرال مسیر برای بررسی مدل هابارد تک نواره به کار رفته است، مرور می‌شود. تأکید این مقاله بر نحوه نوشتن کنش برای انتگرال مسیر است و درباره نتایجی که از این فرمولبندیها به دست می‌آید، کمتر بحث می‌شود.

رفته است. این مدل، مدلی فرمیونی است. اما تابع پارش را باید به صورت انتگرال مسیری روی میدانهای بوزونی نوشت تا بتوان تقریب نقطه زین یا تقریبهای غیراختلالی دیگر را به کار برد. ما فرض می‌کنیم که خواننده با فرمولبندی استاندارد انتگرال مسیر در کوانتوم آماری برای مدلهایی که هامیلتونی آنها به روش کوانتوم دوم به صورت چندجمله‌هایی از عملگرهای خلق و نابودی بوزونی یا فرمیونی نوشته شود، آشناست [۳، ۴، ۵]. چنان که خواهیم دید این بوزونش^۱ به روشهای مختلف میسر می‌شود و نتایجی که در تقریب میدان میانگین یا نقطه زین به دست می‌آید متفاوت‌اند.

ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش اول روشی را بررسی می‌کنیم که براساس تبدیل هابارد استراتانویچ، جمله برهم‌کنش به برانگیختگیهای اسپین و چگالی تجزیه می‌شود. در این حالت از تقریب نقطه زین می‌توان نمودار فاز مدل را به دست آورد. به‌ازای پاره‌ای مقادیر پارامترهای مدل، حالت پایه مغناطیسی (فرومغناطیسی یا پادفرومغناطیسی)، و به‌ازای پاره‌ای دیگر پارامغناطیسی خواهد بود [۱۱]. اما این روش تحت دوران اسپینی ناوردا نیست و برای بررسی حالت‌های مغناطش مارپیچی که گمان می‌رود در برهم‌زدن نظم ثیل^۲ با تغییر آلودگی در حد جفت‌شدگی قوی نقش دارند، فرمولبندی ناوردا تحت دوران اسپین لازم است. برای جبران این کاستی، نکات اصلی دو روش را ارائه می‌دهیم. روش اول بوزونش نظریه برحسب میدان بوزونی برداری است [۶] و روش دوم استفاده از محور کوانتوم وابسته به زمان (موهومی) برای هر اسپین است، یعنی از دستگاه مختصاتی برای اسپین استفاده می‌شود که در زمان (موهومی) و مکان تغییر می‌کند [۷، ۱۳]. در

در سالهای اخیر عمدتاً به دلیل مقاله اندرسون [۱] مدل هابارد تک‌نواره در کانون توجه قرار گرفته است. اندرسون در این مقاله مطرح می‌کند که باید بتوان براساس این مدل ابررسانایی گرم را توضیح داد. همچنین باور بر این است که این مدل، فیزیک اساسی سیستمهای فرمیونی با همبستگی قوی همچون ${}^3\text{He}$ مایع [۲]، عناصر انتقالی، و مواد فرمیون سنگین را دربردارد. متأسفانه فقدان روشهای قابل اطمینان نظری، پیشرفت در این زمینه را کند کرده است.

در این مقاله ما روشهای مختلف فرمولبندی مدل هابارد تک‌نواره به صورت انتگرال مسیر را بررسی می‌کنیم. امروزه انتگرال مسیر روشی غیرقابل جایگزینی، در فیزیک کوانتومی و به‌خصوص در نظریه دستگاههای بس‌ذره‌ای است. این روش ابزار ریاضی قابل انعطافی است که در مواردی که نمی‌توان از نظریه اختلال استاندارد استفاده کرد، بسیار مناسب است [۳، ۴، ۵]. بسط غیراختلالی انتگرال مسیر در بسیاری از موارد واضح و جذاب است و برای سیستمهای الکترونی با همبستگی قوی می‌توان از همان آغاز رفتارهای جمعی را در فرمولبندی قرار داد. این روش امکان می‌دهد که فرومغناطش، پادفرومغناطش و گذار فلز به عایق را در فرمولبندی واحدی به صورت نظریه میدان میانگین بررسی کرد. نتایجی که به دست می‌آید در حد جفت‌شدگی ضعیف با نظریه هارتری فوک سازگار است و در حد جفت‌شدگی قوی فیزیک کیفیتی را که تاکنون از معدودی نتایج دقیق به دست آمده است به دست می‌دهد. هدف ما ارائه روشهایی است که تاکنون در مقاله‌های موجود، برای به دست آوردن تابع پارش مدل هابارد تک‌نواره به کار

1. bosonization

2. Neel order

است که فقط برای نقاط شبکه‌ای دو الکترونی یعنی نقاط شبکه‌ای حاوی یک الکترون با اسپین بالا و یک الکترون با اسپین پایین، غیر صفر است. به این ترتیب در این مدل از انرژی دافعه کولنی بین الکترونها در نقاط شبکه‌ای مختلف صرف نظر شده است.

حد $U \rightarrow 0$ این مدل منجر به نوار قوی - پیوند ساده‌ای می‌شود زیرا با بسط فوریه عملگرهای خلق و نابودی، هامیلتونی قطری می‌شود. در این حد الکترونها آزادی حرکت دارند. در نقطه مقابل این حد یعنی $U \rightarrow \infty$ (یا $U \rightarrow 0$) الکترونها از تشکیل نقاط شبکه‌ای دو الکترونی پرهیز می‌کنند (چنین حالتی از فضای هیلبرت حذف می‌شود) و در مدل نیمه پر که تعداد الکترونها با تعداد نقاط شبکه‌ای برابر است، الکترونها جایگزیده و ساکن می‌شوند. اندرسون نشان داده است که در این حد ($U \gg t$) مدل هابارد را می‌توان در مرتبه اول اختلال برحسب t/U ، به هامیلتونی پادفرم مغناطیسی هایزنبرگ تبدیل کرد [۶].

در این بخش، با استفاده از انتگرال مسیر، حالتی مغناطیسی مدل هابارد را بررسی می‌کنیم. برای این منظور باید تابع پارش را محاسبه کنیم که در هنگرد بندادی بزرگ به صورت زیر است

$$Z(\beta, U, \mu) = \text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N}_e)} \right] \quad (2-1)$$

که در آن $\hat{N}_e = \sum_{i, \sigma} \hat{n}_i \sigma$ عملگر تعداد کل الکترونها، μ پتانسیل شیمیایی و $\beta = (k_B T)^{-1}$ است. تابع پارش را می‌توان به صورت انتگرال مسیر نوشت [۵]

$$Z(\beta, U, \mu) = \int \prod_{j, \sigma} D\bar{\eta}_{j\sigma}(\tau) D\eta_{j\sigma} e^S[\bar{\eta}, \eta] \quad (3-1)$$

$$S[\bar{\eta}, \eta] = \int_0^\beta d\tau \left[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) (\partial_\tau - \mu) \eta_{i\sigma}(\tau) + H(\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau), \eta_{i\sigma}(\tau)) \right] \quad (4-1)$$

$$H[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau), \eta_{i\sigma}(\tau)] = -t \sum_{\langle i, j \rangle, \sigma} \left[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) \eta_{j\sigma}(\tau) + \bar{\eta}_{j\sigma}(\tau) \eta_{i\sigma}(\tau) \right] + U \sum_i \bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau) \eta_{i\uparrow}(\tau) \bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau) \eta_{i\downarrow}(\tau) \quad (5-1)$$

که در آنها $\eta_{i\sigma}(\tau)$ و $\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)$ متغیرهای گراسمن هستند که شرط مرزی پادتناوبی در مورد آنها صادق است یعنی

$$\bar{\eta}_{i\sigma}(0) = -\bar{\eta}_{i\sigma}(\beta), \quad \eta_{i\sigma}(0) = -\eta_{i\sigma}(\beta)$$

جمله برهم‌کنش را در (۵-۱) می‌توان به مؤلفه‌های بار و اسپین تجزیه کرد:

هر دو حالت لاگرانژی نقطه زین تحت دوران اسپین ناورداست. در روش دوم که در بخش دوم ارائه می‌شود، افت و خیزهای مربوط به دوران دستگاه مختصات هم به‌طور طبیعی در فرمولبندی به حساب می‌آید.

در بخش سوم، انتگرال مسیر برای تابع پارش، برحسب عملگرهای هابارد نوشته می‌شود. این عملگرها عناصر جبری مدرج هستند و تونگلر و کاپ [۱۵] این روش را مناسبترین روش برای بررسی برهم‌کنشهای جایگزیده الکترونها می‌دانند. برای به‌دست آوردن تابع پارش به صورت انتگرال مسیر باید از نظریه حالتی همدوس تعمیم یافته برای جبرهای مدرج استفاده کرد [۲۱].

بخش چهارم، به روش معروف به ذرات برده^۱ اختصاص دارد. در این بخش روشی را که کوتلیار و روکنستین [۲۳] پیش نهاده‌اند به تفصیل بررسی می‌کنیم. با روش آنها، نتایجی را که بیشتر از روش وردشی گاتزویلر [۹، ۱۰] حاصل شده بود، می‌توان در تقریب نقطه زین پارامغناطیسی ایستا به‌دست آورد و به این ترتیب نه تنها ارتباطی بین دو روش محاسبه متفاوت پیدا می‌شود، بلکه راهی نظام مند برای بهبود و تعمیم نتایج پیش‌رو نهاده می‌شود. با این روش بررسی آثار ناشی از دماهای غیر صفر در مدل هابارد [۱۷] و بررسی میکروسکوپی منظم پارامترهای لاندائو در ^3He که مایعی کوانتومی است [۱۸] نیز انجام شده است. فرمولبندی اولیه کوتلیار و روکنستین، تحت دوران اسپین ناوردا نیست و چنانکه قبلاً گفته شد با این فرمولبندی نمی‌توان حالتی مغناطیسی مارپیچی را بررسی کرد. به این دلیل در دنباله این بخش درباره فرمولبندی ناوردا تحت دوران اسپین ذرات برده [۱۹، ۲۰] گفتگو می‌کنیم.

۱- بوزونش با استفاده از تبدیل هابارد - استراتانویچ

هامیلتونی مدل تک‌نواره هابارد معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle i, j \rangle, \sigma} \left[\hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + \text{h.c.} \right] + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \quad (1-1)$$

$$\hat{n}_{i\sigma} = \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{i\sigma}$$

که در آنها $\hat{c}_{i\sigma}^\dagger$ و $\hat{c}_{i\sigma}$ به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی الکترون (یا به‌طور عامتر فرمیون) با اسپین $\sigma = \uparrow$ یا $\sigma = \downarrow$ ، در نقطه‌ای از شبکه هستند که با شاخص i مشخص شده است. جمله اول، جمله جنبشی، نماینده جهش الکترون از نقطه شبکه‌ای i به نقطه شبکه‌ای i است و مزدوج هریتی آن نماینده عکس این فرایند است. دامنه کوانتومی این فرایند است و نمادگذاری $\langle i, j \rangle$ نشان می‌دهد که فرایند جهش محدود به نزدیکترین همسایه‌هاست، ضمن این که ترتیب خاصی برای نقاط شبکه‌ای در نظر گرفته شده است تا اتصالهای ممکن بین نزدیکترین همسایه‌ها دو بار در جمع به حساب نیایند. جمله دوم هامیلتونی فوق جمله دافعه کولنی محلی

اکنون می توان به گونه ای صوری، روی فرمیونها انتگرال گیری کرد و به کنش مؤثر برحسب میدانهای $\phi_i(\tau)$ و $\Delta_i(\tau)$ دست یافت

$$Z(\beta, U, \mu) = \int \prod_i D\phi_i(\tau) D\Delta_i(\tau) e^{-S_{\text{eff}}[\phi, \Delta]} \quad (12-1)$$

که

$$S_{\text{eff}}[\phi, \Delta] = \int_0^\beta d\tau \sum_i \frac{\phi_i(\tau)^\dagger + \Delta_i(\tau)^\dagger}{U} - \text{Tr} \ln M(\phi, \Delta) \quad (13-1)$$

در رابطه اخیر عناصر ماتریسی $M(\phi, \Delta)$ چنین اند

$$M_{ij, \sigma\sigma'} = \left\{ \left[(\partial_\tau - \mu + i\phi_i(\tau)\delta_{\sigma\sigma'} - \Delta_i(\tau)\sigma_{\sigma\sigma'}^z) - t_{ij}\delta_{\sigma\sigma'} \right] \times \delta(\tau - \tau') \right\} \quad (14-1)$$

با کنش مؤثر فوق می توان جواب میدان میانگینی برای میدان ϕ_i و Δ_i پیدا کرد که معادل تقریب فاز ساکن است. معادلات فاز ساکن چنین اند

$$\frac{\delta S}{\delta [i\phi_i(\tau)]} = -\frac{\tau i\phi_i(\tau)}{U} + \frac{\delta}{\delta [i\phi_i(\tau)]} \text{Tr} \ln M(\phi, \Delta) = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta [\Delta_i(\tau)]} = -\frac{\tau \Delta_i(\tau)}{U} + \frac{\delta}{\delta [\Delta_i(\tau)]} \text{Tr} \ln M(\phi, \Delta) = 0 \quad (15-1)$$

با استفاده از روابط

$$\frac{\delta}{\delta x} \text{Tr} \ln M(x) = \text{Tr} \left[M^{-1} \frac{\delta M}{\delta x} \right] \quad (16-1)$$

و

$$M_{ij, \sigma\sigma'}^{-1}(\tau, \tau') = G_{ij, \sigma\sigma'}(\tau, \tau') \quad (17-1)$$

معادلات (۱۵-۱) به صورت زیر درمی آیند

$$i\phi_i(\tau) = \frac{U}{\tau} \sum_{\sigma} G_{ii, \sigma\sigma'}(\tau, \tau^\dagger, \phi, \Delta) \quad (\text{الف } 18-1)$$

$$\Delta_i(\tau) = \frac{U}{\tau} \sum_{\sigma\sigma'} G_{ii, \sigma\sigma'}(\tau, \tau^\dagger, \phi, \Delta) \sigma_{\sigma\sigma'}^z \quad (\text{ب } 18-1)$$

که در آنها $G_{ij, \sigma\sigma'}$ تابع گرین تک ذره ای برای الکترونها در حضور

$$\bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau)\bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau) = \frac{\rho_i^\dagger(\tau)}{\tau} - [S_i^z(\tau)]^\dagger \quad (6-1)$$

$$\rho_i(\tau) = \bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau) + \bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau) \quad (7-1)$$

$$S_i^z(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\sigma_{\sigma, \sigma'}^z\eta_{i\sigma'}(\tau) =$$

$$\frac{1}{\tau} [\bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau) - \bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau)] \quad (8-1)$$

$\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ ماتریسهای پاولی هستند.

جمله برهم کنش به این شکل باز از جملاتی تشکیل شده است که شامل حاصلضربهای چهار عملگر خلق و نابودی اند. با استفاده از تبدیل هابارد استراتانوویچ، کنش را می توان برحسب ρ_i و S_i^z که نسبت به عملگرهای خلق و نابودی دوبار خطی اند و دو میدان جدید ϕ_i و Δ_i که به ترتیب با بار و اسپین جفت می شوند، نوشت

$$e^{-U} \int_0^\beta \bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau)\bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau) d\tau = e^{-U} \int_0^\beta \left[\frac{\rho_i(\tau)^\dagger}{\tau} - S_i^z(\tau)^\dagger \right] d\tau$$

$$= \int_{\tau \leq \tau' \leq \beta} \prod \frac{d\phi_i(\tau) d\Delta_i(\tau)}{\pi U} - \int_0^\beta d\tau \left[\frac{\phi_i(\tau)^\dagger}{U} + i\phi_i(\tau)\rho_i(\tau) + \frac{\Delta_i(\tau)^\dagger}{U} - \tau \Delta_i(\tau) S_i^z(\tau) \right] \quad (9-1)$$

تابع پارش به صورت زیر در می آید

$$Z(\beta, U, \mu) = \int \prod_{i\sigma} D\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) D\eta_{i\sigma}(\tau) D\phi_i(\tau) \times D\Delta_i(\tau) e^{-S[\bar{\eta}, \eta, \phi, \Delta]} \quad (10-1)$$

$$S[\bar{\eta}, \eta, \phi, \Delta] = \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_{i, \sigma} \bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) (\partial_\tau - \mu) \eta_{i\sigma}(\tau) - t \sum_{\langle i, j \rangle, \sigma} [\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\eta_{j\sigma}(\tau) + \bar{\eta}_{j\sigma}(\tau)\eta_{i\sigma}(\tau)] + \sum_i \left[\frac{\phi_i(\tau)^\dagger}{U} + i\phi_i(\tau)\rho_i(\tau) + \frac{\Delta_i(\tau)}{U} - \tau \Delta_i(\tau) S_i^z(\tau) \right] \right\} \quad (11-1)$$

در اینجا $(\pi, \pi) = \pi$ و K بردار موج در ناحیه بریلوئن، مغناطیسی یا کاسته است. همچنین

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k}} &= -\gamma t [\cos k_x a + \cos k_y a] \\ v_{\mathbf{k}} &= \left[\frac{1}{\gamma} (1 + \varepsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}) \right]^{1/2} \\ u_{\mathbf{k}} &= \left[\frac{1}{\gamma} (1 - \varepsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}) \right]^{1/2}\end{aligned}$$

و $E_{\mathbf{k}} = [\Delta^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2]^{1/2}$. عملگرهای $\alpha_{\mathbf{k}\sigma}$ و $\beta_{\mathbf{k}\sigma}$ به ترتیب نماینده شبه ذرات نوار پایین و نوار بالایی هستند که با گاف SDW به پهنای 2Δ از هم جدا شده‌اند. در حالت نیمه پر، نوار پایین، پر و نوار بالا خالی است و رفتار سیستم در دمای پایین عمدتاً تحت تأثیر افت و خیزهای کم انرژی است. در حد جفت‌شدگی قوی حالت SDW به حالت نئیل جایگزیده تبدیل می‌شود.

در روش فوق هم $\phi_i(\tau)$ و هم $\Delta_i(\tau)$ میدانهای اسکالرند و کنشی که پس از تبدیل هابارد استراتانویچ به دست می‌آید تحت دوران اسپین یعنی تبدیل $SU(2)$: $U_{\sigma\sigma'} \eta_{\sigma'} \Rightarrow \eta_{\sigma}$ ناوردا نیست (U ماتریس دوران $SU(2)$ است). در این فرمولبندی جوابهایی که در میدان میانگین به دست می‌آیند، تقارن اولیه مدل هابارد تحت دوران اسپین را می‌شکنند. برای حفظ تقارن دوران اسپین می‌توان از میدان برداری استفاده کرد. برای این منظور هامیلتونی مدل هابارد تک نواره را با چشمپوشی از مقداری ثابت که اهمیت ندارد به صورت زیر می‌نویسیم

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} [\hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + \text{h.c.}] - \frac{U}{\gamma} \sum_i \left[\sum_{\sigma\sigma'} \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \sigma_{\sigma\sigma'} \hat{c}_{i\sigma'} \right]^2 \quad (22-1)$$

تبدیل هابارد - استراتانویچ، کنش را به کنشی برحسب سه میدان کمکی تبدیل می‌کند که هر میدان با یکی از مؤلفه‌های اسپین جفت شده است. تابع پارشی که حاصل می‌شود چنین است

$$Z = \int \prod_{i\sigma} D\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) D\eta_{i\sigma}(\tau) D\Delta_i(\tau) e^{-S[\bar{\eta}, \eta, \Delta]} \quad (23-1)$$

$$\begin{aligned}S[\bar{\eta}, \eta, \Delta] &= \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_{i,\sigma} \bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) (\partial_\tau - \mu) \eta_{i\sigma}(\tau) \right. \\ &\quad \left. - t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} [\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) \eta_{j\sigma}(\tau) + \text{c.c.}] + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\frac{U}{\gamma}} \sum_i \Delta_i(\tau) \cdot \bar{\eta}_{i\sigma} \sigma_{\sigma\sigma'} \eta_{i\sigma'}(\tau) + \frac{1}{\gamma} \sum_i [\Delta_i(\tau)]^2 \right\} \quad (24-1)\end{aligned}$$

میدانهای متغیر در زمان $\phi_i(\tau)$ و $\Delta_i(\tau)$ است. ساده‌ترین جوابها برای این معادله جواب ایستاست: $\phi_i(\tau) = \phi_0$ و $\Delta_i(\tau) = \Delta$ ، و جواب ساده‌تر جوابی است که ϕ_i به i بستگی ندارد و Δ_i ثابت یک در میان است

$$\phi_i(\tau) = \phi_0, \quad \Delta_i = (-1)^i \Delta \quad (19-1)$$

اگر این جواب را در معادله (۱۱-۱) قرار دهیم، کنشی که به دست می‌آید صرفنظر از یک مقدار ثابت بی‌اهمیت، همان کنشی است که از هامیلتونی معروف موج چگالی اسپینی^۱ به دست می‌آید [۷].

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{SDW}} &= -t \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + \text{h.c.}) \\ &\quad - \sum_{i,\sigma} \Delta (-1)^i \sigma \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{i\sigma} - \bar{\mu} \hat{N}\end{aligned} \quad (20-1)$$

که در آن

$$\bar{\mu} = \mu + i\phi_0$$

و

$$\sigma = 1(-1) : \uparrow(\downarrow)$$

تعبیر فیزیکی Δ و ϕ_0 با مراجعه مجدد به معادلات (۱۸-۱) چنین می‌شود

$$\phi_0 = i \frac{U}{\gamma} \sum_{\sigma} \langle \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{i\sigma} \rangle$$

$$\Delta = (-1)^i \frac{U}{\gamma} \sum_{\sigma\sigma'} \langle \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \sigma_{\sigma\sigma'}^z \hat{c}_{i\sigma'} \rangle$$

که در آن ناماد $\langle \hat{O} \rangle$ میانگین گرمایی یعنی $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} [\hat{O} e^{-\beta \hat{H}_{\text{SDW}}}] / Z_{\text{SDW}}$ است.

هامیلتونی (۲۰-۱) را می‌توان با تبدیل بندادی (بوگولیوف) قطری کرد

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} = u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\sigma} - \sigma v_{\mathbf{k}} \hat{\beta}_{\mathbf{k}\sigma} \quad (21-1 \text{ الف})$$

$$\hat{c}_{\mathbf{k}+\pi, \sigma} = \sigma v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}, \sigma} + u_{\mathbf{k}} \hat{\beta}_{\mathbf{k}\sigma} \quad (21-1 \text{ ب})$$

انتگرال گیری بر روی متغیرهای گراسمن کنش مؤثری برحسب میدانهای بوزونی به دست می دهد

$$Z = \int D\Delta e^{-S_{\text{eff}}[\Delta]} \quad (25-1)$$

$$S_{\text{eff}}[\Delta] = \frac{1}{\gamma} \int_0^\beta d\tau \left[\sum_i |\Delta_i(\tau)|^2 - \text{Tr} [\ln M(\Delta)] \right] \quad (26-1)$$

$$M_{ij, \sigma\sigma'} = \left\{ \left[(\partial_\tau - \mu) \delta_{\sigma\sigma'} + \sqrt{\frac{U}{\gamma}} \Delta_i(\tau) \cdot \sigma_{\sigma\sigma'} \right] \delta_{ij} - t_{ij} \delta_{\sigma\sigma'} \right\} \delta(\tau - \tau') \quad (27-1)$$

تقریب فاز ساکن اکنون معادله زیر را به دست می دهد

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}[\Delta]}{\delta \Delta_i^a(\tau)} = \Delta_i^a(\tau) - \frac{\delta}{\delta \Delta_i^a(\tau)} \text{Tr} \ln M(\Delta) = 0 \quad (28-1)$$

مجدداً با استفاده از معادله (۱۷-۱) به رابطه زیر می رسیم

$$\Delta_i^a(\tau) = \sqrt{\frac{U}{\gamma}} \sum_{\sigma\sigma'} \langle i, \sigma, \tau | M^{-1}(\Delta) | i, \sigma', \tau \rangle \sigma_{\sigma\sigma'}^a \quad (29-1)$$

و باز عنصر ماتریسی فوق، تابع گرین تک ذره ای در میدان زمینه است

$$g_{ij, \sigma\sigma'}(\tau, \tau', \Delta) = \langle i, \tau, \sigma | M^{-1}(\Delta) | j, \sigma', \tau' \rangle \quad (30-1)$$

برحسب تابع گرین معادله (۲۹-۱) چنین می شود

$$\Delta_i^a(\tau) = \sqrt{\frac{U}{\gamma}} \sum_{\sigma\sigma'} G_{ii}^{\sigma\sigma'}(\tau, \tau^+; \Delta) \sigma_{\sigma\sigma'}^a \quad (31-1)$$

گشتاور مغناطیسی جایگزیده $\langle S_i^a(\tau) \rangle$ برابر است با

$$\langle S_i^a(\tau) \rangle = \sum_{\sigma\sigma'} G_{ii}^{\sigma\sigma'}(\tau, \tau^+; \Delta) \frac{\sigma_{\sigma\sigma'}^a}{\gamma} \quad (32-1)$$

بنابراین، نتیجه ای که به دست آورده ایم مشابه با نتیجه قبلی است

$$\Delta_i^a(\tau) = \sqrt{\frac{\gamma U}{\gamma}} \langle S_i^a(\tau) \rangle \quad (33-1)$$

۲- فرمولبندی ناوردا تحت دوران اسپین

برای به دست آوردن کنش مؤثری که تحت دوران اسپین ناوردا باشد و برای به حساب آوردن افت و خیزها حول جواب میدان میانگینی که در معادلات (۱۸-۱) و (۱۹-۱) به دست آمد، می توان محور کوانتشی به اختیار در هر نقطه شبکه در نظر گرفت که برحسب زمان موهومی τ هم بتواند تغییر کند [۱۲، ۱۳]. محور کوانتشی در هر نقطه شبکه با شاخص i با بردار یکه زیر مشخص می شود

$$\vec{N}_i(\tau) = [\cos\phi_i(\tau) \sin\theta_i(\tau), \sin\phi_i(\tau) \sin\theta_i(\tau) \cos\theta_i(\tau)] \quad (1-2)$$

که در آن θ و ϕ زوایای قطبی عادی هستند. جمله $[S_i^z(\tau)]^2$ را اکنون به صورت $[S_i(\tau) \cdot N_i(\tau)]^2$ می نویسیم و با انتگرال گیری روی تمام بردارهای یکه ممکن در هر نقطه شبکه و در هر زمان، به جای معادله (۶-۱) به انتگرال تابعی زیر می رسیم

$$Z(\beta, U, \mu) = \int \prod_{i, \sigma} D[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)] D[\eta_{i\sigma}(\tau)] D[\phi_i(\tau)] D[\Delta_i(\tau)] D[N_i(\tau)] e^{-S[\bar{\eta}, \eta, \phi, \Delta, N]} \quad (2-2)$$

$$S[\bar{\eta}, \eta, \phi, \Delta, N] = \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_{i, \sigma} \bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) (\partial_\tau - \mu) \eta_{i\sigma}(\tau) \right.$$

$$\left. + t \sum_{\langle i, j \rangle, \sigma} [\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) \eta_{j\sigma}(\tau) + \bar{\eta}_{j\sigma}(\tau) \eta_{i\sigma}(\tau)] \right.$$

$$\left. + \sum_i \left[\frac{\phi_i(\tau)^2}{U} + i \phi_i(\tau) \sum_{\sigma} \bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) \eta_{i\sigma}(\tau) + \frac{\Delta_i(\tau)^2}{U} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Delta_i(\tau) N_i(\tau) \cdot \sum_{\sigma\sigma'} \bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) \sigma_{\sigma\sigma'} \eta_{i\sigma'}(\tau) \right] \right\} \quad (3-2)$$

برای حذف $N_i(\tau)$ از فرمولبندی، تبدیل (۲) SU زیر را در نظر می گیریم

$$\eta_{i\sigma}(\tau) = \sum_{\sigma'} U_{i, \sigma\sigma'}(\tau) \eta_{i\sigma'}(\tau) \quad (5-2)$$

که در آن $u_i(\tau)$ طوری تعریف می شود که داشته باشیم

$$U_i^\dagger(\tau) [N_i(\tau) \cdot \sigma] U_i(\tau) = \sigma_z \quad (6-2)$$

$u_i(\tau)$ به $N_i(\tau)$ بستگی دارد و می تواند به صورت ساده زیر انتخاب شود

$$U(N) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{\gamma} & -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{\gamma} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{\gamma} & \cos \frac{\theta}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

اکنون کنش را می‌توان به صورت زیر باز نوشت

$$\tilde{S} = \int_0^\beta dt \left\{ \sum_i \frac{\tilde{\phi}_i^\dagger(\tau) + \tilde{\Delta}_i(\tau)}{U} + i\tilde{\phi}_i(\tau) [\bar{\Psi}_i(\tau)\Psi_i(\tau) - 1] - \tilde{\Delta}_i(\tau) [\bar{\Psi}_i(\tau)\sigma_z\Psi_i(\tau) + 1] \right\} \quad (11-2)$$

که در آنها $\tilde{\phi}_i(\tau) = \phi_i(\tau) - \phi_0$ و $\tilde{\Delta}_i(\tau) = \Delta_i(\tau) - \Delta_0$ نماینده افت و خیزند. شولتز وضعیتی را بررسی می‌کند که نوار انرژی الکترونها با اسپین \downarrow نوار پایین هابارد پر است و نوار الکترونها با اسپین \uparrow نوار بالای هابارد نیمه‌پر، و کنش مؤثری برای الکترونها نوار بالا به دست می‌آورد که به شکل بسطی انباشتی است برحسب نمودارهای متصل با تابع گرین اسپین پایین \downarrow $S_z = \downarrow$. این کار با انتگرال‌گیری آشکار روی Ψ_i و ϕ_i و Δ_i انجام می‌شود. شولتز دو جمله اول بسط کنش مؤثر برحسب توانهای t/U را به دست می‌آورد و از آن برای بررسی گذار برحسب t/U و آلودگی از حالت فرومغناطیسی به حالت پادفرومغناطیسی از طریق حالت‌های میانی با مغناطیدگی ماریچی استفاده می‌کند.

۳- انتگرال مسیر برای عملگرهای هابارد

۳-۱ عملگرهای هابارد

مدل هابارد ساختاری مدرج دارد، به این معنی که برانگیختگیهای جایگزیده سیستم، یا از نوع بوزونی هستند و یا از نوع فرمیونی. برانگیختگیهای بوزونی آنهایی هستند که به تعداد زوجی عملگرهای خلق و نابودی الکترون مربوط می‌شوند. اسپین، برانگیختگی ذره حفره و برانگیختگی زوجی در این رده قرار دارند و در انتگرال مسیر به صورت میدانهای مختلط درمی‌آیند. برانگیختگیهای فرمیونی با تعداد فردی عملگر خلق و نابودی الکترون بیان می‌شوند. خلق یا نابودی الکترون در نقطه شبکه‌ای خالی، تک الکترونی یا دو الکترونی از این نوع برانگیختگی است و در انتگرال مسیر با میدانهای گراسمنی نمایش داده می‌شوند.

برای ساختن هامیلتونی در این صورت بندی باید عملگرهای جایگزیده‌ای تعریف کنیم که این برانگیختگیها را دقیقاً توصیف کنند. با دانستن جبر این عملگرها (عملگرهای هابارد)، برای این برانگیختگیها می‌توان حالت‌های همدوس به دست آورد. عملگرهای هابارد به صورت عملگرهای تصویر تعریف می‌شوند، در هر نقطه شبکه i :

$$\hat{X}_i^{ab} \equiv |a\rangle_{ii} \langle b|, \quad \hat{X}_i^{ba} = \left[\hat{X}_i^{ab} \right]^\dagger \quad (1-3)$$

$$S[\bar{\Psi}, \Psi, \phi, \Delta, N] = \int_0^\beta dt \left\{ \sum_i \bar{\Psi}_i(\tau) [\partial_\tau - \mu] \Psi_i(\tau) + \sum_i \bar{\Psi}_i(\tau) [U_i^\dagger(\tau) \partial_\tau U_i(\tau)] \Psi_i(\tau) + t \sum_{\langle i,j \rangle} [\bar{\Psi}_i(\tau) [U_i^\dagger(\tau) U_j(\tau)] \Psi_j(\tau) + c.c.] + \sum_i \left[\frac{\phi_i(\tau)^2}{U} + i\phi_i(\tau) \bar{\Psi}_i(\tau) \Psi_i(\tau) + \frac{\Delta_i(\tau)^2}{U} - \Delta_i(\tau) \bar{\Psi}_i(\tau) \sigma_z \Psi_i(\tau) \right] \right\} \quad (8-2)$$

چون تبدیل u تبدیل یکانی است اندازه انتگرال تغییر نمی‌کند. هر $\Psi_i(\tau)$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{\Psi}_i(\tau) = [\bar{\psi}_{i\uparrow}(\tau), \bar{\psi}_{i\downarrow}(\tau)], \quad \Psi_i(\tau) = \begin{bmatrix} \psi_{i\uparrow}(\tau) \\ \psi_{i\downarrow}(\tau) \end{bmatrix}$$

می‌توان ذره‌ای در نظر گرفت که اسپین آن در جهت میدان مؤثر Δ_i قطبیده شده است. جهت قطبش با $N_i(\tau)$ یا به طور معادل با $U_i(\tau)$ مشخص می‌شود و دینامیک افت و خیز را $U_i(\tau)$ تعیین می‌کند که در کنش به صورت جمله‌های $U_i^\dagger(\tau) \partial_\tau U_i(\tau)$ و $U_i^\dagger(\tau) U_j(\tau)$ ظاهر می‌شود.

جواب میدان میانگین اکنون مقادیر میانگینی برای $N_i(\tau)$ هم در بردار، یک جواب ممکن نقطه زین فرومغناطیسی:

$N_i(\tau) = \bar{\epsilon}$ ، یا به طور معادل $u_i(\tau) = 1$ است. شولتز [۱۲] کنش در نقطه زین S_0 را از کنش کل کم می‌کند و کنش را به صورت $S_0 + S_N + \bar{S}$ می‌نویسد که در آن S_N افت و خیزهای N را دربر دارد و \bar{S} افت و خیزهای ϕ و Δ را. این کنشها به صورت زیرند

$$S_0 = \int_0^\beta dt \left\{ \sum_i \bar{\Psi}_i(\tau) \left[\partial_\tau - \mu + \frac{1}{4} U (1 + \sigma_z) \right] \Psi_i(\tau) + t \sum_{\langle i,j \rangle} [\bar{\Psi}_i(\tau) \Psi_j(\tau) + \bar{\Psi}_j(\tau) \Psi_i(\tau)] \right\} \quad (9-2)$$

$$S_N = \int_0^\beta dt \left\{ \sum_i \bar{\Psi}_i(\tau) [U_i^\dagger(\tau) \partial_\tau U_i(\tau)] \Psi_i(\tau) + t \sum_{\langle i,j \rangle} [\bar{\Psi}_i(\tau) (U_i^\dagger(\tau) U_j(\tau) - 1) \Psi_j(\tau) + c.c.] \right\} \quad (10-2)$$

سه عملگر بوزونی $\hat{X}^{\uparrow\downarrow}, \hat{X}^{\downarrow\uparrow}$ و $\hat{X}^{\uparrow\uparrow}, \hat{X}^{\downarrow\downarrow}$ معادل با عملگرهای اسپینی \hat{S}^+, \hat{S}^- و \hat{S}^z هستند.

۲-۳ حالت‌های ابرهمدوس

برای تعمیم حالت‌های همدوس از تعریف پرلموف [۱۲] استفاده می‌کنیم. نکته اصلی در این تعریف این است که حالت‌های همدوس، مدار نمایش گروه لی در فضای هیلبرت هستند که بر روی حالت مرجعی عمل می‌کند. این روش حالت‌های همدوس بهنجار به دست می‌دهد و ما فقط حالت‌های همدوسی را در نظر می‌گیریم که (۱) بهنجار و (۲) تجزیه‌گر عملگر واحد باشند.

برای تعریف یکنای حالت‌های همدوس (در حد یک ضریب فاز)، گروه لی را باید به هم مجموعه‌های چپ زیرگروه همسانگرد بیشین^۱ تقسیم کرد، یعنی تمام عملگرهایی را که حاصل عملکرد آنها بر حالت مرجع فقط تولید یک ضریب فاز است، حذف کرد. جبر مدرج وضعیت پیچیده‌تری را به وجود می‌آورد. چنانکه گفته شد عملگرهای بوزونی و فرمیونی هابارد مولدهای جبری مدرج هستند. تونگلر و کاپ در مرجع [۱۵] حالت‌های همدوس بهنجار را در تمام فضای فوک، فقط با یک متغیر گراسمن $\psi\bar{\psi} = -\bar{\psi}\psi$ و $\psi^2 = \bar{\psi}^2 = 0$ برای آمار فرمیونی و دو میدان مختلط، یکی برای درجه آزادی اسپین و دیگری برای درجه آزادی بار الکتریکی، ساخته‌اند. نشان داده می‌شود که میدان بار الکتریکی که نماینده گذار به حالت‌های نقطه شبکه‌ای خالی و نقطه شبکه‌ای دو الکترونی است، شبه اسپینی است که با نوعی "میدان مغناطیسی" متناسب با پارامتر برهم‌کنش جایگزیده U جفت می‌شود. حالت همدوس پیشنهادی آنان ابتدا به شکل زیر است

$$|G\rangle = \exp \left\{ \left[\alpha \psi \hat{X}^{\uparrow\downarrow} + \beta \psi \hat{X}^{\downarrow\uparrow} + \gamma \hat{X}^{\uparrow\uparrow} + \delta \hat{X}^{\downarrow\downarrow} \right] - \text{h.c.} \right\} | \uparrow \rangle \quad (7-3)$$

که در آن $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ اعداد مختلط هستند. اگر تابع نمایشی را بسط دهیم و از ... , $\psi^2 = 0$ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$|G\rangle = [a + b\psi\bar{\psi}] | \uparrow \rangle + [c + d\psi\bar{\psi}] | \downarrow \rangle + e\psi | \uparrow \rangle + f\psi | \downarrow \rangle \quad (8-3)$$

در این رابطه a, b, c, d, e, f و متغیرهای مختلط و تابع α, β, γ و δ هستند. شرایطی که حالت‌های همدوس باید برآورده کنند عبارت‌اند از (۱) بهنجارش و (۲) تجزیه عملگر واحد

$$\langle G | G \rangle = aa^* + [a^*b + ab^*] \psi\bar{\psi} + c^*c + [cd^* + c^*d] \psi\bar{\psi} + [e^*e + f^*f] \bar{\psi}\psi = 1 \quad (9-3)$$

که در آنها $\{|a\rangle_i\}$ حالت‌های متعامد - بهنجار در نقطه شبکه‌ای i هستند: حالت نقطه شبکه‌ای خالی با $a = 0$ و نقطه شبکه‌ای تک‌الکترونی با $a = \sigma = \uparrow$ یا $a = \sigma = \downarrow$ و نقطه شبکه‌ای دو الکترونی با $a = 2$ نمایش داده می‌شود (از این قرارداد پیروی می‌کنیم که $|\uparrow\rangle = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger |0\rangle$). حال می‌توان ثابت کرد که عملگرهای فوق رابطه ابرجابه‌جایی زیر را برآورده می‌کنند

$$[\hat{X}_i^{ab}, \hat{X}_j^{cd}] = \delta_{ij} \left[\hat{X}_i^{ad} \delta_{bc} - (-1)^{\chi_i^{ab} \chi_j^{cd}} \hat{X}_i^{cd} \delta_{ad} \right] \quad (2-3)$$

که در آن $S = 2 [\theta (\chi^{ab} + \chi^{cd} - 2/2) - 1/2]$ و χ مشخصه مدرج عملگرهای هابارد است که برای عملگرهای بوزونی $\hat{X}^{\uparrow\uparrow}, \hat{X}^{\uparrow\downarrow}, \hat{X}^{\downarrow\uparrow}, \hat{X}^{\downarrow\downarrow}, \hat{X}^{\sigma\sigma}, \hat{X}^{\sigma\uparrow}, \hat{X}^{\sigma\downarrow}$ و برای عملگرهای فرمیونی $\hat{X}^{\sigma\sigma}, \hat{X}^{\sigma\uparrow}, \hat{X}^{\sigma\downarrow}$ برابر ۱ است. عملگرهای $\{\hat{X}^{ab}\}$ پایه جبر لی نسیم ساده دویار مدرج ابرمقتارنی را تشکیل می‌دهند [O_{sp}(2/2) ~ S_{pl}(1,2)] که به‌طور وسیع بررسی شده است [۱۶].

عملگرهای بندادی \hat{c}_σ^\dagger و \hat{c}_σ را می‌توان به صورت ترکیب خطی عملگرهای هابارد نوشت

$$\hat{c}_\sigma^\dagger = \hat{X}^{\sigma\sigma} + \sigma \hat{X}^{\uparrow\sigma}, \quad \hat{c}_\sigma = \hat{X}^{\sigma\sigma} + \sigma \hat{X}^{\sigma\downarrow} \quad (\bar{\sigma} \equiv -\sigma) \quad (3-3)$$

اما این تبدیل خطی نیست و معکوس آن چنین است

$$\begin{aligned} \hat{X}^{\sigma\sigma} &= \hat{c}_\sigma^\dagger (1 - \hat{n}_\sigma); & \hat{X}^{\sigma\uparrow} &= \hat{c}_\sigma^\dagger \hat{n}_\sigma; & \hat{X}^{\sigma\downarrow} &= \hat{n}_\sigma (1 - \hat{n}_\sigma); \\ \hat{X}^{\uparrow\sigma} &= (1 - \hat{n}_\sigma) \hat{c}_\sigma; & \hat{X}^{\downarrow\sigma} &= \hat{c}_\sigma \hat{n}_\sigma; & \hat{X}^{\uparrow\uparrow} &= \hat{n}_\sigma \hat{n}_\sigma \end{aligned} \quad (4-3)$$

عملگرهای بوزونی، شمارش خودبه‌خود مجموعه کامل جایگزیده‌ای را تشکیل می‌دهند

$$\hat{X}^{\sigma\sigma} + \hat{X}^{\uparrow\uparrow} + \hat{X}^{\downarrow\downarrow} + \hat{X}^{\uparrow\downarrow} = 1 \quad (5-3)$$

هامیلتونی هابارد به شکل زیر درمی‌آید

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} \left[\hat{X}_i^{\sigma\sigma} + \sigma \hat{X}_i^{\uparrow\sigma} \right] \left[\hat{X}_j^{\sigma\sigma} + \sigma \hat{X}_j^{\sigma\downarrow} \right] + U \sum_i \hat{X}_i^{\uparrow\uparrow} \quad (6-3)$$

که در آن به‌جای جمع مرتب روی نزدیکترین همسایه‌ها $\langle ij \rangle$ ، از جمع روی نزدیکترین همسایه‌ها (i, j) استفاده شده است. در نتیجه به جمله مزدوج هرمیتی نیازی نیست. جمله انرژی جنبشی اکنون به صورت چهار جمله درآمده است که هر یک نماینده برهم‌کنش مشخصی بین برانگیختگیهای نزدیکترین همسایه‌هاست.

وجود دارد اما لاگرانژی به این انتخاب بستگی ندارد. فهرست مقادیر چشمداشتی عملگرهای هابارد $\langle G | X^{ab} | G \rangle$ در مقاله تونگلر و کاپ آمده است [۱۵]. (ϑ, ϕ) به منزله متغیرهای زاویه‌ای اسپین و (θ, ϕ) به منزله متغیرهای زاویه‌ای بار الکتریکی تعبیر شده‌اند. متغیرهای بار الکتریکی (θ, ϕ) ، متغیرهای شبه‌اسپینی در فضای نقاط شبکه‌ای خالی و دو الکترونی هستند و همانند متغیرهای (ϑ, ϕ) در فضای اسپین، دورانها را در این فضا پارامتر بندی می‌کنند. میدانهای گراسمنی موجب گذار بین فضای اسپینی و شبه‌اسپینی می‌شوند.

۳-۳ نمایش انتگرال مسیر

در بخش پیش حالت‌های همدوس برای عملگرهای هابارد را ارائه دادیم و اندازه‌ای را که تجزیه عملگر واحد را ممکن می‌کند به دست آوردیم. با استفاده از فرمول تراوتر^۱ و تجزیه عملگر واحد به کمک حالت‌های همدوس (۲-۱۱) می‌توانیم انتگرال مسیر را برای تابع پارش بنویسیم [۱۵]

$$Z = \int D[\theta(\tau), \phi(\tau), \vartheta(\tau), \psi(\tau), \bar{\psi}(\tau), \psi(\tau)] \exp \left\{ - \int_0^\beta [L_0 + L_1 + L_t] d\tau \right\} \quad (14-3)$$

در این رابطه L_0 فاز بری^۲ است

$$L_0 = \langle G(\tau) | \partial_\tau | G(\tau) \rangle = \sum_i [i\dot{\phi}_i \sin^2 \vartheta_i + \bar{\psi}_i \times [\partial_\tau + i\dot{\phi}_i \sin^2 \theta_i - i\dot{\phi}_i \sin^2 \vartheta_i] \psi_i] \quad (15-3)$$

L_1 به بخشی از هامیلتونی مربوط می‌شود که حاوی برهم‌کنش کولنی UX^{22} و جمله پتانسیل شیمیایی $\mu \left[\sum_\sigma X^{\sigma\sigma} + 2X^{22} \right]$ است

$$L_1 = \sum_i \left[-\mu + \bar{\psi}_i \left[\frac{U}{\gamma} + \left[\mu - \frac{U}{\gamma} \right] \cos 2\theta_i \right] \psi_i \right] \quad (16-3)$$

L_t را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L_t = L_{t;0,1} + L_{t;2,0} + L_{t;1,1} + L_{t;2,1} \quad (17-3)$$

$L_{t;0,1}$ نماینده تبادل نقطه شبکه‌ای تک الکترونی با نزدیکترین همسایه خالی است

$$L_{t;0,1} = t \sum_{\langle i,j \rangle} \psi_i \bar{\psi}_j \cos \theta_i \cos \theta_j \times \left[\sin \vartheta_i \sin \vartheta_j e^{-i(\varphi_i - \varphi_j)} + \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j \right] \quad (18-3)$$

$$\int d\mu [a,b,c,d,e,f] d\bar{\psi}d\psi |G\rangle \langle G| = \int d\mu [a,b,c,d,e,f] \left[[ba^* + ab^*] \hat{X}^{\uparrow\uparrow} + |e|^2 \hat{X}^{22} + |f|^2 \hat{X}^{\circ\circ} + [cd^* + dc^*] \hat{X}^{\downarrow\downarrow} \right] = \hat{X}^{\circ\circ} + \hat{X}^{\uparrow\uparrow} + \hat{X}^{\downarrow\downarrow} + \hat{X}^{22} = 1 \quad (10-3)$$

انتگرالگیری روی فازهای cd^* و $(af^* + be^*)$ که پیش ضریب عملگرهای هابارد خارج قطر هستند، باید صفر به دست بدهد. μ اندازه نامعینی است که باید تعیین شود. پیش ضریب عملگرهای هابارد روی قطر باید ۱ باشد. شرط بهنجارش هم باید برآورده شود.

از میان حالت‌های همدوس ممکن، تونگلر و کاپ حالت زیر را پیشنهاد می‌کنند

$$|G\rangle = \left[1 + \frac{1}{\gamma} \psi \bar{\psi} \right] \sin \vartheta e^{i\phi} |\uparrow\rangle + \left[1 + \frac{1}{\gamma} \psi \bar{\psi} \right] \cos \theta |\downarrow\rangle + \psi \cos \theta |0\rangle + \psi \sin \theta e^{i\phi} |\uparrow\rangle \quad (11-3)$$

این حالت بهنجاریده است و عملگر واحد را می‌توان تجزیه و ردیابی کرد

$$1 = \int |G\rangle \langle G| \quad (12-3)$$

$$\text{Tr} A = \int \langle \chi | G | A | G \rangle \quad (13-3)$$

در روابط فوق

$$\int = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} d\bar{\psi} d\psi$$

که در آن χ نشان می‌دهد که متغیرهای گراسمن علامت منفی خواهند داشت. در این جواب خاص، از اندازه‌ای استفاده شده است که به اندازه کاهیده معروف است. تجزیه عملگر واحد و ردگیری دیگری با اندازه ناوردای

$$\int = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\vartheta\theta) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin(\vartheta\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \int d\bar{\psi} d\psi$$

1. Trotter

2. Berry

$$-t \sum_{\langle ij \rangle} \psi_i \bar{\psi}_j \alpha [N_i, N_j] + \frac{t^2}{U} \sum_{\langle ij \rangle} [\psi_i \bar{\psi}_i + \psi_j \bar{\psi}_j] [1 - N_i \cdot N_j] + \frac{t^2}{U} \sum_{\langle ij \rangle} \psi_i \bar{\psi}_k \alpha [N_i, N_j] \alpha [N_j, N_k] \quad (23-3)$$

که در آن

$$N_i(\tau) = [\sin \vartheta_i(\tau) \cos \varphi_i(\tau), \sin \vartheta_i(\tau) \sin \varphi_i(\tau), \cos \vartheta_i(\tau)] \quad (24-3)$$

و

$$\alpha [N_i, N_j] = \sqrt{\frac{1}{\gamma} [1 + N_i \cdot N_j]} \exp [i \Phi [N_i, N_j, \hat{z}] / \gamma] \quad (25-3)$$

$\Phi(N_i, N_j, \hat{z})$ مساحت مثلث کروی است که با سه بردار یکه N_i و N_j و \hat{z} تشکیل می‌شود، \hat{z} بردار یکه در جهت قطب شمال کره به شعاع واحد است. منظور از $\langle i, j, k \rangle$ این است که نزدیکترین همسایه i و k نزدیکترین همسایه j به غیر از i است. برای مقایسه این لاگرانژی مؤثر با نتیجه شولتز [۱۲] باید تبدیل ذره - حفره انجام داد [۱۵]. جمله $\sum_j (1 - \bar{\psi}_j \psi_j) N_j^z$ در نتیجه شولتز، در صورتبندی تونگلر و کاپ وجود ندارد.

۴ روش ذرات برده

روش دیگری که امکان می‌دهد تابع پارش مدل هابارد را به صورت انتگرال مسیر بنویسیم، استفاده از ذرات برده است. ظاهراً مؤثرترین نحوه اجرای این کار روش کوتلیار و روکنستین است [۲۳]. این روش را بررسی می‌کنیم.

۴-۱ بوزونهای برده

در مدل هابارد برای هر نقطه شبکه چهار حالت وجود دارد:

$$|0\rangle; |\sigma\rangle = \hat{c}_\sigma^\dagger |0\rangle, |\sigma = \uparrow, \downarrow\rangle; |\uparrow\downarrow\rangle = \hat{c}_\uparrow^\dagger \hat{c}_\downarrow^\dagger |0\rangle$$

که در آن حالت $|0\rangle$ نماینده نقطه شبکه‌ای خالی است که به صورت حالت خلأ برای عملگرهای الکترونی عمل می‌کند یعنی $|\sigma\rangle, |c_\sigma\rangle = |0\rangle$ نماینده نقطه شبکه‌ای تک‌الکترونی با مؤلفه اسپین σ است و $|\uparrow\downarrow\rangle$ نقطه شبکه‌ای دو الکترونی است. نمایشهای بوزون برده عموماً با نگاشت تمام نمایش فرمیونی فوق و یا قسمتی از آن، به نمایشی با عملگرهای بوزونی ساخته می‌شوند. خصوصاً حالت $|0\rangle$ ، از عمل عملگر بوزونی \hat{e}^\dagger روی حالت خلأ جدید $|\text{vac}\rangle$ نتیجه می‌شود، یعنی حتی نقطه شبکه‌ای خالی هم خلأ نیست و از خلأ مطلق دیگری خلق می‌شود: $|\sigma\rangle = \hat{e}^\dagger |\text{vac}\rangle$. حالت‌های دیگر را می‌توان به روشهای مختلف نمایش داد. کوتلیار و روکنستین نمایشی برحسب دو شبه‌فرمیون \hat{f}_\uparrow و \hat{f}_\downarrow و چهار بوزون برده $\hat{e}, \hat{p}_\uparrow, \hat{p}_\downarrow$ و \hat{d} مطرح

$L_{t;0,2}$ نماینده گذار از حالت یا دو نزدیکترین همسایه تک‌الکترونی است به حالت نقطه شبکه‌ای دو الکترونی و نقطه شبکه‌ای خالی نزدیکترین همسایه

$$L_{t;2,0} = t \sum_{\langle ij \rangle} \psi_i \psi_j \cos \vartheta_i \sin \vartheta_j e^{i\varphi_j} \times [\sin \vartheta_i \cos \vartheta_j e^{-i\varphi_i} - \cos \vartheta_i \sin \vartheta_j e^{i\varphi_j}] \quad (19-3)$$

$L_{t;1,1}$ نماینده عکس فرایند فوق است

$$L_{t;1,1} = t \sum_{\langle ij \rangle} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \sin \vartheta_i \cos \vartheta_j e^{-i\varphi_i} \times [\cos \vartheta_i \sin \vartheta_j e^{i\varphi_i} - \sin \vartheta_i \cos \vartheta_j e^{-i\varphi_j}] \quad (20-3)$$

و $L_{t;2,1}$ نماینده فرایند تبادل نقطه شبکه‌ای تک‌الکترونی با نزدیکترین همسایه دو الکترونی اش است

$$L_{t;2,1} = t \sum_{\langle ij \rangle} \bar{\psi}_i \psi_j \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j e^{-i(\varphi_i - \varphi_j)} \times [\cos \vartheta_i \cos \vartheta_j + \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j e^{i(\varphi_i - \varphi_j)}] \quad (21-3)$$

تونگلر و کاپ برای بررسی حد جفتیدگی قوی $U \rightarrow \infty$ روش تصویری که لاگرانژی را به صورت زیر درمی‌آورد، پیشنهاد می‌کنند

$$\bar{L} = \sum_i \left[-\mu + i\dot{\varphi}_i \sin^2 \vartheta_i + \bar{\psi}_i (\partial_\tau + \mu + i\dot{\varphi}_i \sin \vartheta_i \left| \begin{array}{l} \text{قطب شمال} \\ -i\dot{\varphi}_i \sin^2 \vartheta_i \end{array} \right| \psi_i \right]$$

$$+ t \sum_{\langle ij \rangle} \psi_i \bar{\psi}_j \left[\sin \vartheta_i \sin \vartheta_j e^{-i(\varphi_i - \varphi_j)} + \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j \right]$$

(۲۲-۳)

آنها نشان می‌دهند که فاز پری مربوط به متغیرهای بار الکترونی (شبه اسپین) و افت و خیزهای کوچک این فاز حول قطب شمال را باید به حساب آورد.

تونگلر و کاپ همچنین بسط جفتیدگی قوی را به دست می‌آورند و لاگرانژی مؤثری که در آن تصحیحات مرتبه اول نسبت به $1/U$ به حساب آمده است، به شکل زیر است

$$L_{\text{eff}} = \sum_i \left[-\mu + i\dot{\varphi}_i \sin^2 \vartheta_i + \bar{\psi}_i \times \left[\partial_\tau + \mu - i\dot{\varphi}_i \sin \vartheta_i \left| \begin{array}{l} \text{قطب شمال} \\ -i\dot{\varphi}_i \sin^2 \vartheta_i \end{array} \right| \psi_i \right] \right]$$

قطب شمال

تبدیل به نقطه شبکه‌ای خالی می‌شود [جمله اول در (۴-۳)]. به همین ترتیب جهش الکترون به نقطه شبکه‌ای i منجر به ایجاد نقطه شبکه‌ای تک‌الکترونی (اگر نقطه شبکه‌ای قبلاً خالی باشد) و یا نقطه شبکه‌ای دو الکترونی (اگر نقطه شبکه‌ای قبلاً الکترونی با اسپین $\bar{\sigma}$ داشته باشد) می‌شود، این حاصل کار عملگر $\hat{z}_{i\sigma}^{\pm}$ است. جمله دافعه کولنی اکنون برحسب عملگر بوزونی \hat{d} که فقط روی نقاط شبکه‌ای دو الکترونی عمل می‌کند دوبار-خطی است.

در واقع نحوه انتخاب $\hat{z}_{i\sigma}$ یکتا نیست و می‌توان به جای $\hat{z}_{i\sigma}$ از هر ترکیب $\hat{U}_{\sigma}\hat{z}_{i\sigma}\hat{V}_{\sigma}$ استفاده کرد که در آن \hat{U}_{σ} و \hat{V}_{σ} عملگرهایی باشند که ماتریس آنها در فضای فوک گسترش یافته قطری باشد و عناصر غیرصفر آنها (که برابر با ۱ هستند) به ترتیب روی ردیف و ستونهای مربوط به حالت‌های $|\sigma\rangle$ ، $|\bar{\sigma}\rangle$ و $|\sigma\downarrow\rangle$ قرار داشته باشند (یعنی \hat{U}_{σ} و \hat{V}_{σ} توابعی از عملگرهای \hat{n}_{σ} باشند). انتخاب مرجع [۲۳] چنین است

$$\hat{z}_{i\sigma} = \left[1 - \hat{d}^{\dagger} \hat{d} - \hat{p}_{\sigma}^{\dagger} p_{\sigma} \right] \hat{z}_{i\sigma} \left[1 - \hat{e}^{\dagger} e - \hat{p}_{\bar{\sigma}}^{\dagger} \hat{p}_{\bar{\sigma}} \right] \quad (۸-۴)$$

همه این گزینه‌ها تا زمانی که قیدهای (۴-۴) و (۵-۴) دقیقاً برآورده شوند از نظر صوری با هم برابرند، اما وقتی از روشهای تقریبی استفاده شود دیگر چنین نیست. مثلاً در تقریب میدان میانگین قیدها به‌طور میانگین برآورده می‌شوند و بسته به گزینه خاص $\hat{z}_{i\sigma}$ نتایج مختلف به دست می‌آید. اگر می‌شد افت و خیزهای کوانتومی را در همه مرتبه‌ها به حساب آورد، این اختلافها احتمالاً از بین می‌رفت. می‌توان به سادگی نشان داد که گزینه (۸-۴) در تقریب میدان میانگین و برای $U = 0$ به نتیجه درست منجر می‌شود. در تقریب میدان میانگین به جای میدانهای بوزونی مقدارهای کلاسیک آنها قرار داده می‌شود که ما فرض می‌کنیم مقدارهای حقیقی هستند، یعنی به جای عملگرهای \hat{e}_i ، \hat{e}_i^{\dagger} ، $\hat{p}_{i\sigma}$ ، $\hat{p}_{i\sigma}^{\dagger}$ ، \hat{d}_i و \hat{d}_i^{\dagger} به ترتیب اعداد حقیقی e ، p و d قرار داده می‌شود. این معادل با پارامغناطش است زیرا

$$\langle \hat{p}_{i\sigma}^{\dagger} \rangle = \langle \hat{p}_{i\bar{\sigma}}^{\dagger} \rangle = p$$

قیدهای (۴-۴) و (۵-۴) به صورت زیر درمی‌آیند

$$e^2 + 2p^2 + d^2 = 1 \quad (۹-۴)$$

$$p^2 + d^2 = \langle \hat{f}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{i\sigma} \rangle = \frac{n}{\gamma}$$

که در آن $n/2$ ضرب آکندگی (پرشدگی) نوار انرژی است. گزینه هامیلتونی (۷-۴) به صورت زیر ساده می‌شود

$$H = -t \sum \langle \hat{z}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{z}_{j\sigma} \rangle \hat{f}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{j\sigma} + U M d^2$$

M تعداد نقاط شبکه‌ای است. از (۳-۴) نتیجه می‌شود

می‌کنند که \hat{e} برای نقطه شبکه‌ای خالی، \hat{p}_{\uparrow} و \hat{p}_{\downarrow} برای نقاط شبکه‌ای تک‌الکترونی و \hat{d} برای نقطه شبکه‌ای دو الکترونی است

$$|0\rangle = \hat{e}^{\dagger} |vac\rangle$$

$$|\sigma\rangle = \hat{p}_{\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{\sigma}^{\dagger} |vac\rangle \quad (۱-۴)$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \hat{d}^{\dagger} \hat{f}_{\uparrow}^{\dagger} \hat{f}_{\downarrow}^{\dagger} |vac\rangle$$

عملگر الکترونی در صورتبندی پیشین اکنون معادل با ترکیبی از عملگرهای جدید است

$$\hat{c}_{\sigma} = \hat{f}_{\sigma} \hat{z}_{\sigma} \quad (۲-۴)$$

$$\hat{z} = \hat{e}^{\dagger} \hat{p}_{\sigma} + \hat{p}_{\bar{\sigma}}^{\dagger} \hat{d} \quad (\bar{\sigma} \equiv -\sigma) \quad (۳-۴)$$

دو نمایش به شرطی با هم معادل خواهند بود که قیدهایی برآورده شوند تا مفهوم فیزیکی میدانها محفوظ بماند. قید اول:

$$\hat{Q} = \hat{e}^{\dagger} \hat{e} + \sum_{\sigma} \hat{p}_{\sigma}^{\dagger} p_{\sigma} + \hat{d}^{\dagger} d = 1 \quad (۴-۴)$$

به این معنی است که همیشه فقط یک بوزون (در هر نقطه شبکه) وجود دارد که نشاندهنده تعداد الکترونها (و اسپین آنها) روی نقطه شبکه‌ای است. قید دوم:

$$\hat{f}_{\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{\sigma} = \hat{p}_{\sigma}^{\dagger} p_{\sigma} + \hat{d}^{\dagger} d \quad (۵-۴)$$

نماینده دو راه مختلف شمارش تعداد فرمیونها با اسپین مشخص و حاکی از این است که درجات آزادی مستتر در \hat{f}_{σ} و \hat{p}_{σ} و \hat{d} بیش از حد نیاز است. قید (۴-۴) خود به خود تضمین می‌کند که عملگرهای $\hat{n}_{\alpha} = \hat{a}^{\dagger} \hat{a}$ ($\alpha = e, p_{\sigma}, d$) از جبر تصویرگرها تبعیت کنند

$$\hat{n}_{\alpha} \hat{n}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \hat{n}_{\alpha} \quad (۶-۴)$$

در نمایش جدید، هامیلتونی هابارد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle \sigma} \hat{z}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{z}_{j\sigma} \hat{f}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{j\sigma} + U \sum_i \hat{d}_i^{\dagger} \hat{d}_i \quad (۷-۴)$$

با این شرط که قیدهای (۴-۴) و (۵-۴) در هر نقطه شبکه برآورده شوند. تأثیر عملگرهای $\hat{z}_{i\sigma}^{\dagger}$ و $\hat{z}_{j\sigma}$ واضح است: وقتی در نقطه شبکه‌ای j ، الکترونی با اسپین σ ناپدید می‌شود، یا نقطه شبکه‌ای دو الکترونی به نقطه شبکه‌ای تک‌الکترونی با اسپین $\bar{\sigma}$ تبدیل می‌شود [جمله دوم در (۳-۴)] و یا نقطه شبکه‌ای تک‌الکترونی

روکنستین یافته‌اند، اما منشأ این تناقضها را مشخص نکرده‌اند. آریگونی و استریناتی [۲۴] استدلال می‌کنند که در گرفتن حد پیوستار انتگرال مسیر (زمان موهومی) در روشهایی که تاکنون برای محاسبه تصحیحات تقریب میدان میانگین کوتلیار و روکنستین به کار رفته است، خطا وجود دارد. نکته اصلی این است که برای گرفتن حد زمان موهومی پیوسته در انتگرال مسیر با حالت‌های همدوس، وقتی چگاله^۱ بوزون برده وجود دارد باید دقت خاصی به کار برد. آریگونی و استریناتی استدلال می‌کنند که با تعریفی که کوتلیار و روکنستین در رابطه (۸-۴) برای z پیشنهاد می‌کنند، تصحیحات ناشی از افت و خیز خوش تعریف نیست و برای چاره این کار صورت دیگری پیشنهاد می‌کنند که با حد صحیح پیوستار سازگار است و ویژگیهای مفید جواب میدان میانگین کوتلیار و روکنستین را حفظ می‌کند.

۲.۴ صورتبندی ناوردا تحت دوران اسپین

نمایشی که برای حالت $|\sigma\rangle$ انتخاب شده است یعنی (۱-۴) به انتخاب محور کوانتش خاصی در فضای اسپین بستگی دارد و تحت دوران اسپین ناوردا نیست. یادآوری می‌کنیم که حالت‌های $|\uparrow\rangle$ و $|\downarrow\rangle$ تحت دوران مانند کمیت‌های اسکالرند در حالی که حالت‌های $|\sigma\rangle$ مانند حالت‌های اسپینوری تبدیل می‌شوند

$$|\sigma\rangle \rightarrow \sum_{\sigma'} U_{\sigma'\sigma}^{\dagger} |\sigma'\rangle \quad (13-4)$$

U از رابطه

$$U = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \theta \cdot \tau\right] \quad (14-4)$$

به دست می‌آید که در آن $\vec{\tau}$ نماینده سه ماتریس پاولی است. عملگرهای میدان فرمیونی نیز به همین شکل تبدیل می‌شوند

$$\hat{f}_{\sigma} \rightarrow U_{\sigma\sigma'} \hat{f}_{\sigma'} \quad (15-4)$$

نتیجه می‌شود که تبدیل عملگرهای بوزونی p_{σ} باید به شکل زیر باشد

$$\hat{p}_{\sigma} \rightarrow U \hat{p} U^{\dagger} \quad (16-4)$$

و لازم است که \hat{p} عملگر ماتریسی 2×2 ، $\hat{p}_{\sigma\sigma}$ باشد. عملگرهای $\hat{p}_{\uparrow}^{\dagger}$ و $\hat{p}_{\downarrow}^{\dagger}$ که کوتلیار و روکنستین به کار برده‌اند مقادیر ویژه $\hat{p}_{\sigma\sigma}^{\dagger}$ هستند، یعنی در دستگاه مختصاتی که $\hat{p}_{\sigma\sigma}^{\dagger}$ قطری است عناصر غیرصفر $\hat{p}_{\sigma\sigma}^{\dagger}$ هستند. صورت ناوردا تحت دوران اسپین رابطه (۱-۴) چنین می‌شود

$$\langle \hat{z}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{z}_{j\sigma} \rangle = e^{\gamma} p^{\gamma} + d^{\gamma} p^{\gamma} + \gamma e d p^{\gamma} = p^{\gamma} (e+d)^{\gamma} \quad (10-4)$$

در غیاب برهم‌کنش الکترونی، یعنی $U = 0$ ، الکترونها به‌طور کاتوره‌ای در تمام نقاط شبکه توزیع می‌شوند و با ضریب آکندهی $n/2$ خواهیم داشت

$$p^{\gamma} = \left[1 - \frac{n}{\gamma}\right] \frac{n}{\gamma}, \quad e^{\gamma} = \left[1 - \frac{n}{\gamma}\right]^{\gamma}, \quad d^{\gamma} = \frac{n^{\gamma}}{\gamma}$$

بنابراین

$$\langle \hat{z}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{z}_{i\sigma} \rangle = \frac{n}{\gamma} \left[1 - \frac{n}{\gamma}\right]$$

از این نتیجه است که می‌توان دید چرا باید از عملگرهای بازبهنجار شده $\hat{z}_{i\sigma}^{\dagger}$ و $\hat{z}_{i\sigma}$ استفاده کرد تا به‌ازای $U = 0$ داشته باشیم

$$\langle \hat{z}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{z}_{j\sigma} \rangle = 1$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه هامیلتونی در زیرفضای فیزیکی بر اثر این جایگذاری تغییر نمی‌کنند. با این جایگذاری اگر مجدداً (۸-۴) را محاسبه کنیم به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\langle \hat{z}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{z}_{j\sigma} \rangle = \frac{[n - \gamma d^{\gamma}]}{\left[1 - \frac{n}{\gamma}\right] n} \left[n + \sqrt{1 - n + d^{\gamma}}\right]^{\gamma} \quad (11-4)$$

برای رسیدن به این نتیجه از روابط (۹-۴) برای حذف e و p استفاده کرده‌ایم و ضریب بازبهنجارش نیز در مخرج کسر دیده می‌شود. کمیت فوق به‌ازای $d^{\gamma} = n^{\gamma}/\gamma$ برابر با ۱ خواهد شد. پس در نمایش جدید، هامیلتونی به شکل زیر درمی‌آید

$$\hat{H} = -t \sum \hat{z}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{z}_{j\sigma} \hat{f}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{j\sigma} + U \sum d_i^{\dagger} d_i \quad (12-4)$$

که در آن $\hat{z}_{i\sigma}$ در رابطه (۸-۴) تعریف شده است. انتظار می‌رود که گزینه (۸-۴) گزینه معقولی برای U های بزرگ باشد زیرا در تقریب میدان میانگین نتایج تقریب گاتزویلر را به‌دست می‌دهد [۲۳، ۱۰]. این به هیچوجه مانع آن نیست که با توجه به خواص مدل، گزینه بهتری برای مقادیر بزرگ U وجود نداشته باشد (گرچه تاکنون گزینه بهتری پیشنهاد نشده است).

باید خاطر نشان کرد که نه تنها یکتایی (۸-۴)، بلکه صورت خاص آن می‌تواند در به حساب آوردن افت و خیزها، فراسوی تقریب میدان میانگین، مسئله‌ساز باشد. اخیراً ژولیکور و لوگیو [۲۵] تناقضهایی را در محاسبه افت و خیزها به روش کوتلیار

$$|\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} \hat{p}_{\sigma\sigma'}^+ \hat{f}_{\sigma'}^+ |\text{vac}\rangle \quad (17-4)$$

که

$$\hat{z}_{\sigma'\sigma} = \hat{e}^+ \hat{p}_{\sigma\sigma'} + \hat{p}_{\sigma\sigma'}^+ \hat{d} \quad (25-4)$$

$\hat{p}_{\sigma\sigma'}^+$ را می‌توان به صورت ترکیبی از ماتریسهای پاولی نوشت [۱۹، ۲۰]

$$\hat{p}_{\sigma\sigma'}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu=0}^3 p_{\mu}^+ \tau_{\mu, \sigma\sigma'} \quad (18-4)$$

که در آن $\tau_{\sigma\sigma'} = 1_{\sigma\sigma'}$ عملگر مزدوج هرمیتی نیز به شکل زیر خواهد بود

$$\hat{p}_{\sigma\sigma'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu=0}^3 \hat{p}_{\mu} \tau_{\mu, \sigma\sigma'} \quad (19-4)$$

و عملگرهای \hat{p}_{μ} و \hat{p}_{ν}^+ از روابط جابه‌جایی بندادی بوزونی تبعیت می‌کنند

$$[\hat{p}_{\mu}, \hat{p}_{\nu}] = \delta_{\mu\nu} \quad (20-4)$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$[\hat{p}_{\sigma_1\sigma_2}, \hat{p}_{\sigma_3\sigma_4}^+] = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{\sigma_1\sigma_2} \delta_{\sigma_3\sigma_4} \quad (21-4)$$

صورت معادل عملگرهای خلق و نابودی الکترون برحسب $\hat{p}_{\sigma\sigma'}$ ، \hat{e} و \hat{d} چنین خواهد بود

$$\hat{c}_{\sigma}^+ = \sum_{\sigma'} [\hat{p}_{\sigma\sigma'}^+ \hat{f}_{\sigma'}^+ \hat{e} + \sigma\sigma' \hat{d}^+ \hat{f}_{\sigma'}^+ p_{\sigma\sigma'}] \quad (22-4)$$

$$\hat{c}_{\sigma} = \sum_{\sigma'} [\hat{e}^+ \hat{f}_{\sigma'} \hat{p}_{\sigma\sigma'} + \sigma\sigma' \hat{p}_{\sigma\sigma'}^+ \hat{f}_{\sigma'} \hat{d}] \quad (22-4)$$

جملات شامل عملگر \hat{p} را می‌توان با در نظر گرفتن خصوصیات تبدیلی \hat{p} تحت عملگر معکوس‌گر زمان \hat{T} به صورت واضحتری نوشت

$$\hat{\tilde{p}} \equiv \hat{T} \hat{p} \hat{T}^{-1} = -\hat{p}, \quad \hat{\tilde{p}}_{\sigma} \equiv \hat{T} \hat{p}_{\sigma} \hat{T}^{-1} = p_{\sigma}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود که

$$\hat{\tilde{p}}_{\sigma\sigma'} = \left[\hat{T} \hat{p} \hat{T}^{-1} \right]_{\sigma\sigma'} = \sigma\sigma' \hat{p}_{\sigma', \sigma} \quad (23-4)$$

تعمیم روابط (۲-۴) تا (۵-۴) برای صورتبندی کنونی چنین خواهد بود

$$\hat{c}_{\sigma} = \sum_{\sigma'} \hat{f}_{\sigma'} \hat{\tilde{z}}_{\sigma'\sigma} \quad (24-4)$$

$$Q = \hat{e}^+ \hat{e} + \hat{d}^+ \hat{d} + \sum_{\mu=0}^3 p_{\mu}^+ p_{\mu} = 1 \quad (26-4)$$

قیدها به صورت زیر در می‌آیند

$$\hat{f}_{\sigma'}^+ \hat{f}_{\sigma} = 2 \sum_{\sigma_1} \hat{p}_{\sigma_1\sigma'}^+ \hat{p}_{\sigma_1\sigma} + \delta_{\sigma\sigma'} \hat{d}^+ \hat{d} \quad (27-4)$$

برحسب p_{μ} قید (۲۷-۴) را می‌توان این‌طور نوشت

$$\sum_{\sigma} \hat{f}_{\sigma'}^+ \hat{f}_{\sigma} = \sum_{\mu} \hat{p}_{\mu}^+ \hat{p}_{\mu} + 2 \hat{d}^+ \hat{d}$$

$$\sum_{\sigma\sigma'} \tau_{\sigma\sigma'} \hat{f}_{\sigma'}^+ \hat{f}_{\sigma} = \hat{p}^+ \hat{p} + \hat{p}^+ \hat{p} + i \hat{p}^+ \times \mathbf{p} \quad (28-4)$$

تعمیم رابطه (۸-۴) چنین است

$$\hat{z} = \hat{e}^+ \hat{L} \hat{M} \hat{R} \hat{p} + \hat{p} \hat{L} \hat{M} \hat{R} \hat{d} \quad (29-4)$$

که در آن

$$\hat{L} = \left[(1 - \hat{d}^+ \hat{d}) (1 - 2 \hat{p}^+ \hat{p}) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (30-4)$$

$$\hat{R} = \left[(1 - \hat{e}^+ \hat{e}) (1 - 2 \hat{\tilde{p}}^+ \hat{\tilde{p}}) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (31-4)$$

$$\hat{M} = \left[1 + \hat{e}^+ \hat{e} + \hat{d}^+ \hat{d} + \sum_{\mu=0}^3 \hat{p}_{\mu}^+ p_{\mu} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (32-4)$$

در زیر فضای فیزیکی، مقادیر ویژه $\hat{L} \hat{M} \hat{R}$ همه ۱ است. بنابراین این عملگرها را می‌توان به هامیلتونی اضافه کرد بی‌آنکه محتوای نظریه تغییر کند. اما در هر تقریبی، چنانکه خواهیم دید، وجود $\hat{L} \hat{M} \hat{R}$ موجب تغییراتی می‌شود.

به راحتی می‌توان نشان داد که عملگر چگالی $\hat{n} = \sum_{\sigma} \hat{c}_{\sigma}^+ \hat{c}_{\sigma}$ و عملگر چگالی نقاط شبکه‌ای دو الکترونی به صورت زیر در می‌آیند

$$\hat{n} = \sum_{\sigma} \hat{f}_{\sigma}^+ \hat{f}_{\sigma} \quad (33-4)$$

$$\hat{D} = \hat{d}^+ \hat{d} \quad (34-4)$$

آن است قیدها را حفظ می‌کند کافی است قید را برای یک زمان خاص برآورده و ضرایب لاگرانژ را مستقل از زمان فرض کرد. تابع پارش مدل (۴-۳۷) را اکنون می‌توان از انتگرال مسیر زیر محاسبه کرد

$$Z = \int D\mu_e D\mu_p D\mu_d D\mu_f D\lambda^{(1)} D\lambda^{(2)} e^{-\int_0^\beta d\tau (\mathcal{L}_B(\tau) + \mathcal{L}_{BF}(\tau))} \quad (38-4)$$

$$\mathcal{L}_B(\tau) = \sum_i \left\{ e_i^* \left[\partial_\tau + \lambda_i^{(1)} \right] e_i + \sum_{\mu=0}^2 P_{i\mu}^* \left[\partial_\tau + \lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)} \right] P_{i\mu} - \lambda_i^{(2)} \left[P_{i\cdot}^* \cdot P_i + P_i^* \cdot P_{i\cdot} - i \left(P_i^* \times P_i \right) \right] + d_i^* \left[\partial_\tau + \lambda_i^{(1)} - \gamma \lambda_i^{(2)} + U \right] d_i \right\} \quad (39-4)$$

$$\mathcal{L}_{BF} = \sum_{i,\sigma,\sigma'} \bar{f}_{i\sigma} \left[\left[\partial_\tau - \mu_\sigma + \lambda_i^{(2)} \right] \delta_{\sigma\sigma'} + \left[\lambda_i^{(2)} - \mathbf{h} \right] \tau_{\sigma\sigma'} \right] f_{i\sigma'} - \sum_{\substack{i,j,\sigma \\ \sigma_1,\sigma_2}} t_{ij} \bar{f}_{i\sigma} z_{i\sigma\sigma_1}^* z_{j\sigma_1\sigma_2} f_{j\sigma_2} \quad (40-4)$$

μ پتانسیل شیمیایی است و طوری تعیین می‌شود که میزان متوسط اشغال در هر نقطه شبکه‌ای را به دست دهد: $n = 1 - \delta$ (چون مدل حول $n = 1$ متقارن است می‌توان مسئله را به $\delta \geq 0$ محدود کرد)، \mathbf{h} میدان مغناطیسی خارجی است (شامل ضریب زیروسکوپی $\mathbf{h} = \gamma \mathbf{H}$)

اگر i, j نزدیکترین همسایه باشند در غیر این صورت

میدانهای $\lambda_i^{(1)}(\tau)$ و $\lambda_i^{(2)}(\tau)$ به ازای $\mu = 0, 1, 2, 3$ ، ضرایب لاگرانژ هستند که قیدها را در هر نقطه شبکه‌ای و به ازای تمام زمانها تضمین می‌کنند.

اندازه‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D\mu_e = \prod_{0 \leq \tau \leq \beta} \frac{de^*(\tau) de(\tau)}{2\pi i}, \quad D\mu_p = \prod_{\substack{0 \leq \tau \leq \beta \\ \mu=0,1,2,3}} \frac{dp_\mu^*(\tau) dp_\mu(\tau)}{2\pi i}$$

$$D\mu_d = \prod_{0 \leq \tau \leq \beta} \frac{dd^*(\tau) dd(\tau)}{2\pi i}, \quad D\mu_f = \prod_{\substack{0 \leq \tau \leq \beta \\ \sigma=1,2}} df_{\sigma}(\tau) df_{\sigma}^*(\tau)$$

$$D\lambda^{(1)} = \prod_{0 \leq \tau \leq \beta} d\lambda^{(1)}(\tau), \quad D\lambda^{(2)} = \prod_{\substack{0 \leq \tau \leq \beta \\ \mu=0,1,2,3}} d\lambda_\mu^{(2)}(\tau)$$

اما عملگر چگالی برای مؤلفه خاص اسپین \hat{n}_σ را برحسب عملگرهای بوزون برده فقط می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\hat{n}_\sigma = \frac{1}{V} \sum_{\mu=0}^2 \hat{p}_\mu^\dagger \hat{p}_\mu + \hat{d}^\dagger \hat{d} + \frac{1}{V} \sigma \times \left[\hat{p}^\dagger \hat{p}_\sigma + \hat{p}_\sigma^\dagger \hat{p} - i \left[\hat{p}^\dagger \hat{p}_\sigma - \hat{p}_\sigma^\dagger \hat{p} \right] \right] \quad (35-4)$$

به همین ترتیب عملگر چگالی اسپین

$$\hat{S} = \frac{1}{V} \sum_{\sigma\sigma'} \hat{c}_{\sigma\sigma'}^\dagger \tau_{\sigma\sigma'} \hat{c}_{\sigma\sigma'}$$

به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\hat{S} = \frac{1}{V} \sum_{\sigma,\sigma'\sigma_1} \tau_{\sigma\sigma'} \hat{p}_{\sigma\sigma'}^\dagger \hat{p}_{\sigma_1\sigma'} = \frac{1}{V} \times \left[\hat{p}^\dagger \hat{p}' + \hat{p}'^\dagger \hat{p} - i \left[\hat{p}'^\dagger \times \mathbf{p}' \right] \right] \quad (36-4)$$

که در آن $\mathbf{p}' = [p_1, -p_2, p_3]$

بنابراین صورت ناوردا تحت دوران اسپین هامیلتونی مدل هابارد را می‌توان چنین نوشت

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2} \hat{z}_{i\sigma\sigma_1}^\dagger \hat{f}_{i\sigma}^\dagger \hat{f}_{j\sigma_2} z_{j\sigma_2\sigma} + U \sum_i \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i \quad (37-4)$$

و قیدهای (۴-۲۶) و (۴-۲۷) را باید اضافه کرد. تبدیل عملگرهای خلق و نابودی الکترون به نمایش ذرات برده در رابطه (۴-۲۲)، جمله برهم‌کنش در هامیلتونی هابارد را خطی می‌کند. اما این به قیمت پیچیده‌تر شدن جمله جهش که اکنون به صورت برهم‌کنشی برحسب شبه‌فرمیون و بوزون در آمده است و افزودن قیدهایی که مانند برهم‌کنش جدیدی عمل کنند تمام می‌شود. سیستم جفتیده فرمیونی بوزونی با دو میدان فرمیونی $f_{i\uparrow}$ و $f_{i\downarrow}$ و شش میدان بوزونی $e_i, d_i, p_{i0}, p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}$ و میدانهای مربوط به ضرایب لاگرانژ ناشی از قیدها، سیستم بسیار پیچیده‌ای است. مزیت وارد کردن چنین تعداد زیاد میدان این است که در سطح تقریبهای ساده مانند تقریب میدان میانگین و احتمالاً همراه با تصحیحات افت‌وخیزهای گاوسی، احتمال درک اساس فیزیک مسئله بیشتر است.

۳.۴ نمایش انتگرال مسیر تابع پارش

نمایش انتگرال مسیر را می‌توان در هر پیمانهای (و برای هر گزینه میدان $\hat{z}_{i\sigma\sigma'}$) نوشت. قیدها را می‌توان با اضافه کردن جملاتی شامل ضرایب لاگرانژ به حساب آورد. از آنجا که تکامل زمانی که \hat{H} مولد

شامل مشتقهای زمانی فازهای θ_i و $\chi_{i\mu}$ ، از جمله جملات ناشی از تبدیل جایگزیده پیمانه‌ای میدانهای فرمیونی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$i\partial_\tau \theta_i \left[e_i^\dagger + |d_i|^\dagger + \sum_\mu q_{i\mu}^\dagger \right] + i\partial_\tau \chi_{i\mu} \left[\sum_\mu q_{i\mu}^\dagger + \dagger |d_i|^\dagger - \sum_\sigma \bar{f}_{i\sigma} f_{i\sigma} \right] + \dagger i \left[\partial_\tau \chi_i \hat{n}_i + \partial_\tau \hat{n}_i \sin \chi_i \cos \chi_i + [\partial_\tau \hat{n}_i \times \hat{n}_i] \sin^2 \chi_i \right] q_i q_i. \quad (47-4)$$

در اینجا قسمت وابسته به اسپین بردار فاز $\chi_{i\mu}$ ، به صورت $\lambda_i = \chi_i \hat{n}_i$ نوشته شده که در آن زاویه و \hat{n} محور دوران در فضای اسپین است. میدانهای بوزونی e_i و $q_{i\mu}$ در (47-4) حقیقی فرض شده‌اند. مقایسه با قیدهای (46-4) و (27-4) نشان می‌دهد که این جملات را می‌توان با تعریف متغیرهای جدید زیر در میدانهای مربوط به ضرایب لاگرانژ جذب کرد

$$-i d_i = \lambda_i^{(1)} + \partial_\tau \theta_i \quad (48-4)$$

$$-i \beta_{i\sigma} = \lambda_i^{(2)} + \partial_\tau \chi_{i\sigma}$$

$$-i \beta_i = \lambda_i^{(3)} + [\partial_\tau \chi_i \hat{n}_i + \partial_\tau \hat{n}_i \sin \chi_i \cos \chi_i]$$

به این ترتیب فازهای پنج میدان بوزونی e_i و $p_{i\mu}$ کاملاً حذف می‌شود. این میدانها دیگر مستقلاً دینامیک نیستند زیرا مشتقهای زمانی آنها حذف شده است. فقط میدان بوزونی d_i به صورت میدانی مختلط و دینامیک باقی می‌ماند. تابع پارش با این تغییرات به صورت زیر درمی‌آید (برای میدانهای حقیقی $|e|$ ، q و q از نمادگذاری قبلی e ، p و p استفاده می‌کنیم)

$$Z = \int De Dp_\mu Dp D\mu_\mu D\alpha D\beta_\mu D\beta e^{-[S_B + S_F]} \quad (49-4)$$

$$S_B = \int_0^\beta dt \sum_i \left\{ d_i^* [\partial_\tau + d_i - \dagger \beta_{i\sigma} + U] d + \alpha_i (e_i^\dagger - 1) + \alpha_i (e_i^\dagger - 1) + (\alpha_i - \beta_{i\sigma}) \sum_\mu p_{i\mu}^\dagger - \dagger \beta_{i\sigma} \cdot p_i p_{i\sigma} + \mathbf{h} \cdot p_i p_{i\sigma} \right\} \quad (50-4)$$

$$S_F = -\text{tr} \ln [(\partial_\tau - \mu_\sigma + \beta_{i\sigma}) \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{ij} + \beta_{i\sigma} \tau_{\sigma\sigma'} \delta_{ij} + \sum_{\sigma_1} z_{i\sigma_1 \sigma}^* z_{j\sigma_1 \sigma}] \quad (51-4)$$

K بخش بوزونی کنش و S_F بخش فرمیونی آن پس از انتگرال‌گیری روی میدانهای فرمیونی است.

انتگرال‌گیری روی پنج میدان بوزونی e ، p و p به صورت انتگرال‌گیری شعاعی روی میدان مختلط است یعنی $\int de^\dagger$ در حالی که میدانهای کاملاً موهومی پتانسیل شیمیایی α ، β و β از $-i\infty$ تا $+i\infty$ انتگرال‌گیری می‌شوند. شکل انتگرال مسیر در اینجا کامل شده است.

پس از انتگرال‌گیری روی میدانهای فرمیونی تابع پارش چنین نوشته می‌شود

$$Z = \int D\mu_e D\mu_p D\mu_d D\lambda^{(1)} D\lambda^{(2)} e^{-\int_0^\beta dt \mathcal{L}_B(\tau) - S_F} \quad (41-4)$$

$$S_F = -\text{tr} \ln \left\{ \delta_{ij} [\partial_\tau - \mu_\sigma + \lambda_\sigma^{(2)}] + [\lambda_\sigma^{(2)} - \mathbf{h}] \cdot \tau - t_{ij} z_i^* z_j \right\} \quad (42-4)$$

رد روی متغیر پیوسته τ و متغیرهای گسسته اسپین و مکان گرفته می‌شود. عبارتهای (41-4)، (42-4) و (43-4) آشکارا تحت دوران اسپینی ناوردا و نقطه شروع خوبی برای محاسبات کمیت‌های ناوردا تحت دوران اسپینی هستند. ماتریس عبارت (41-4) را می‌توان با تبدیل فوریه در زمان و مکان، قطری کرد. در نمایش تکانه، عناصر ماتریسی جمله جهش چنین‌اند

$$T_{\mathbf{k}\mathbf{k}',\sigma\sigma'} = \sum_{ij,\sigma,\sigma'} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} t_{ij} z_{i\sigma\sigma'}^* z_{j\sigma_1\sigma} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}_j} \quad (43-4)$$

انتگرال مسیر (41-4) هنوز خوش‌تعریف نیست زیرا در آن انتگرال‌گیری روی درجات آزادی کاذبی وجود دارد: می‌توان تقریباً گفت که قیدها فقط در انتگرال‌گیری روی بار الکتریکی (که قیدها برای آن تعریف شده است) تأثیر نمی‌گذارند بلکه انتگرال‌گیری روی میدانهای مزدوج دینامیکی را که در اینجا به شکل متغیرهای فاز درمی‌آیند، محدود می‌کنند. این امر را در پیمانه شعاعی بهتر می‌توان دید، یعنی در نمایش میدانهای بوزونی به صورت اندازه و فاز

$$e_i = |e_i| \exp(i\theta_i)$$

$$d_i = |d_i| \exp(i\phi_i) \quad (44-4)$$

$$p_{i\mu} = q_{i\mu} \exp(i\chi_{i\mu})$$

که در آنها ضرایب $\chi_{i\mu}$ و $q_{i\mu}$ در بسط $q_i = \sum_\mu q_{i\mu} \mathbf{x}_\mu$ و $\underline{q}_i = \sum_\mu q_{i\mu} \mathbf{x}_\mu$ حقیقی فرض شده‌اند. با قرار دادن در روابط (44-4) و (45-4) می‌توان دید که ضرایب فاز e_i و p_i در همه جملات بجز مشتق زمانی، با تبدیلهای جایگزیده و پیمانه‌ای زیر حذف می‌شوند

$$\sum_{\sigma\sigma'} f_{i\sigma'} [\exp[i\chi_i \cdot \tau]]_{\sigma\sigma'} \exp i\chi_i \rightarrow f_{i\sigma} \quad (45-4)$$

$$\underline{p}_i \exp(i\theta_i) \rightarrow \underline{p}_i$$

$$d_i \exp[i\theta_i - \dagger \chi_i \cdot] \rightarrow d_i \quad (46-4)$$

مشتقهای زمانی q_μ (مثلاً $q_\mu \partial_\tau q_\mu$) به علت شرایط مرزی تناوبی $q_\mu(\beta) = q_\mu(0)$ روی میدانهای بوزونی، حذف می‌شوند. جملات

1. P. W. Anderson, *Science*, **235** (1987) 1196.
2. D. Vollhardt, *Rev Mod. Phys.* **56** (1984) 99 and references therein.
3. V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations*, Cambridge University Press (1987).
4. H. Kleinert, *Path Integral in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics*, WS, Singapore (1991).
5. W. J. Negele, and M. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, Addison-Wesley, Pub. Com. (1988).
6. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, Addison Wesley, Pub. Com. (1991).
7. J. R. Schrieffer, X. G. Wen, and S. C. Zhang, *Phys. Rev.*, **B39** (1989) 11663.
A. Singh and Z. Tesanovic, *Phys. Rev.*, **B41** (1990) 786.
G. Vignale and M. R. Hedayati, *Phys. Rev.*, **B43** (1991) 10815.
S. John, P. and Voruganti, W. Goff, *Phys. Rev.*, **B43** (1991) 13365.
H. Monieu and K. S. Bedell, *Phys. Rev.*, **B45** (1992) 3164.
A. V. Chubukov and D. M. Frenkel, *Phys. Rev.*, **B38** (1988) 11844.
Z. Y. Weng, T. K. Lee, C. S. Ting, *Phys. Rev.*, **B38** (1988) 6561.
8. J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc. London*, **A276** (1963) 238, **A277** (1964) 337, **A 281** (1964) 401, **A285** (1964) 542.
9. M. C. Gutzwiller, *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963) 159.
10. M. C. Gutzwiller, *Phys. Rev.*, **134** (1964) A923, **137** (1965) A1726.
11. "The Hubbard Model" *Recent Results*, M. Rasetti (edt.) WS 1991.
12. H. J. Schulz, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990) 2462.
13. Z. Y. Weng, C. S. Thing, and T. K. Lee, *Phys. Rev.*, **B43** (1991) 3790.
Z. Y. Weng, D. N. Sheng, C. S. Ting, and Z. B. Su, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 3318.
14. B. I. Shraiman, and E. D. siggia, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 3318.
15. E. O. Tüngler, and T. Kopp, *Nucl. Phys.*, **B443** (1995) 516.
16. E. G. Batyev, *Sov. Phys. JETP*, **55** (1982) 1144; **57** (1983) 1517.
R. O. Zaitsev, *Sov. Phys. JETP*, **48** (1978) 1193.
A. E. Ruckenstein, and S. Schmidt-Rink, *Phys. Rev.*, **B38** (1988) 7188.
P. B. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) 821; *Physica*, **153-155** (1988) 103.
D. Z. Foerster, *Phys.*, **B47** (1989) 295.
17. M. Lavagna, *Phys. Rev.*, **B41** (1990) 142; *Helv. Phys. Acta.*, **63** (1990) 310.
18. T. Li, and P. Benard, *Phys. Rev.*, **B50** (1994) 6817.
19. T. Li, P. Wolfle, and P. J. Hirschfeld, *Phys. Rev.*, **B40** (1989) 6817.
20. R. Fresard, and P., Wolfle *Int. J. Mod. Phys.*, **B6** (1992) 685; *J. Phys. Condens Matter*, **4** (1992) 3625.
21. A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
22. W. M. Zhang, D. M. Feng, and R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.*, **62** (1990) 867.
23. G Kotliar and A. E. Ruckenstein, *Phys. Rev. Lett.*, **57** (1986) 1362.
24. E. Arrigoni and G. C. Strinati, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 3178.
E. Arrioni, C. Castellani, M. Guilli, R. Raimondi, and G. C. Strinati, *Phys. Rev.*, **241** (1994) 291.
E. Arrigoni and G. C. Strinati, *Phys. Rev.*, **B52** (1995).
25. Th. Jolicoeur and J. C. Le Guillou, *Phys. Rev.*, **B44** (1991) 2403.