مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱، شمارهٔ ۵، زمستان ۱۳۷۷

تبدیل پیمانه‌ای به عنوان تقلیلی از تبدیل BRST

علیرضا فرجی † و احمد شیرزاد †،††

† دانشکدهٔفیزیک ، دانشگاه صنعتی اصفهان

†† پژوهشکدهٔ فیزیک ، پژوهشگاه دانشهای بنیادی، فرمانیه، تهران

(دریافت مقاله: ۷۷/۹/۱۶ پذیرش مقاله: ۷۷/۱۱/۱)

چکیده

در این مقاله با مرور خواص اساسی تبدیل پیمانه‌ای در فرمولبندی کنش گسترش‌یافته وتبدیـل BRST در فرمولبنـدی نـاکمین،نشـان داده‌ایم که با تثبیت نسبی پیمانه BRST می‌توان به تبدیلی دست یافت که در حد جملات مرتبهٔ صفر نسـبت بـه پـاره‌ای از شـبح‌ها و پادشبح‌ها، منطبق بر تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد باشد.

۱. مقدمه

ناوردایی پیمانه‌ای یکی از دستاوردهای بسیار مهم فیزیک نظری در چند دههٔ گذشته است، که درحوزه‌های متفاوت از فـیزیک کـارایی خود را نشان داده است. نخستین بار دیراک نشـان داد کـه مدلهـای پیمانه‌ای دسته‌ای خاص ازدستگاههای مقید هستند که شـامل قیـود نوع اولند [۱]. در یک مدل ناوردای پیمانه‌ای، کنش دستگاه تحـت تبدیلهای شامل توابـع (یـا میدانهـای) دلخـواه وابسـته بـه زمـان از مختصات یا میدانها ناورداست. به این ترتیب رابطهٔ یـک بـه یکـی بین حالتهای فـیزیکی و مختصـات دسـتگاه در فضـای فـاز وجـود ندارد و مجموعه‌ای از نقاط فضای فاز به حـالت فـیزیکی یکسـانی اشاره دارند [۱]. این مجموعه از نقاط باتبدیل پیمانه‌ای به یکدیگر مربوط هستند. به ایـن ترتیـب از دیدگـاه کلاسیـک مسـیر حرکـت دستگاه در فضای فاز یگانه نیست و توابـع دلخـواه زمـانی در حـل معادلات حرکت ظاهر می‌شوند.

از سوی دیگر برای کوانتش دستگاه در رهیافت انتگرال مسـیر، تنهـا بـاید روی مسـیرهای فیزیکی انتگـرال گرفـت و بـه ترتیبـی درجـات آزادی پیمانـه‌ای را کنـار گذاشـت. ایـن نکتـه اگـر چـه دشواریهایی به همراه دارد، اما بـه معنـای نقـص نظریـه نیسـت. بـه طوری که حتی در صورت امکان گزینش یک پیمانهٔ خاص، یـا بـه اصطلاح تثبیت پیمانه، اغلـب ترجیـح می‌دهیـم مـدل پیمانـه‌ای بـه شکل اصلی خود که شامل درجـات آزادی فـیزیکی و پیمانـه‌ای بـا هم است، حفظ شود.

روش BRST در پاسخگویی به چنین دربایستی پای به عرصـهٔ فیزیک گذاشته است. نخستین بار فادیف و پوپوف [۲] مشاهده

آدرس پست الکترونیکی: shirzad@cc.iut.ac.ir

کردند که برای کوانتش دستگاه بـه روش انتگـرال مسیر در نظریـهٔ پیمانـه‌ای یانـگ - میلـز می‌تـوان بجـای تثبیت پیمانـه، میدانهـای گراسمانی جدیدی موسوم به شبح به مدل افـزود و روی آنهـا نیز انتگـرال مسیر گرفـت[۳]. پـس از چنـدی بچـی، روت، استـورا و تیوتین نشان دادند که کنش مؤثر مدل تعمیم یافته ذکر شـده دارای تقارن جدیـدی بـه نـام تقـارن BRST اسـت [۴]. بـه ایـن ترتیب می‌توان دید که دستگاههای مقیـد نـوع اول از یـک سـو از تقـارن پیمانه‌ای پشتیبانی می‌کنند و از سوی دیگر تقارن BRST را عرضـه می‌دارند، به گونـه‌ای کـه از طرفـی تـابع مولـد تبدیـل پیمانـه‌ای را می‌توان به صورت ترکیبی از قیـود نـوع اول دسـتگاه بنـا کـرد و از طـرف دیگـر مؤلفـه‌های تـابع مولـد تبدیـل BRST را می‌تـوان بـا استفاده از توابع ساختاری دستگاه که از جبر قیود نوع اول حـاصل می‌شوند، به دست‌آورد.

نکته‌ای که کاملاً روشن نیست نحوهٔ ارتباط این دو نوع تقـارن بسیار مهم است. در پاره‌ای از نوشته‌ها [۵و۶] برای مدلهای ساده‌ای نظیر الکترودینامیک نشان می‌دهنـد کـه بـا انتخـاب معینـی از تـابع تثبیت پیمانهٔ BRST (تابع K در روابـط ۵۸ ، ۸۳ و۸۵ ایـن مقالـه) تبدیـل BRST مشـابه تبدیـل پیمانـه‌ای اسـت کـه در آن شـبح‌ها جایگزین توابع دلخواه زمانی شده‌اند. اما این شـیوه نـه تنهـا بـرای حالت کلی و دلخواه ارائه نشده است، بلکه نحـوهٔ انجـام آن نـیز از الگوریتم معینی پیروی نمی‌کند. به عبارت دیگر مشخص نیست که برای یک مدل دلخواه با چه تثبیت پیمانـهٔ BRST می‌تـوان تبدیـل BRST مختصات را مشابه تبدیل پیمانه‌ای آنها کرد.

هدف از این مقالـه فراهـم آوردن امکـانی بـرای مقصـود فـوق است. در این نوشـته، پـس از مقدمـهٔ حـاضر، در بخـش دوم ابتـدا مروری بر دستگاههای مقید و تقارن پیمانه‌ای در فرمولبندی کنـش کل و کنش گسترش یافته خواهیم داشـت. چنانکـه خواهیـم دیـد، نقطه‌نظر اساسی در انتخاب فرمولبندی هامیلتونی وکنـش گسـترش یافته آن است که می‌تـوان دستگاه گسترده‌تری بـه جـای دسـتگاه اصلی با تقارن بیشتر تعیین کرد و نهایتاً با تثبیت پیمانـهٔ متغیرهـای اضافه شده، به دستگاه اصلی با تقارن محدود آن بازگشـت. بخـش سوم این مقاله به مطالعهٔ ابرفضای فـاز و مبـانی اصلـی فرمولبنـدی کلاسیک BRST اختصاص دارد. نشان می‌دهیم که با تعمیم فضای فاز از طریق افزودن شبح‌ها و پادشبح‌ها می‌تـوان بـه کنـش تعمیـم یافته با تقارن BRST دست یافت . به‌ویژه با در نظر گرفتن نظریـهٔ ناکمین BRST این امکان را می‌یابیم که ضرایب نامعین لاگـرانژ را نیز در چارچوبی بندادی مورد بررسی قرار دهیم.

بخش چهارم ایـن مقالـه، کـه در واقـع هـدف اصلـی نوشـته را تشـکیل می‌دهـد، بـه بیـان نحـوهٔ ارتبـاط تبدیـل BRST و تبدیـل پیمانه‌ای مربوط می‌شود. در این بخش نشان می‌دهیم همانطور کـه هر کمیت فیزیکی در فضای فاز معمولی، دارای تعمیمی در فضـای فاز تعمیم یافته بر حسـب شبح‌ها و پادشـبح‌ها اسـت، تـابع مولـد BRST نیز تعمیم نـوع خـاصی از یـک تـابع مولـد فـرد وحقیقـی تبدیل پیمانه‌ای است. برای این منظور نشان می‌دهیم کـه بـا اعمـال محدودیت کوچکی روی تابع تثبیـت پیمانـهٔ BRST می‌تـوان ایـن تبدیل را برای مختصات فضای فاز از یک سـو و ضرایـب نـامعین لاگرانژ از سوی دیگر به گونه‌ای تنظیم کرد کـه تبدیـل BRST در مرتبهٔ صفر دسته‌ای از شبح‌ها و پادشبح‌ها به تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد تقلیل یابد. به این ترتیـب می‌تـوان فرمولبنـدی BRST را که هم از جهت نحوهٔ تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ و هم از جهت امکان باز تعریف قیود [۶] چارچوبی کاملاً بندادی دارد، جایگزین فرمولبندی کنش گسترش یافته کـه فـاقد ایـن ویژگیهاسـت کـرد و سپس با تثبیت پیمانهٔ معین در آن، به تبدیلات پیمانه‌ای معمولی در کنش گسترش یافته و نهایتاً در کنش کل دست یافت. بخش پنجم نیز به حل دو مثال اختصاص‌یافته است.

لازم به ذکر است که معمولاً در مقالات و نوشته‌های مربـوط به BRST این قابلیت فوق‌العاده تنها در چار چـوب مثالهـای بسیار ساده (نظیر الکترودینامیک که قیود آن آبلی است) دیده شده‌است.

۲ . دستگاههای مقید

۲ . ۱ . دینامیک دستگاههای مقید

لاگرانژی $L(q,\dot{q})$ را تکین گوییم اگر تکانـه‌های بنـدادی دسـتگاه مطابق تعریف رابطهٔ زیر

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \qquad (۱)$$

مستقل از هم نباشند. در این صورت در فضای فاز m_1 رابطهٔ معیـن موسوم به قیود اولیه به صورت زیر:

$$\phi_{\alpha_1}(q,p) = ۰ \qquad \alpha_1 = 1,\dots,m_1 \qquad (۲)$$

بین مختصات و تکانه‌ها برقراراست و دستگاه را نیز یک

"دستگاه مقید" می‌نامیم[۱] می‌توان نشان داد [۱] که معادلات بندادی حرکت یک دستگاه مقید به صورت زیر هستند:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda^{\alpha_1} \frac{\partial \phi_{\alpha_1}}{\partial p_i}$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_C}{\partial q^i} - \lambda^{\alpha_1} \frac{\partial \phi_{\alpha_1}}{\partial q^i} \qquad (۳)$$

که در آن H_C هامیلتونی بندادی و λ^{α_1}ها ضرایب نامعین لاگرانژ هستند. در روابط فوق جمع روی شاخص تکراری نیز در نظر گرفته شده‌است. به بیان دیگر، تحول زمانی هر تابع از فضای فاز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\dot{g} = [g, H_T] \qquad (۴)$$

که در آن نماد [,] معرف کروشه‌پواسون بوده و H_T هامیلتونی کل است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_T = H_C + \lambda^{\alpha_1}\phi_{\alpha_1} \qquad (۵)$$

معادلات (۲) و (۳) را از وردش کنش کل زیر نسبت به مختصات فضای فاز و ضرایب نامعین لاگرانژ نیز می‌توان به دست آورد:

$$S_T = \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}^i p_i - H_C - \lambda^{\alpha_1}\phi_{\alpha_1}\right) dt \qquad (۶)$$

۲.۲. ساختار قیدی

دسته معادلات (۲) و (۳) وقتی سازگارند که مشتق زمانی قیود اولیه (۲) از رابطه (۴) صفر باشند:

$$\dot{\phi}_{\alpha_1} = [\phi_{\alpha_1}, H_T] \approx 0 \qquad (۷)$$

علامت ≈ در رابطهٔ فوق به معنای تساوی ضعیف یا تساوی روی سطح قیدی دستگاه است. شرط (۷) ممکن است به تعیین ضرایب نامعین لاگرانژ (برحسب مختصات فضای فاز) و یا ظهور قیود جدید منجر شود که به آنها قیود مرتبهٔ دوم می‌گوییم. شرط سازگاری زمانی باید برای قیود اخیر نیز در نظر گرفته شود. به این ترتیب، اگر ضرایب نامعین لاگرانژ به دست نیایند و یا شرط سازگاری به طور اتحادی برقرا ر نشود، قیود مرتبهٔ سوم به دست می‌آیند واین امر به همین ترتیب ادامه می‌یابد. بررسی سازگاری زمانی قیود تا جایی ادامه می‌یابد که یا ضرایب نامعین لاگرانژ محاسبه شوند و یا شرط سازگاری قیود روی سطح قیدی به دست آمده به طور اتحادی برقرار باشد.

به طور اجمال از رابطهٔ (۷) و روابط مشابه آن برای قیود مراتب بالاتر می‌توان دید که ضرایب نامعین لاگرانژ وقتی قابل محاسبه‌اند که کروشهٔ پواسون پاره‌ای از قیود با یکدیگر حتی به طور ضعیف نیز صفر نباشد. در این صورت دستگاه حاوی قیود نوع دوم است. برعکس آن دسته از قیود که کروشهٔ پواسون آنها با قیود دیگر صفر باشد، قیود نوع اول نامیده می‌شوند. وجود این نوع از قیود باعث می‌شود که ضرایب نامعین لاگرانژ (یا تعدادی از آنها) تعیین نشوند و به این ترتیب در معادلات حرکت دستگاه، توابع دلخواه زمانی باقی بمانند. در این صورت می گوییم دستگاه دارای ناوردایی پیمانه‌ای است. جزییات این امر را می‌توان در مراجع [۱ و ۱۰ تا ۱۴] مطالعه کرد. در این مقاله برای سادگی فقط دستگاههایی را در نظر می گیریم که دارای قیود نوع اول باشند. به بیان دیگر فرض می‌کنیم که کروشه‌پواسون کلیه قیود با یکدیگر به طور ضعیف صفر باشد.

حال اشاره‌ای داریم به جبر کروشه‌پواسون قیود که آن‌را ساختار قیدی دستگاه می‌نامیم. شرط نوع اول بودن قیود اولیه (روی سطح قیدی قیود اولیه) رابطهٔ زیر را ایجاب می‌کند:

$$[\phi_{\alpha_1}, \phi_{\beta_1}] = C_{\alpha_1\beta_1}{}^{\gamma_1}\phi_{\gamma_1} \qquad (۸)$$

که در آن ضرایب $C_{\alpha_1\beta_1}{}^{\gamma_1}$ در حالت کلی توابعی از فضای فاز هستند. سازگاری زمانی قیود اولیه که تعداد آنها m_1 است منجر به ظهور m_2 قید مرتبهٔ دوم $(m_2 \le m_1)$ می‌شود که به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[H_C, \phi_{\alpha_1}] = V_{\alpha_1}^{\beta_1}\phi_{\beta_1} + V_{\alpha_1}^{\beta_2}\phi_{\beta_2} \quad . \qquad (۹)$$

فرض می‌کنیم در تمام فضای فاز ماتریس ضرایب $V_{\alpha_1}^{\beta_2}$ (که یک ماتریس مستطیلی $m_1 \times m_2$ است) دارای رتبهٔ بیشینهٔ m_2 باشد، به این معنی که کلیهٔ قیود مرتبهٔ دوم از شرط سازگاری زمانی قیود مرتبهٔ اول به دست می‌آیند.

۱- لاگرانژیهای تکین، دستگاههای مقید و ناوردایی پیمانه‌ای در فرمولبندی لاگرانژی نیزقابل بررسی است، که در این مقاله مد نظر نیست.برای نمونه مراجع [۵، ۶ و ۷] را ببینید.

فرایند فوق مرحله به مرحله تکرار می‌شود، بسه طوری کـه بـه عنوان مثال برای نوع اول بودن قیود مرتبهٔ nام داریم:

$$\left[\phi_{\alpha_1},\phi_{\alpha_n}\right]=\sum_{i\le n} C_{\alpha_1\,\alpha_n}{}^{\beta_i}\phi_{\beta_i} \qquad (۱۰)$$

و برای شرط سازگاری زمانی آنها نیز داریم:

$$\left[H_C,\phi_{\alpha_n}\right]=\sum_{i\le n+1} V_{\alpha_n}^{\beta_i}\phi_{\beta_i} \qquad (۱۱)$$

اگر فرض کنیم الگوی ساختار قیدی در گام Nام خاتمه یابد، برای سازگاری قیود مرتبهٔ Nام خواهیم داشت:

$$\left[H_C,\phi_{\alpha_N}\right]=\sum_{i\le N} V_{\alpha_N}^{\beta_i}\phi_{\beta_i} \qquad (۱۲)$$

رابطهٔ اخیر به این معناست که از سازگاری قیود مرتبـهٔ Nام، قیـود جدیـدی ظـاهر نمی‌شـوند. مجموعـهٔ ضرایـب $C_{\alpha_i\,\alpha_j}{}^{\beta_k}$ و $V_{\alpha_i}^{\beta_j}$ ساختار قیدی دستگاه را تعیین می‌کنند که به آنها ضرایـب سـاختار قیدی می‌گوییم [۱۳].

۲ . ۳ . هامیلتونی گسترش یافته

چنان‌که پیداست، ساختار قیدی دستگاه در جزییات خود شدیداً بـه مرتبهٔ قیود وابستگی دارد و این امر فرمولبندی مسئله را دشوار مـی سازد. به عنوان مثال تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای به گونهٔ پیچیده‌ای به قیود مرتبه های مختلف و مشتقات توابع دلخـواه زمـانی از مراتـب مختلف بستگی دارد. این موضوع در مراجع [۱۰، ۱۲ و ۱۵] مـورد بحث قرار گرفته است . گرچه نهایتاً جواب صریحی بـرای شـکل تابع مولد بر حسب قیود دسـتگاه بـه دسـت نمی‌آیـد، امـا می‌تـوان نشان داد که تحت شرایط معینی (موسوم به شرایط صحت فـرض دیراک) کلیهٔ قیود دستگاه در ساختمان تابع مولـد تبدیـل پیمانـه‌ای حضـور دارنـد. بـه بیـان دیگـر تحـت شـرایط مذکـور، کلیـهٔ قیـود (نوع اول) دستگاه، مولد تبدیل پیمانه‌ای هستند. از آنجا که تحـت اثر یک تبدیـل پیمانـه‌ای حـالت فـیزیکی دسـتگاه تغییر نمی‌کنـد، می‌توان گفت کمیتهای فیزیکی‌و یا به اصطـلاح "مشـاهده پذیرهـای دیراک" کمیتهایی هستند که کروشه‌پواسون آنها با کلیهٔ قیود دستگاه صفر شود.

به منظور پرهیز از دشواری در نظر گرفتن مرتبهٔ قیود دستگاه و ریزه کاریهای جبر کروشه‌پواسون قیود، می‌توان به ترتیب زیر عمل کرد. فرض کنیم ϕ_a نشـان دهنـده هـر یـک از قیـود ϕ_{α_1}، ϕ_{α_2} تـا ϕ_{α_N} باشد. تعداد کل قیود (نوع اول) دستگاه برابر است با:

$$M=m_1+m_2+\cdots m_n \qquad (۱۳)$$

که شاخص a روی آن تغییر می‌کند. روابط (۸) تا (۱۲) را در قالب دو رابطهٔ زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\left[\phi_a,\phi_b\right]=C_{a\,b}{}^{c}\phi_c\ , \qquad (۱۴)$$

$$\left[H_C,\phi_a\right]=V_a^b\phi_b\ . \qquad (۱۵)$$

کمیت A مشاهده پذیر دیراک است اگر:

$$\left[A,\phi_a\right]\approx 0 \qquad a=1,\ldots,M\ . \qquad (۱۶)$$

دو مشاهدهٔ پذیر دیراک با یکدیگر هم ارزند اگر به طور ضعیف بـا هم برابر باشند. به عبارت دیگر، مشاهده پذیرهایی که تفاوت آنهـا با هم ترکیبی از قیـود دسـتگاه اسـت بـر کمیـت فـیزیکی یکسـانی دلالت دارند. اکنون می‌توان به جای رابطه (۴) برای تغییرات توابـع فضای فاز، از معادلهٔ دینامیکی زیر استفاده کرد.

$$\dot{g}=\left[g,H_E\right] \qquad (۱۷)$$

که در آن H_E ها میلتونی تعمیم یافته زیر است:

$$H_E=H_C+\lambda^a\phi_a\ . \qquad (۱۸)$$

تعـداد ضرایـب نـامعین لاگـرانژ تعمیـم یافتـه λ^a بسـیار بیشـتر از ضرایب قبلی λ^{α_1} است. واضح است که معادلات دینـامیکی (۱۷) و (۴) برای هر کمیت دلخواه با یکدیگر توافق ندارند، و تنها بـرای مشاهده پذیرهای دیراک نتایج فیزیکی یکسانی خواهند داشت.

۲ . ۴ . کنش گسترش یافته و تقارن پیمانه‌ای

کنش گسترش یافته زیر را در نظر بگیرید

$$S_E=\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{q}^i p_i-H_C-\lambda^a\phi_a\right)dt\ . \qquad (۱۹)$$

معادلات حرکت ناشی از کنش فوق به قرار زیر هستند:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_C}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \\ \phi_a &= 0 \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

چنان‌که دیده می شود، این معادلات با معادلات ناشی از کنش کل (۶) تفاوت دارند. در واقع تعداد توابع اختیاری از زمان که در حل معادلات (۲۰) ظاهر می‌شود با تعداد کل قیود نوع اول دستگاه برابر است. در حالت کلی تعداد قیود نوع اول بسیار بیشتر از تعداد توابع اختیاری از زمان ظاهر شده در حل معادلات (۳) است. اما به سهولت می توان دید که با تثبیت پیمانهٔ

$$\lambda^{\alpha_i} = 0 \qquad i \geq 2 \qquad (۲۱)$$

معادلات (۲۰) به همان معادلات (۳) تبدیل می‌شوند. به همین دلیل و به واسطهٔ سهولت کار با کنش تعمیم یافته در مقایسه با کنش کل ، سعی می کنیم فرمولبندی را براساس آن انجام دهیم.

حال ببینیم تقارنهای پیمانه ای کنش S_E چیست. برای این کار به دنبال معرفی وردشهای مناسبی از مختصات فضای فاز و ضرایب نامعین لاگرانژ هستیم که کنش تعمیم یافته را ناوردا نگه دارند. چنین وردشهایی قدر مسلم معادلات حرکت (۲۰) را نیز ناوردا نگه می دارند. به بیان دیگر با تعریف تبدیل پیمانه‌ای به عنوان تبدیلی که کنش S_E را تغییر ندهد، به طور طبیعی به تبدیلهایی که حلهای معادلات حرکت را به هم تبدیل کنند نیز دست یافته‌ایم.

فرض کنیم وردش توابع فضای فاز به کمک تابع مولد:

$$G_\varepsilon = \varepsilon^a(t)\phi_a \qquad (۲۲)$$

به صورت زیر به‌دست آیند:

$$\delta_\varepsilon f = \varepsilon^a\left[f,\phi_a\right]. \qquad (۲۳)$$

می توان نشان داد [۳] که اگر وردش ضرایب نامعین لاگرانژ نیز به صورت زیر فرض شوند

$$\delta_\varepsilon \lambda^a = \dot{\varepsilon}^a + \lambda^c \varepsilon^b C_{b\,c}{}^a - \varepsilon^b V_b^a \qquad (۲۴)$$

آنگاه تحت تبدیل (۲۳) و (۲۴) کنش گسترش یافته (۱۹) ناورداست، در رابطهٔ اخیر ضرایب $C_{b\,c}{}^a$ و V_b^a همان ضرایب ساختاری معرفی شده در روابط (۱۴) و (۱۵) می باشند. به طور گذرا می توان دید که تحت تثبیت پیمانه (۲۱) باید وردش $\delta_\varepsilon \lambda^{\alpha_i}$برای $i \geq 2$ ، صفر باشد. چنین چیزی منجر به روابطی میان $\varepsilon^a(t)$ ها در تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای خواهد شد، که با جایگزینی آنها در تابع مولد (۲۲) می توان به تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای کنش کل S_T که دارای m_1 تابع اختیاری از زمان است، دست یافت.

می‌توان نشان داد [۳] که تابع به‌دست آمده به‌این ترتیب، دارای ساختار تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای ارائه شده در مراجع [۱۲] و [۱۵] برای فرمولبندی هامیلتونی کل می‌باشد.

۳. ابر فضای فاز

فضای فاز در مواردی ممکن است شامل تعدادی متغیر فرد یا فرمیونی (که گاه به آنها متغیرهای گراسمانی نیز گفته می‌شود) باشد، که به آن ابرفضای فاز می گوییم .برای آشنایی بیشتر با جبر گراسمانی ، خوانندهٔ علاقمند را به مرجع [۱۶] ارجاع می دهیم. در اینجا به طور خلاصه تعدادی از روابط لازم در مورد ابر فضای فاز را ذکر می کنیم.

۳ . ۱ . متغیرهای گراسمانی وکروشهٔپواسون

دو متغیر θ^α و θ^β را فرد یا پادجابجاپذیر می‌گوییم ، اگر حاصلضرب آنها خاصیت پادجابجایی داشته باشد یعنی:

$$\theta^\alpha \theta^\beta = -\theta^\beta \theta^\alpha . \qquad (۲۵)$$

با تعریف پاریتهٔ گراسمان می‌توان کمیتهای زوج وفرد را به‌طور همزمان بررسی کرد. پاریتهٔ گراسمانی ε_f کمیت f برابر با صفر است اگر این کمیت زوج باشد و برابر با یک است اگر این کمیت فرد باشد. با این تعریف برای هردو کمیت f و g می‌توان نوشت:

$$fg = (-)^{\varepsilon_f \varepsilon_g} gf . \qquad (۲۶)$$

کروشه‌پواسون دو تابع دلخواه در ابرفضای‌فاز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[F,G\right] = \frac{\partial^R F}{\partial z^A} C^{AB} \frac{\partial^L G}{\partial z^B} \qquad (۲۷)$$

در رابطه فوق منظوراز R مشتق از طرف راست و منظور از L مشتق از طرف چپ است. ضرایب C^{AB} نیز از کروشه پواسون اساسی زیر به دست می‌آیند:

$$\left[z^A, z^B\right] = C^{AB} \qquad (۲۸)$$

در این رابطه منظور از zها متغیرهای ابرفضای فاز (مختصات و تکانه‌ها) است که شامل متغیرهای فرمیونی نیز می‌باشد. از رابطهٔ (۲۷) می‌توان خواص زیر را برای کروشه‌های پواسون در ابرفضای فاز اثبات کرد:

$$[F,G] = -(-)^{\varepsilon_F\varepsilon_G}[G,F] \,, \qquad (۲۹)$$

$$[F,G_1G_2] = [F,G_1]G_2 + (-)^{\varepsilon_F\varepsilon_{G_1}} G_1[F,G_2] \,, \qquad (۳۰)$$

$$\varepsilon_{[F,G]} = \varepsilon_F + \varepsilon_G \,, \qquad (۳۱)$$

$$[F,G]^* = -\left[G^*,F^*\right] \,, \qquad (۳۲)$$

$$\begin{aligned}&[[F_1,F_2],F_3] + (-)^{\varepsilon_{F_1}(\varepsilon_{F_2}+\varepsilon_{F_3})}[[F_2,F_3],F_1]\\ &+(-)^{\varepsilon_{F_3}(\varepsilon_{F_1}+\varepsilon_{F_2})}[[F_3,F_1],F_2] = 0\end{aligned} \,. \qquad (۳۳)$$

در رابطهٔ (۳۲) منظور از * مزدوج مختلط می‌باشد.

۳.۲. تبدیل پیمانه‌ای فرد

در بخش قبل دیدیم که در یک فضای فاز معمولی وردش پیمانه ای (۲۳) با توابع دلخواه زمانی $\varepsilon^a(t)$ کنش S_E را ناوردا نگه می‌دارد. در ابرفضای فاز می‌توان تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد زوج و یا تابع مولد فرد در نظر گرفت. در اینجا به دلیل آنکه نهایتاً می‌خواهیم تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای را با تابع مولد تبدیل BRST (که چنان‌که خواهیم دید تابعی فرد و حقیقی است) مقایسه کنیم، تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد را در نظر می‌گیریم. برای این منظور تابع مولد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$G_{\bar\varepsilon}\left(z^A,t\right) = \bar\varepsilon^a(t)\phi_a\left(z^A\right) \qquad (۳۴)$$

برای اینکه این تابع، تابعی فرد باشد باید پاریتهٔ ضرایب $\bar\varepsilon^a$ مخالف پاریتهٔ قیود در نظر گرفته شود. به بیان دیگر اگر پاریتهٔ قیود ϕ_a را با ε_a نشان دهیم، باید

$$\varepsilon\left(\bar\varepsilon^a\right) = \varepsilon_a + 1 \qquad (۳۵)$$

همچنین اگر قیود را حقیقی در نظر بگیریم، حقیقی بودن $G_{\bar\varepsilon}$ منجر به حقیقی بودن ضرایب $\bar\varepsilon^a$ می‌شود:

$$\left(\bar\varepsilon^a\right)^* = \bar\varepsilon^a \qquad (۳۶)$$

حال تبدیل هر تابعی از مختصات ابرفضای فاز تحت تبدیل با تابع مولد $G_{\bar\varepsilon}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\delta_{\bar\varepsilon}F &= \left[F,\bar\varepsilon^a\phi_a\right]\\ &= (-)^{(\varepsilon_a+1)\varepsilon_F}\,\bar\varepsilon^a\left[F,\phi_a\right]\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد، کنش تعمیم یافته در صورتی تحت تبدیل با این تابع مولد ناورداست که وردش ضرایب نامعین لاگرانژ نیز به شکل زیر در نظر گرفته شوند:

$$(-)^{\varepsilon_a}\delta_{\bar\varepsilon}\lambda^a = \dot{\bar\varepsilon}^a - \bar\varepsilon^b\lambda^c C_{cb}{}^a - \bar\varepsilon^b V_b^a \,. \qquad (۳۸)$$

۳.۳. فرمولبندی BRST

روش BRST مبتنی بر توسعه فضای فاز به وسیلهٔ متغیرهای جدیدی است که آنها را شبح می‌نامیم. در این فرمولبندی به ازای هر قید دستگاه، یک زوج شبح تعریف و به فضای فاز اضافه خواهد شد، به طوری که پاریتهٔ گراسمانی آنها مخالف قید مربوطه باشد. فضای فازی که شامل این شبح‌ها نیز باشد به فضای فاز تعمیم یافته معروف است. برای زوج شبح $\left(\eta^a,\xi_a\right)$، که در آن ξ_a تکانهٔ همیوغ η^a است، روابط و خواص زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$\varepsilon\left(\eta^a\right) = \varepsilon\left(\xi_a\right) = \varepsilon_a + 1 \,, \qquad (۳۹)$$

$$\begin{aligned}\left[\xi_a,\eta^b\right] &= (-)^{\varepsilon_a}\left[\eta^b,\xi_a\right]\\ &= -\delta_a^b\end{aligned} \,, \qquad (۴۰)$$

$$\left(\eta^a\right)^* = \eta^a \ , \tag{۴۱}$$

$$\left(\xi_a\right)^* = (-)^{(\epsilon_a+1)}\xi_a \ . \tag{۴۲}$$

شاخص دیگری نیز برای کمیتهای ابرفضای فاز تعمیم یافته موسوم به عدد شبح در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathrm{gh}\ \eta^a &= 1 \\ \mathrm{gh}\ \xi_a &= -1 \\ \mathrm{gh}\ z^A &= 0 \end{aligned} \tag{۴۳}$$

حال توسعهٔ فضای فاز به ما این امکان را می‌دهد که تقارن جدیدی موسوم به تقارن BRST در فضای فاز توسعه یافته را فرمولبندی کنیم. این تقارن از تابع مولدی به همین نام سرچشمه می‌گیرد. تابع مولد تبدیل BRST در کلی ترین حالت به شکل بسط زیر بر حسب شبح‌ها تعریف می شود:

$$\Omega = \sum_{n\geq 0} \eta^{b_{(n+1)}}\cdots\eta^{b_1}\overset{(n)}{U}_{b_1\ldots b_{(n+1)}}{}^{a_1\ldots a_n}\,\xi_{a_n}\cdots\xi_{a_1} \tag{۴۴}$$

به گونه‌ای که دارای خواص زیر باشد:

$$[\Omega,\Omega]=0 \qquad \epsilon_\Omega = 1 \qquad \Omega^* = \Omega . \tag{۴۵}$$

چنانکه خواهیم دید خواص فوق به خصوص ویژگی پوچ توانی Ω ، خصوصیات منحصر به فردی برای آن ایجاد می‌کند. اما نکتهٔ جالب اینجاست که سنگ بنای اصلی ساختمان تابع مولد BRST قیود نوع اول دستگاه هستند. برای این منظور می توان نشان داد [۶ و۱۶] که اگر در جمله اول بسط فوق، یعنی ضرایب $\overset{(0)}{U_b}$، قیود ϕ_b در نظر گرفته شوند، برای بر آورده شدن شرایط (۴۵) ضرایب جملات دیگر باید توابعی موسوم به "توابع ساختاری" دستگاه باشند. این توابع به طریق خاصی از کروشه‌های پواسون متوالی قیود با هم ساخته می‌شوند که تفصیل آن در اینجا مدنظر نیست (مرجع [۶] را ببینید). به عنوان مثال توابع ساختاری مرتبهٔ یک در ابر فضای فاز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\overset{(1)}{U}_{ab}{}^c = -\tfrac{1}{2}(-)^{\epsilon_b}\,C_{ab}{}^c \tag{۴۶}$$

که در آن $C_{ab}{}^c$ ضرایب ساختاری (۱۴) هستند. توابع ساختاری مرتبهٔ دوم نیز از کروشه‌پواسون توابع ساختاری مرتبه یک با قیود به دست می‌آیند و به همین ترتیب می توان توابع ساختاری مراتب مختلف را از روی یکدیگر به دست آورد. برای حالت خاصی که کروشه‌پواسون قیود به طور قوی صفر باشد تنها توابع ساختاری مرتبه صفر (خود قیود) وجود دارند. همچنین برای مدلهایی که ضرایب $C_{ab}{}^c$ ثابت هستند (نظیر مدلهای یانگ - میلز) نیز تنها تا توابع ساختاری مرتبهٔ یک $\overset{(1)}{U}_{ab}{}^c$ در تابع مولد BRST ظاهر می‌شوند. خوشبختانه بیشتر نظریه‌های فیزیکی از این مقوله‌اند و تابع مولد BRST برای آنها شکل چندان مفصلی ندارد.

نظیر هر تبدیل دیگری تبدیل BRST توابع فضای فاز به وسیلهٔ تابع مولد Ω به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$sf = [f,\Omega] \tag{۴۷}$$

۳ . ۴ . مشاهده پذیرهای ناوردای BRST

مشاهده پذیرهای ناوردای BRST گسترش یافته مشاهده پذیرهای دیراک در رابطهٔ (۱۶) (برحسب شبح ها) هستند. این گسترش دارای خواص پیشنهادی زیر است:

$$[A,\Omega]=0 \ , \tag{۴۸}$$

$$\epsilon_A = 0 \ , \tag{۴۹}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{gh}\ A &= 0 \\ A^* &= A \ , \end{aligned} \tag{۵۰}$$

$$A|_{\eta,\xi=0} = A_0 \ . \tag{۵۱}$$

که در آن A_0 یک مشاهده پذیر دیراک و A گسترش یافتهٔ آن است.

به عنوان مثالی از مشاهده پذیرهای دیراک، H_C هامیلتونی کانونیک دستگاه را در نظر می‌گیریم که شکل گسترش یافته آن با بسط زیر بر حسب شبح‌ها پیشنهاد می‌شود:

$$H = \sum_{n\geq 0} \eta^{b_n}\cdots\eta^{b_1}\overset{(n)}{H}_{b_1\ldots b_n}{}^{a_1\ldots a_n}\,\xi_{a_n}\cdots\xi_{a_1} \tag{۵۲}$$

که در آن جملهٔ مرتبه صفر شبح‌ها همان هامیلتونی بندادی دستگاه

است:

$$\overset{(0)}{H} = H. \tag{۵۳}$$

و جملات مراتب بالاتر نیز با استفاده از شرط (۴۸) قابل محاسبه‌اند. به‌عنوان مثال می‌توان نشان داد که جملهٔ $n=1$ در بسط (۵۲) به‌صورت زیر است:

$$\overset{(1)}{H}_b{}^a = V_b^a \tag{۵۴}$$

که در آن ضرایب V_b^a ضرایب ساختار قیدی (۱۵) هستند. خواص (۵۰) از شکل ساختن H به طور خودکار برقرار شده‌اند و برای برقراری خاصیت (۴۹) نیز شرط زیر لازم است:

$$\varepsilon\left(\overset{(n)}{H}_{b_1\dots b_n}{}^{a_1\dots a_n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{a_i} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{b_j} \tag{۵۵}$$

همانند بحث هم ارزی مشاهده پذیرهای دیراک می‌توان برای مشاهده پذیرهای BRST نیز هم ارزی تعریف کرد. در اینجا دو مشاهده پذیر را هم ارز می‌گوییم ، اگر تفاوت آنها در یک عبارت ناوردای BRST باشد:

$$\begin{aligned} A' &= A + sK \\ &= A + [K,\Omega] \end{aligned} \tag{۵۶}$$

در رابطهٔ فوق K تابعی اختیاری از فضای فاز تعمیم یافته بوده و آن را بسته به مسئله می‌توان انتخاب کرد. مشاهده پذیر بودن A و A' منجر به شرایط زیر برای تابع K می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_K &= 1 \\ \mathrm{gh}\, K &= -1 \\ K^* &= -K \end{aligned} \tag{۵۷}$$

با توجه به خواص فوق ، کلی‌ترین شکل تابع K را به صورت بسط زیر برحسب شبح‌ها می‌توان پیشنهاد داد:

$$K = \sum_{n\geq 0} \eta^{b_n}\dots\eta^{b_1}\, \overset{(n)}{K}_{b_1\dots b_n}{}^{a_1\dots a_{(n+1)}}\, \xi_{a_{(n+1)}}\dots\xi_{a_1} \tag{۵۸}$$

که در آن ضرایب $\overset{(n)}{K}_{b_1\dots b_n}{}^{a_1\dots a_{(n+1)}}$ توابعی از متغیرهای فضای فاز اولیه هستند.

به عنوان مثال، هم ارز مشاهده پذیر هامیلتونی را که با H_K نشان می‌دهیم می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$H_K = H + [K,\Omega] \tag{۵۹}$$

با توجه به بسط توابع K و Ω بر حسب شبح‌ها به سهولت می‌توان دید که جملهٔ مرتبه صفر شبح‌ها در H_K همان هامیلتونی گسترش یافته H_E است، به شرط آن که برای ضرایب نامعین لا گرانژ، تثبیت پیمانهٔ زیر صورت گرفته باشد:

$$\lambda^a = -\overset{(0)}{K}{}^a \tag{۶۰}$$

معادلات حرکت در فضای فاز تعمیم یافته توسط H_K را می‌توان از فرینه سازی کنش زیر نیز به دست آورد:

$$S_K = \int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^{\alpha}\pi_{\alpha} + \dot{\eta}^a \xi_a - H - [K,\Omega]\right)dt. \tag{۶۱}$$

در رابطهٔ فوق θها مختصه‌های فرد و πها تکانه‌های همیوغ آنها برای فضای فاز اولیه است [۱۶]. چنان‌که از رابطهٔ فوق پیداست در مرتبه صفر شبح‌ها S_K به همان کنش S_E با تثبیت پیمانهٔ (۶۰) تبدیل می‌شود و معادلات حرکت ناشی از آن نیز به همان معادلات حرکت (۲۰) کنش گسترش یافته تقلیل می‌یابند.

۳ . ۵ . گسترش بیشتر فضای فاز، نظریهٔ ناکمین

فرمولبندی که تا اینجا از تقارن BRST ارائه شد، نظریهٔ کمین نام دارد. چنانکه دیدیم، ضرایب نامعین لاگرانژ از ابتدا به صورت متغیرهای دینامیکی اضافه در کنش کل S_T و کنش گسترش یافته S_E ظاهر شده و در ساختار بندادی فضای فاز جای ندارند. در بررسی وردش پیمانه‌ای هم دیدیم که وردش ضرایب نامعین لاگرانژ از یک تابع مولد به دست نمی‌آید و آنرا باید به طور دستی با رابطهٔ (۲۴) چنان تنظیم کرد که کنش S_E ناوردا باقی بماند. کنش S_K نیز به کلی فاقد ضرایب نامعین لاگرانژ است و تنها با تثبیت پیمانهٔ (۶۰) می‌توان از آن به‌کنشی که شامل جملهٔ $\lambda^a\phi_a$ باشد، دست یافت.

خوشبختانه در چارچوب فرمولبندی BRST این امکان وجود دارد که ضرایب نامعین لاگرانژ را همپای متغیرهای اصلی

فضای فاز (z^aها) به صورت متغیر بندادی در نظر بگیریم. این کار باید طوری صورت گیرد که ساختار تقارنی BRST حفظ شود. نظریه‌ای که نهایتاً به این طریق از نظریهٔ اصلی حاصل می‌شود نظریه ناکمین نام دارد. روشهای مختلفی برای دست‌یابی به نظریهٔ ناکمین وجود دارد که ما بنابه نیاز بعدی، فقط یکی از آنها را در نظر می‌گیریم.

اگر تکانه‌های همیوغ با ضرایب λ^a را با b_a نشان دهیم، این تکانه‌ها به صورت قیود نوع اول جدیدی برای دستگاه خواهند بود. زیرا مشتق زمانی این تکانه‌ها در S_E وجود ندارند. بنابراین :

$$b_a \approx 0 \qquad (۶۲)$$

همانطور که برای هر قید ϕ_a جفت شبح η^a و ξ_a را برای تعمیم فضای فاز به کار بردیم، در اینجا نیز با در نظر گرفتن λ^aها همراه با تکانه‌های قیدی b_a به عنوان متغیرهای ناکمین، باید شبح‌های جدیدی برای تعمیم فضای فاز معرفی کنیم. برای این منظور باصطلاح شبح‌های جدید را با ρ^a و $\overline{C}_a$ نشان می‌دهیم که در آن ρ^a تکانهٔ همیوغ $\overline{C}_a$ است. به این متغیرهای جدید که پاریتهٔ آنها مخالف پاریتهٔ ضرایب نامعین لاگرانژ است پادشبح گفته می‌شود. حال تابع مولد BRST در زیر فضای متغیرهای $(\lambda, b, \overline{C}, \rho)$ را به صورت زیر می‌توان تعریف کرد [۱۶]:

$$\Omega^{Nonmin} = (-i)^{\varepsilon_a+1} \rho^a b_a \, . \qquad (۶۳)$$

همانطور که پیداست Ω^{Nonmin} یک جمله بیشتر ندارد، زیرا کروشه‌پواسون تکانه‌های قیدی b_a با یکدیگر به طور قوی صفر است. به این ترتیب تابع مولد BRST کل به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\Omega^T = \Omega + (-i)^{\varepsilon_a+1} \rho^a b_a \qquad (۶۴)$$

خواص اساسی متغیرهای ρ^a و $\overline{C}_a$ را نیز به‌صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم:

$$\varepsilon_{(\overline{C}_a)} = \varepsilon_{(\rho^a)} = \varepsilon_{(a+1)} \, , \qquad (۶۵)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{gh}\ C_a &= -1 \\ \mathrm{gh}\ \rho^a &= 1 \, , \end{aligned} \qquad (۶۶)$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{C}_a\right)^* &= \overline{C}_a \\ \left(\rho^a\right)^* &= -\rho^a \end{aligned} \qquad (۶۷)$$

معادلات حرکت در فضای فاز تعمیم یافته شامل متغیرهای ناکمین را می‌توان با استفاده از هامیلتونی زیر نیز به دست آورد

$$\overline{H}_K = H + \left[K, \Omega^T\right] \qquad (۶۸)$$

همچنین معادلات مذکور را از کمینه کردن کنش زیر نیز می‌توان به‌دست آورد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} \dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha + \dot{\lambda}^c b_c + \dot{\eta}^a \xi_a \\ + \dot{\overline{C}}_d \rho^d - H - \left[K, \Omega^T\right] \end{pmatrix} dt \qquad (۶۹)$$

۴ . ارتباط تبدیل BRST وتبدیل پیمانه‌ای

در بخش سوم (روابط ۳۷ و ۳۸) دیدیم که تحت تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد (۳۴) وردش توابع فضای فاز و ضرایب نامعین لاگرانژ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} F &= \left[F, \bar{\varepsilon}^a \phi_a\right] \\ &= (-)^{(\varepsilon_a+1)\varepsilon_F} \bar{\varepsilon}^a \left[F, \phi_a\right] \end{aligned} \qquad (۷۰)$$

$$(-)^{\varepsilon_a} \delta_{\bar{\varepsilon}} \lambda^a = \dot{\bar{\varepsilon}}^a - \bar{\varepsilon}^b \lambda^c C_{cb}{}^a - \bar{\varepsilon}^b V_b^a \qquad (۷۱)$$

از سوی دیگر تحت اثر تابع مولد Ω^T رابطهٔ (۶۴)، تبدیلهای متناظر با (۷۰) و (۷۱) در فضای فاز تعمیم یافته حالت ناکمین، به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} sF \equiv \delta_\eta^{BRST} F &= (-)^{\varepsilon_F(\varepsilon_b+1)} \eta^b \left[F, \phi_b\right] \\ &+ \sum_{n\geq 1} (-)^{\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i + n + 1\right)\varepsilon_F} \eta^{b_{(n+1)}} \ldots \eta^{b_1} \\ &\times \left[F, \overset{(n)}{U}{}_{b_1 \ldots b_{(n+1)}}{}^{a_1 \ldots a_n}\right] \\ &\times \xi_{a_n} \ldots \xi_{a_1} \, , \end{aligned} \qquad (۷۲)$$

$$s\lambda^a \equiv \delta_\eta^{BRST}\lambda^a = \left[\lambda^a, \Omega^{Nonmin}\right] = \left[\lambda^a, (-i)^{(\varepsilon_c+1)} b_c \rho^c\right] = (-)^{\varepsilon_a}(-i)^{(\varepsilon_a+1)}\rho^a \quad (۷۳)$$

مقایسه روابط (۷۰) و (۷۲) نشان می‌دهد که شبح‌های $\eta^a(t)$ در فرمولبند BRST را می‌توان جایگزین مناسبی برای توابع دلخواه زمانی $\bar{\varepsilon}^a(t)$ در تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد در نظر گرفت. علاوه بر این، تبدیل پیمانه‌ای (۷۰) را می‌توان تقلیل تبدیل (۷۲) در مرتبهٔ صفر شبح‌های ξ و پادشبح‌های $\overline{C}$ و ρ دانست:

$$\delta_\eta^{BRST}F(q,p,\theta,\pi)\Big|_{\xi,\overline{C},\rho=0,\eta=\bar{\varepsilon}} = \delta_{\bar{\varepsilon}}^{Gauge}F(q,p,\theta,\pi) \quad (۷۴)$$

انتظار داریم نظیر چنین رابطه‌ای برای ضرایب نامعین لاگرانژ نیز درست باشد، به طوری که بتوان نوشت

$$\delta_\eta^{BRST}\lambda^a\Big|_{\xi,\overline{C},\rho=0,\eta=\bar{\varepsilon}} = \delta_{\bar{\varepsilon}}^{Gauge}\lambda^a \quad (۷۵)$$

لازمهٔ چنین چیزی آن است که در فرمولبندی BRST رابطهٔ زیر را برای وردش ضرایب نامعین لاگرانژ داشته باشیم:

$$(-)^{\varepsilon_a} s\lambda^a = \dot{\eta}^a - \eta^b\lambda^c C_{cb}{}^a - \eta^b V_b^a - M^a \quad (۷۶)$$

که در آن M^a تابعی از مراتب بالاتر از یک نسبت به η ها و بالاتر از مرتبهٔ صفرنسبت به ξ ها، ρ ها و $\overline{C}$ هاست. حال با استفاده از رابطهٔ (۷۳)، رابطهٔ اخیر را می‌توان به صورت شرط زیر برای مشتقات زمانی شبح‌های η در آورد:

$$\dot{\eta}^a = (-i)^{(\varepsilon_a+1)}\rho^a + \eta^b\lambda^c C_{cb}{}^a + \eta^b V_b^a + M^a \ . \quad (۷۷)$$

لازم به دقت است که بر خلاف نظریهٔ پیمانه‌ای، توابع $\eta^a(t)$ عناصر خارجی نبوده، و خود جزیی از فضای فاز تعمیم یافته‌اند. به بیان دیگر، مشتقات $\eta^a(t)$ به جای آنکه از خارج (در وردش ضرایب نامعین لاگرانژ) وارد مسئله شوند، از دینامیک فضای فاز تعمیم یافته، به کمک هامیلتونی $\overline{H}_K$ (رابطهٔ ۶۸) به دست می‌آیند:

$$\dot{\eta}^a = \left[\eta^a, \overline{H}_K\right] = -\left[H,\eta^a\right] - \left[\left[K,\Omega^T\right],\eta^a\right] \quad (۷۸)$$

اکنون باید تابع تثبیت پیمانه BRST یعنی K را چنان انتخاب کنیم که رابطهٔ (۷۸) به رابطهٔ (۷۷) تحویل شود. نخست توجه کنیم که هامیلتونی تعمیم یافتهٔ H در رابطهٔ فوق با توجه به روابط (۵۲) تا (۵۴) به صورت زیر قابل بیان است:

$$H = H_0 + \eta^a V_a^b \xi_b + H' \quad (۷۹)$$

که در آن H' جملات مراتب بالاتر از یک نسبت به شبح‌ها را در بردارد:

$$H' = \sum_{n\geq 2}\eta^{b_n}\cdots\eta^{b_1}\overset{(n)}{H}_{b_1\ldots b_n}{}^{a_1\ldots a_n}\xi_{a_n}\cdots\xi_{a_1} \quad (۸۰)$$

همچنین تابع مولد BRST کل را نیز با توجه به روابط (۴۴)، (۴۶) و (۶۴) به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Omega^T = (-i)^{(\varepsilon_a+1)}b_a\rho^a + \eta^a\phi_a - \tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_b}\eta^b\eta^c C_{bc}{}^a\xi_a + \Omega' \quad (۸۱)$$

که در آن Ω' شامل جملات مراتب بالاتر شبح‌ها است:

$$\Omega' = \sum_{n\geq 2}\eta^{b_{(n+1)}}\cdots\eta^{b_1}\overset{(n)}{U}_{b_1\ldots b_{(n+1)}}{}^{a_1\ldots a_n}\xi_{a_n}\cdots\xi_{a_1} \ . \quad (۸۲)$$

به همین ترتیب با توجه به ویژگیهای (۵۷) برای تابع تثبیت پیمانهٔ K، و ویژگیهای پادشبح‌ها در روابط (۶۵) تا (۶۷) کلی‌ترین شکل آنرا می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$K = \overset{(0)}{K}{}^{\bar{a}_1}\overline{C}_{\bar{a}_1} + \overset{(0)}{K}{}^{a_1}\xi_{a_1} + K_1 + K' \quad (۸۳)$$

در رابطهٔ فوق منظور از K_1 جملات مربوط به مرتبهٔ صفر پادشبح‌های ρ ومرتبهٔ اول شبح‌های η است:

$$K_1 = \eta^{b_1}\overset{(1)}{K}_{b_1}{}^{a_1a_2}\xi_{a_2}\xi_{a_1} + \eta^{b_1}\overset{(1)}{K}_{b_1}{}^{\bar{f}_1a_1}\xi_{a_1}\overline{C}_{\bar{f}_1} + \eta^{b_1}\overset{(1)}{K}_{b_1}{}^{\bar{f}_1\bar{f}_2}\overline{C}_{\bar{f}_2}\overline{C}_{\bar{f}_1} \quad (۸۴)$$

در این رابطه ضرایب $\overset{(1)}{K}$ توابعی از (z,λ,b) هستند. همچنین در

رابطهٔ (۸۳) K' شامل جملات مراتب بالاتر نسبت به شبح‌ها و پادشبح‌هاست و شکل عمومی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}K' = &\sum_{n\geq 2}\sum_{p=0}^{n+1}\eta^{b_n}\dots\eta^{b_1}\overset{(n)}{K}{}_{b_1\dots b_n}{}^{\bar f_1\dots\bar f_p a_1\dots a_{(n-p+1)}}\\ &\times\xi_{a_{(n-p+1)}}\dots\xi_{a_1}\overline{C}_{\bar f_p}\dots\overline{C}_{\bar f_1}\\ &+\sum_{m\geq 1}\sum_{p=0}^{m+1}\rho^{\bar a_m}\dots\rho^{\bar a_1}\overset{(m)}{K}{}_{\bar a_1\dots\bar a_m}{}^{\bar f_1\dots\bar f_p a_1\dots a_{(m-p+1)}}\\ &\times\xi_{a_{(m-p+1)}}\dots\xi_{a_1}\overline{C}_{\bar f_p}\dots\overline{C}_{\bar f_1}\\ &+\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\sum_{p=0}^{m+n+1}\eta^{b_n}\dots\eta^{b_1}\rho^{\bar a_m}\dots\rho^{\bar a_1}\\ &\times\overset{(m+n)}{K}{}_{\bar a_1\dots\bar a_m b_1\dots b_n}{}^{\bar f_1\dots\bar f_p a_1\dots a_{(m+n-p+1)}}\\ &\times\xi_{a_{(m+n-p+1)}}\dots\xi_{a_1}\overline{C}_{\bar f_p}\dots\overline{C}_{\bar f_1}\end{aligned} \qquad (۸۵)$$

که در آن ضرایب $\overset{(n)}{K}$ ، $\overset{(m)}{K}$ و $\overset{(m+n)}{K}$ نیز توابعی از (z,λ,b) هستند *(در روابط (۸۳) تا (۸۵) به منظور جلوگیری ازهر گونه اشتباهی در مورد ضرایب شبح‌ها و پادشبح‌ها، از شاخص‌های a، ۰۰ برای شبح‌ها و $\bar{a}$، ۰۰ برای پاد شبح‌ها استفاده شده است)*. حال می‌توانیم کروشه‌پواسون $[K,\Omega^T]$ را به منظور استفاده در رابطه (۷۸) با استفاده از شکل کلی توابع K و Ω^T (روابط ۸۱ و۸۳) به صورت زیر به دست آوریم:

$$\begin{aligned}\left[K,\Omega^T\right] = &(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}\rho^{\bar a_1}\left[b_{\bar a_1},\overset{(0)}{K}{}^{\bar a_2}\right]\overline{C}_{\bar a_2}-(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}b_{\bar a_1}\overset{(0)}{K}{}^{\bar a_1}\\ &+(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}\rho^{\bar a_1}\left[b_{\bar a_1},\overset{(0)}{K}{}^{a_1}\right]\xi_{a_1}+\xi_{a_1}\left[\overset{(0)}{K}{}^{a_1},\Omega'\right]\\ &+\eta^{b_1}\left[\phi_{b_1},\overset{(0)}{K}{}^{\bar a_1}\right]\overline{C}_{\bar a_1}+\eta^{b_1}\left[\phi_{b_1},\overset{(0)}{K}{}^{a_1}\right]\xi_{a_1}\\ &-\eta^{b_2}\overset{(0)}{K}{}^{b_1}C_{b_1 b_2}{}^{a_1}\xi_{a_1}-\overset{(0)}{K}{}^{a_1}\phi_{a_1}\\ &+\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_2}+\varepsilon_{\bar a_1}(\varepsilon_{b_1}+\varepsilon_{b_2}+1)}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\\ &\times\left[\overset{(0)}{K}{}^{\bar a_1},C_{b_1 b_2}{}^{a_1}\right]\xi_{a_1}\overline{C}_{\bar a_1}\\ &+\overline{C}_{\bar a_1}\left[\overset{(0)}{K}{}^{\bar a_1},\Omega'\right]+\overset{(0)}{K}{}^{a_1}\left[\xi_{a_1},\Omega'\right]\\ &+\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_2}+\varepsilon_{a_1}(\varepsilon_{b_1}+\varepsilon_{b_2}+1)}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\\ &\times\left[\overset{(0)}{K}{}^{a_1},C_{b_1 b_2}{}^{a_2}\right]\xi_{a_2}\xi_{a_1}\\ &+\left[K',\eta^{b_1}\right]\phi_{b_1}+\left[K',\phi_{b_1}\right]\eta^{b_1}+\left[K',\Omega'\right]\\ &-(-)^{\varepsilon_{b_2}}\left[K',\eta^{b_2}\right]\eta^{b_1}C_{b_1 b_2}{}^{a_1}\xi_{a_1}\\ &+\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_1}+1}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\left[K',C_{b_1 b_2}{}^{a_1}\right]\xi_{a_1}\\ &+\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_2}+1}\eta^{b_2}\eta^{b_1}C_{b_1 b_2}{}^{a_1}\left[\xi_{a_1},K'\right]\\ &+(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}b_{\bar a_1}\left[\rho^{\bar a_1},K'\right]\\ &+(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}\rho^{\bar a_1}\left[b_{\bar a_1},K'\right]\\ &+\left[K_1,\Omega^T\right]\end{aligned} \qquad (۸۶)$$

که در آن برای $\left[K_1,\Omega^T\right]$ داریم:

$$\begin{aligned}\left[K_1,\Omega^T\right] = &(-)^{\varepsilon_{b_1}+1}(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}\eta^{b_1}\rho^{\bar a_1}\left[b_{\bar a_1},\overset{(1)}{K}{}_{b_1}{}^{a_1 a_2}\right]\xi_{a_2}\xi_{a_1}\\ &+(-)^{\varepsilon_{b_1}+1}(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}\eta^{b_1}\rho^{\bar a_1}\left[b_{\bar a_1},\overset{(1)}{K}{}_{b_1}{}^{\bar f_1 a_1}\right]\xi_{a_1}\overline{C}_{\bar f_1}\\ &+(-)^{\varepsilon_{b_1}+1}(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}\eta^{b_1}\rho^{\bar a_1}\left[b_{\bar a_1},\overset{(1)}{K}{}_{b_1}{}^{\bar f_1\bar f_2}\right]\overline{C}_{\bar f_2}\overline{C}_{\bar f_1}\\ &+(-)^{\varepsilon_{\bar a_1}\varepsilon_{a_1}+1}(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}\eta^{b_1}\overset{(1)}{K}{}_{b_1}{}^{\bar a_1 a_1}b_{\bar a_1}\xi_{a_1}\\ &+(-)^{\varepsilon_{b_2}+1}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\left[\phi_{b_1},\overset{(1)}{K}{}_{b_2}{}^{a_1 a_2}\right]\xi_{a_2}\xi_{a_1}\\ &+2(-)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+\varepsilon_{\bar f_1})}(-i)^{(\varepsilon_{\bar a_1}+1)}\eta^{b_1}\overset{(1)}{K}{}_{b_1}{}^{\bar f_1 a_1}b_{\bar a_1}\overline{C}_{\bar f_1}\\ &+(-)^{\varepsilon_{b_2}+1}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\left[\phi_{b_1},\overset{(1)}{K}{}_{b_2}{}^{\bar f_1 a_1}\right]\xi_{a_1}\overline{C}_{\bar f_1}\\ &+2(-)^{\varepsilon_{a_2}}\eta^{b_1}\overset{(1)}{K}{}_{b_1}{}^{a_2 a_1}\phi_{a_1}\xi_{a_2}\\ &+(-)^{\varepsilon_{b_2}+1}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\left[\phi_{b_1},\overset{(1)}{K}{}_{b_2}{}^{\bar f_1\bar f_2}\right]\overline{C}_{\bar f_1}\overline{C}_{\bar f_2}\\ &+(-)^{\varepsilon_{\bar f_1}}\eta^{b_1}\overset{(1)}{K}{}_{b_1}{}^{\bar f_1 a_1}\phi_{a_1}\overline{C}_{\bar f_1}\\ &+\left[K_1,-\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_2}}\eta^{b_2}\eta^{b_1}C_{b_1 b_2}{}^{a_1}\xi_{a_1}+\Omega'\right]\end{aligned} \qquad (۸۷)$$

حال ملاحظه می‌کنیم که انتخاب زیر:

$$\overset{(0)}{K}{}^{a} = -\lambda^{a} \qquad (۸۸)$$

باعث می‌شود که جملهٔ مرتبهٔ صفر $\overline{H}_K$ در رابطهٔ (۶۸) نسبت به شبح‌ها، هامیلتونی گسترش یافته H_E و جملهٔ مرتبهٔ صفر $\overline{S}_K$ در رابطهٔ (۶۹) نسبت به شبح‌ها نیز گسترش‌یافته کنش S_E باشد. *اکنون ملاحظه می‌شود که با انتخاب (۸۸) و با اختیاری گرفتن $\overset{(0)}{K}{}^{\overline{a}_1}$ و K' وبا صفر قرار دادن K_1 می‌توان به نتیجه مورد انتظار برای $\dot{\eta}^a$ در رابطه (۷۷) رسید. زیرا این انتخابها و محاسبه مستقیم سمت راست رابطهٔ (۷۸) با توجه به رابطهٔ (۸۶) و شکل هامیلتونی (۷۹) به نتیجهٔ زیر منجر می‌شود:*

$$\dot{\eta}^a = (-i)^{(\varepsilon_a+1)}\rho^a + \eta^b\lambda^c C_{cb}{}^a + \eta^b V_b^a + M^a \qquad (۸۹)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
M^a = &-\overline{C}_{\overline{a}_1}\left[\left[\overset{(0)}{K}{}^{\overline{a}_1},\Omega'\right],\eta^a\right]+\lambda^{a_1}\left[\left[\xi_{a_1},\Omega'\right],\eta^a\right]\\
&-\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_2}+\varepsilon_a+\varepsilon_{\overline{a}_1}(\varepsilon_{b_1}+\varepsilon_{b_2}+\varepsilon_a)}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\\
&\quad\times\left[\overset{(0)}{K}{}^{\overline{a}_1},C_{b_1b_2}{}^a\right]\overline{C}_{\overline{a}_1}\\
&+\left[\eta^a,H'\right]+\left[\eta^a,\left[K',\Omega'\right]\right]\\
&+\left[\eta^a,\left[K',\eta^{b_1}\right]\right]\phi_{b_1}+\left[\eta^a,\left[K',\phi_{b_1}\right]\right]\eta^{b_1}\\
&-(-)^{\varepsilon_{b_2}}\left[K',\eta^{b_2}\right]\eta^{b_1}C_{b_1b_2}{}^a\\
&+\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_1}+1}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\left[K',C_{b_1b_2}{}^a\right]\\
&-(-)^{\varepsilon_{b_2}}\left[\eta^a,\left[K',\eta^{b_2}\right]\right]\eta^{b_1}C_{b_1b_2}{}^{a_1}\xi_{a_1}\\
&+\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_2}}\eta^{b_2}\eta^{b_1}C_{b_1b_2}{}^{a_1}\left[\left[\xi_{a_1},K'\right],\eta^a\right]\\
&+\tfrac{1}{2}(-)^{\varepsilon_{b_1}+(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_{a_1}+1)}\eta^{b_2}\eta^{b_1}\\
&\quad\times\left[\left[K',C_{b_1b_2}{}^{a_1}\right],\eta^a\right]\xi_{a_1}\\
&-(-i)^{(\varepsilon_{\overline{a}_1}+1)}b_{\overline{a}_1}\left[\left[\rho^{\overline{a}_1},K'\right],\eta^a\right]\\
&-(-i)^{(\varepsilon_{\overline{a}_1}+1)}\rho^{\overline{a}_1}\left[\left[b_{\overline{a}_1},K'\right],\eta^a\right]
\end{aligned} \qquad (۹۰)$$

چنان‌که پیداست انتخاب (۸۸)، اختیاری گرفتن $\overset{(0)}{K}{}^{\overline{a}_1}$ و K' و صفر قرار دادن K_1 باعث می‌شود که M^a نسبت به شبح‌ها وپادشبح‌ها $(\eta,\xi,\rho,\overline{C})$ بزرگتر از مرتبهٔ صفر باشد. یعنی این انتخاب ما را به‌نتیجهٔ مورد انتظار برای $\dot{\eta}^a$ در رابطه (۷۷) می‌رساند. به‌عبارت دیگر در فرمولبندی BRST با این تثبیت نسبی پیمانه برای تابع K، تبدیل BRST مختصات فضای‌فاز و ضرایب نامعین لاگرانژ دقیقاً باتبدیل پیمانه‌ای آنها توسط یک تابع مولد فرد تطبیق دارند.

۵. مثالها

مثال اول - الکترودینامیک

چگالی لاگرانژی برای میدان الکترودینامیک به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (۹۱)$$

که در آن:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \qquad (۹۲)$$

مشتق زمانی A_0 در چگالی لاگرانژی ظاهر نمی‌شود و تکانهٔ همیوغ آن قید است:

$$\phi_1 \equiv \pi^0 = 0 \qquad (۹۳)$$

از طرف دیگر تکانهٔ همیوغ با میدانهای A_i به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i} = F^{i0} \qquad (۹۴)$$

با تعریف تکانه‌ها در رابطهٔ (۹۴) داریم:

$$\begin{aligned}\partial^0 A^i &= F^{0i} + \partial^i A^0\\ &= -\pi^i + \partial^i A^0\end{aligned} \qquad (۹۵)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که می‌توان چگالی لاگرانژی را به‌شکل

زیر هم نوشت:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F^{ij}F_{ij} - \tfrac{1}{2}\pi^i\pi_i \qquad (۹۶)$$

در این‌صورت برای چگالی هامیلتونی بندادی، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\overset{(0)}{\mathcal{H}}_C &= \pi_i\partial^0 A^i - \mathcal{L}\\ &= -\tfrac{1}{2}\pi^i\pi_i + \tfrac{1}{4}F^{ij}F_{ij} + \pi_i\partial^i A^0\end{aligned} \qquad (۹۷)$$

برای قید ثانویه داریم:

$$\begin{aligned}\phi_2(\vec{x}) &= \int d^3x' \left[\phi_1(\vec{x}), \overset{(0)}{\mathcal{H}}_C(\vec{x}')\right]\\ &= \partial_i\pi^i\end{aligned} \qquad (۹۸)$$

از آنجایی که سازگاری با زمان قید ثانویه منجر به قید جدیدی نمی‌شود، دستگاه دارای دو قید ϕ_1 و ϕ_2 است. این قیود آبلی هستند. هامیلتونی بندادی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\overset{(0)}{H}_C &= \int \overset{(0)}{\mathcal{H}}_C\, d^3x\\ &= \int d^3x\left(-\tfrac{1}{2}\pi^i\pi_i + \tfrac{1}{4}F^{ij}F_{ij} - A^0\partial^i\pi_i\right)\end{aligned} \qquad (۹۹)$$

هامیلتونی گسترش‌یافته را نیز می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\overset{(0)}{H}_E = \overset{(0)}{H}_C + \int d^3x\left(\lambda^1\pi^0 + \lambda^2\partial_i\pi^i\right) \qquad (۱۰۰)$$

معادلات حرکت هامیلتونی گسترش‌یافته را می‌توان از کمینه کردن کنش گسترش‌یافته زیر به‌دست آورد:

$$\overset{(0)}{S}_E = \int d^3x\left(\pi^i\dot{A}_i + \pi^0\dot{A}_0 - \lambda^1\pi^0 - \lambda^2\partial_i\pi^i - \overset{(0)}{\mathcal{H}}_C\right) \qquad (۱۰۱)$$

چگالی تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای فرد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_{\bar{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}^1\pi^0 + \bar{\varepsilon}^2\partial_i\pi^i \qquad (۱۰۲)$$

وردش میدانها وتکانه‌های همیوغ آنها به قرار زیر است:

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{\varepsilon}}A_0(\vec{x}) &= \bar{\varepsilon}^1\\ \delta_{\bar{\varepsilon}}A_i(\vec{x}) &= -\partial_i\bar{\varepsilon}^2\end{aligned} \qquad (۱۰۳)$$

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{\varepsilon}}\pi^0(\vec{x}) &= 0\\ \delta_{\bar{\varepsilon}}\pi^i(\vec{x}) &= 0\end{aligned} \qquad (۱۰۴)$$

اگر وردش ضرایب نامعین لاگرانژ به‌صورت زیر تعریف شود، کنش گسترش‌یافته تحت تبدیل با تابع مولد $G_{\bar{\varepsilon}}$ ناوردا باقی می‌ماند:

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{\varepsilon}}\lambda^1 &= \dot{\bar{\varepsilon}}^1\\ \delta_{\bar{\varepsilon}}\lambda^2 &= \dot{\bar{\varepsilon}}^2 + \bar{\varepsilon}^1\end{aligned} \qquad (۱۰۵)$$

چگالی تابع مولد کل BRST در این حالت به‌شکل زیر است:

$$\Omega^T = \Omega^{Min} + \Omega^{Nonmin} \qquad (۱۰۶)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\Omega^{Min} &= \eta^1\pi^0 + \eta^2\partial_i\pi^i\\ \Omega^{Nonmin} &= -i\rho^{\bar{a}}b_{\bar{a}} \qquad \bar{a} = 1,2\ .\end{aligned} \qquad (۱۰۷)$$

تبدیل میدانها، تحت تبدیل با تابع مولد BRST به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}sA_0(\vec{x}) &\equiv \delta_\eta^{BRST} = \eta^1\\ sA_i(\vec{x}) &\equiv \delta_\eta^{BRST} = -\partial_i\eta^2,\end{aligned} \qquad (۱۰۸)$$

$$\begin{aligned}s\,\pi^0(\vec{x}) &\equiv \delta_\eta^{BRST} = 0\\ s\,\pi^i(\vec{x}) &\equiv \delta_\eta^{BRST} = 0\end{aligned} \qquad (۱۰۹)$$

روابط (۱۰۸) و (۱۰۹) و مقایسهٔ آنها با روابط (۱۰۳) و (۱۰۴) نشان می‌دهند که تبدیل میدانها و تکانه‌های همیوغ آنها تحت تبدیل با تابع مولد BRST دقیقاً شبیه به تبدیل آنها، تحت تبدیل با تابع مولد پیمانه‌ای وفرد است‌که در آن شبح‌های η جایگزین ضرایب $\bar{\varepsilon}$ شده است.

برای تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ داریم:

$$\begin{aligned} s\lambda^{1}(\vec{x}) &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} = -i\rho^{1} \\ s\lambda^{2}(\vec{x}) &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} = -i\rho^{2} \end{aligned} \qquad (۱۱۰)$$

با توجه به روابط (۱۰۵)، (۱۱۰) و (۷۶) تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ باید به‌صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} s\lambda^{1} &= -i\rho^{1} = \dot{\eta}^{1} - M^{1} \\ s\lambda^{2} &= -i\rho^{2} = \dot{\eta}^{2} + \eta^{1} - M^{2} \end{aligned} \qquad (۱۱۱)$$

که در آن M^{1} و M^{2} توابعی از مراتب بالاتر از یک نسبت به η ها و بالاتر از مرتبهٔ صفرنسبت به ξ ها، ρ ها و $\overline{C}$ هاست. شکل تعمیم‌یافتهٔ $\overset{(0)}{\mathscr{H}}_{C}$ به‌صورت زیر است:

$$\mathscr{H}_{C} = \overset{(0)}{\mathscr{H}}_{C} + \xi_{2}\eta^{1} \qquad (۱۱۲)$$

تابع تثبیت پیمانه‌ای K را به‌شکل زیر می‌توان پیشنهاد داد:

$$K = i\overline{C}_{\overline{a}}\chi^{\overline{a}} - \lambda^{a}\xi_{a} \qquad a,\overline{a} = 1,2 \qquad (۱۱۳)$$

که در آن χ^{1} و χ^{2} دو تابع زوج و حقیقی از متغیرهای فضای‌فاز اولیه و کاملاً اختیاری هستند. با این انتخاب برای تابع تثبیت پیمانه‌ای، می‌توان به رابطهٔ زیررسید:

$$\begin{aligned} s\lambda^{1} &= -i\rho^{1} = \dot{\eta}^{1} \\ s\lambda^{2} &= -i\rho^{2} = \dot{\eta}^{2} + \eta^{1} \end{aligned} \qquad (۱۱۴)$$

زیرا:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^{1}(\vec{x}) &= \int d^{2}x' \left[\eta^{1}(\vec{x}), \mathscr{H}_{C}(\vec{x}') + \left[K(\vec{x}'), \Omega^{T}(\vec{x}')\right]\right] \\ &= -i\rho^{1}\ , \end{aligned} \qquad (۱۱۵)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^{2}(\vec{x}) &= \int d^{2}x' \left[\eta^{2}(\vec{x}), \mathscr{H}_{C}(\vec{x}') + \left[K(\vec{x}'), \Omega^{T}(\vec{x}')\right]\right] \\ &= -i\rho^{2} - \eta^{1} \end{aligned} \qquad (۱۱۶)$$

ملاحظه می‌شود که با تثبیت پیمانهٔ (۱۱۳) توابع M^{1} و M^{2} متحد با صفر شده وتبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ به‌وسیلهٔ تابع مولد BRST دقیقاً مشابه با تبدیل پیمانه‌ای آنها خواهد شد. تثبیت پیمانهٔ (۱۱۳) در نظریهٔ میدان الکترودینامیک کاربرد فراوانی دارد.

مثال دوم- دستگاهی با درجات آزادی محدود

لاگرانژی زیر را برای دستگاهی با سه درجهٔ آزادی q^{1}، q^{2} و q^{3} در نظر می‌گیریم:

$$L = \dot{q}^{1}\dot{q}^{3} + q^{3}\dot{q}^{1} + q^{2}q^{3} + q^{1}q^{3} \qquad (۱۱۷)$$

ازتعریف تکانه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} p_{1} &= \dot{q}^{3} + q^{3} \\ p_{2} &= 0 \\ p_{3} &= \dot{q}^{1} \end{aligned} \qquad (۱۱۸)$$

چنان‌که دیده می‌شود، $\phi_{1} = p_{2}$ قید اولیه است. هامیلتونی بندادی با توجه به تعریف تکانه‌ها چنین است:

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{H}_{C} &= \dot{q}^{1}p_{1} + \dot{q}^{2}p_{2} + \dot{q}^{3}p_{3} - L \\ &= p_{1}p_{3} - q^{3}p_{3} - q^{2}q^{3} - q^{1}q^{3} \end{aligned} \qquad (۱۱۹)$$

برای هامیلتونی کل نیز داریم:

$$\overset{(0)}{H}_{T} = \overset{(0)}{H}_{C} + \lambda^{1}p_{2} \qquad (۱۲۰)$$

سازگاری قید اولیه، تحت تحول زمانی به نتیجهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\phi_{2} = \left[p_{2}, \overset{(0)}{H}_{C}\right] = q^{3} \qquad (۱۲۱)$$

برای تحول زمانی قید مرتبهٔ دوم نیز داریم:

$$\phi_{3} = \left[q^{3}, \overset{(0)}{H}_{C}\right] = p_{1} - q^{3} \qquad (۱۲۲)$$

تحول زمانی قید مرتبهٔ سوم منجر به هیچ قید جدیدی نمی‌شود:

$$\phi_{4} = \left[\phi_{3}, \overset{(0)}{H}_{C}\right] = \phi_{2} - \phi_{3} \qquad (۱۲۳)$$

به‌این ترتیب دستگاه دارای سه قید است. در این دستگاه با توجه به‌تعریف:

$$\left[\overset{(0)}{H}_C,\phi_a\right]=V_a^b\phi_b \qquad a,b=1,2,3 \tag{۱۲۴}$$

واستفاده از روابط (۱۲۱) تا (۱۲۳) داریم:

$$V_1^2=V_2^3=V_3^2=-V_2^3=-1 \tag{۱۲۵}$$

و بقیهٔ ضرایب V_a^b صفر هستند. می‌توان نشان داد که:

$$[\phi_a,\phi_b]=0 \qquad a,b=1,2,3 \tag{۱۲۶}$$

یعنی قیود دستگاه آبلی هستند. هامیلتونی گسترش‌یافته برای این دستگاه به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\overset{(0)}{H}_E=\overset{(0)}{H}_C+\lambda^1p_2+\lambda^2q^3+\lambda^3\left(p_1-q^3\right) \tag{۱۲۷}$$

معادلات حرکت مربوط به هامیلتونی گسترش‌یافته را می‌توان از کمینه کردن کنش گسترش‌یافتهٔ زیر نیز به‌دست‌آورد:

$$\overset{(0)}{S}_E=\int_{t_1}^{t_2}\begin{pmatrix}\dot q^ip_i-\overset{(0)}{H}_C-\lambda^1p_2\\-\lambda^2q^3-\lambda^3\left(p_1-q^3\right)\end{pmatrix}dt \qquad i=1,2,3\,. \tag{۱۲۸}$$

تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای فرد را در این دستگاه، می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}G_{\bar\varepsilon}&=\bar\varepsilon^a\phi_a\\&=\bar\varepsilon^1p_2+\bar\varepsilon^2q^3+\bar\varepsilon^3\left(p_1-q^3\right)\end{aligned} \tag{۱۲۹}$$

که تبدیل مختصات فضای‌فاز را به‌صورت زیر به‌دست می‌دهد:

$$\begin{aligned}\delta_{\bar\varepsilon}q^1&=\left[q^1,G_{\bar\varepsilon}\right]=\bar\varepsilon^3\\\delta_{\bar\varepsilon}q^2&=\left[q^2,G_{\bar\varepsilon}\right]=\bar\varepsilon^1\\\delta_{\bar\varepsilon}q^3&=\left[q^3,G_{\bar\varepsilon}\right]=0\;,\end{aligned} \tag{۱۳۰}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\bar\varepsilon}p_1&=\left[p_1,G_{\bar\varepsilon}\right]=0\\\delta_{\bar\varepsilon}p_2&=\left[p_2,G_{\bar\varepsilon}\right]=0\\\delta_{\bar\varepsilon}p_3&=\left[p_3,G_{\bar\varepsilon}\right]=\bar\varepsilon^3-\bar\varepsilon^2\end{aligned} \tag{۱۳۱}$$

کنش گسترش‌یافته تحت تبدیل با تابع مولد $G_{\bar\varepsilon}$ ناوردا باقی می‌ماند، به شرط آنکه وردش ضرایب نامعین لاگرانژ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{aligned}\delta_{\bar\varepsilon}\lambda^1&=\dot{\bar\varepsilon}^1\\\delta_{\bar\varepsilon}\lambda^2&=\dot{\bar\varepsilon}^2+\bar\varepsilon^1+\bar\varepsilon^3\\\delta_{\bar\varepsilon}\lambda^3&=\dot{\bar\varepsilon}^3+\bar\varepsilon^2-\bar\varepsilon^3\end{aligned} \tag{۱۳۲}$$

تابع مولد BRST برای این دستگاه به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\Omega^T=\Omega^{Min}+\Omega^{Nonmin} \tag{۱۳۳}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\Omega^{Min}&=\eta^1p_2+\eta^2q^3+\eta^3\left(p_1-q^3\right)\\\Omega^{Nonmin}&=-i\rho^{\bar a}b_{\bar a} \qquad \bar a=1,2,3\end{aligned} \tag{۱۳۴}$$

شکل هامیلتونی تعمیم‌یافته به‌صورت زیر است:

$$H=\overset{(0)}{H}_C-\eta^1\xi_2-\eta^2\xi_3-\eta^3\xi_2+\eta^3\xi_3 \tag{۱۳۵}$$

با توجه به روابط (۱۳۲)، (۱۳۴) و (۷۶) تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ باید به‌صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}s\lambda^1&=-i\rho^1=\dot\eta^1+M^1\\s\lambda^2&=-i\rho^2=\dot\eta^2+\eta^1+\eta^3+M^2\\s\lambda^3&=-i\rho^3=\dot\eta^3+\eta^2-\eta^3+M^3\end{aligned} \tag{۱۳۶}$$

که در آن M^1 ، M^2 و M^3 توابعی از مراتب بالاتر از یک نسبت به ηها و بالاتر از مرتبهٔ صفرنسبت به ξها، ρها و $\overline{C}$ هاست. اگر تابع تثبیت پیمانه‌ای را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$K=i\overline{C}_{\bar a}\chi^{\bar a}-\lambda^a\xi_a \qquad a,\bar a=1,2,3 \tag{۱۳۷}$$

معادلات حرکت ηها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^1 &= \left[\eta^1, H + \left[K, \Omega^T\right]\right] \\ &= -i\rho^1 ,\end{aligned} \tag{۱۳۸}$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^2 &= \left[\eta^2, H + \left[K, \Omega^T\right]\right] \\ &= -\eta^2 - \eta^1 - i\rho^2 ,\end{aligned} \tag{۱۳۹}$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^3 &= \left[\eta^3, H + \left[K, \Omega^T\right]\right] \\ &= -\eta^3 + \eta^2 - i\rho^3\end{aligned} \tag{۱۴۰}$$

ملاحظه می‌شود که با تثبیت پیمانهٔ (۱۳۷) توابع M^1، M^2 و M^3 متحد با صفر شده وتبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ به‌وسیلهٔ تابع مولد BRST دقیقاً مشابه با تبدیل پیمانه‌ای آنها خواهد شد.

قدردانی

نویسندگان مقاله از آقای دکتر بهروز میرزا به خاطر پیشنهادهای مفید ایشان تشکر می‌کنند.

مراجع

1. P A M Dirac, "Lecture on Quantum Mechanics", Yeshiva University, New York, 1964.
2. L D Faddeev and V N Popov, *Phys. Lett,* **25B**, (1967) 30.
۳. علیرضا فرجی، "ارتباط تابع مولد تبدیل BRST و تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای،" پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۷.
4. C Becchi, A Rouet and R Stora, *Ann. Phys.* (N.Y) **98** (1976) 287.
5. D Nemescchansky, C Preitschopf and M Weinstein, *Ann. Phys.,* **183** (1988) 226.
6. M Henneaux, *Phys. Rep.*, **126** (1985) 1.
7. E C G Sudarshan and N Mukunda," Classical Dynamics: A Modern Perspective", Wiley, New York, (1972).
8. K Sundermeyer," Classical Dynamics", Lecture Note In Physics, **169**, Springer, Berlin, (1982).
9. A Shirzad, *J Phys. A: Math. Gen.,* **31** (1998) 2747.
10. J Gomis, M Henneaux and J M Pons, *Class. Quan. Gravity,* **7** (1990) 1089.
11. X Gracia and J M Pons, *Ann. Phys.*, (N.Y.) **187** (1988) 355.
12. A Shirzad and M Shabani Moghadam, Dep. of Phys., Isfahan University of Technology Report, IUT-PH-25 (1998).
13. A Shirzad and N Sadeghnezhad, J. *Phys. A: Math. Gen,* **31** (1988) 7403.
14. A Shirzad and N Sadeghnezhad, Dep. of Phys., Isfahan University of Technology Report, IUT-PH-26 (1998).
15. A Cabo, M Chaichian and D Louis Martinez, *J. Math. Phys.,* **34** (1993) 5646.
16. M Henneaux and C Teitelboim, "Quantization of Gauge Systems", Prinseton University, New Jertsy, (1992).