Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 21:53 IRDT on Sunday July 21st 2019

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران
مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۶، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۵
یادداشت پژوهشی

پاسخ ترازهای لاندائو به تغییر شار در ناخالصیهای ناهمسانگرد

سعیده رمضانی‌ثانی، عبدالله مرتضی‌علی و محمدرضا سرکرده‌ای

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا، تهران

(دریافت مقاله: ۸۳/۱۰/۲ ؛ دریافت نسخه‌نهایی: ۸۴/۱۱/۲۸)

چکیده

در این مقاله پاسخ زیرترازهای لاندائو نسبت به تغییر شار در ناخالصیهای ناهمسانگرد بررسی شده است. در حضور این ناخالصیها، ترازهای لاندائو که به صورت تابع دلتا بوده‌اند، به دو دسته ترازهای گسترده و جایگزیده تبدیل شده و پله هال ایجاد می‌شود. مشاهده می‌شود اگر توزیع ناخالصی در جهت جریان، نسبت به جهت دیگر بیشتر باشد، در آن صورت ترازهای جایگزیده، نسبت به حالت توزیع همسانگرد، از مبدأ دورتر می‌شوند و پله هال به طور واضحتر دیده می‌شود. برای سیستمهایی با میزان ناخالصی زیاد برای مشاهده اثر هال، توزیع ناخالصی باید در جهت جریان و به صورت ناهمسانگرد باشد.

واژه‌های کلیدی: ترازهای لاندائو، توزیع ناهمسانگرد، پله هال، ترازهای گسترده و جایگزیده

۱. مقدمه

برای یک الکترون آزاد که در صفحه‌xy حرکت می‌کند، در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی عمود بر صفحه، هامیلتونی به شکل زیر را داریم:

$$H=\frac{1}{2m}\left[\vec{P}+\frac{e\vec{A}}{c}\right]^{2} ,$$

برای چنین هامیلتونی، با استفاده از پیمانه لاندائو معادله شرودینگر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\hbar^{2}}{2m}\left[\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{eBx}{\hbar c}\right)^{2}-\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right]\psi=E\psi ,$$

این معادله جوابهای زیر را برای ϕ دربرخواهد داشت:

$$\phi_n(x)=\exp\left[-(x-X)^{2}/2l^{2}\right] H_n((x-X)/l) ,$$

که در آن H_n چند جمله‌ای هرمیت و $X=K_x l^{2}$ است. این معادله، همان معادله نوسانگر هارمونیک است با این تفاوت که مرکز آن به اندازه X جابه‌جا شده است. بنابراین سطوح انرژی آن، به نام ترازهای لاندائو، شکل زیر را دارد:

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c ,$$

در حالت ایده‌آل ترازهای لاندائو به صورت تابع δ می‌باشند و نسبت به x,y متقارن و دارای تبهگنی هستند. با اعمال ناخالصی، این تبهگنیها شکسته و ترازها پهن می‌شوند. با افزودن میدان الکتریکی در راستای x، در چارچوبی که با سرعت سوق حرکت می‌کند، میدان الکتریکی در راستای y احساس نخواهد شد، در این حالت هامیلتونی لازم برای معادله شرودینگر به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$H=H_0+eEx .$$

اگر از یکای مغناطیسی استفاده شود، که در آن واحد زمان ω^{-1}،واحد طول l،واحد جرم m و واحد کنش $\hbar$ است و همچنین با توجه به تعریف سرعت سوق $u=\frac{cE_x}{B}$ و $\omega_c=\frac{eB}{mc}$ هامیلتونی بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$H=H_0+ux ,$$

Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 21:53 IRDT on Sunday July 21st 2019

هامیلتونی جدید دارای ویژه مقادیری به شکل زیر هستند:

$$E_n = n + \frac{1}{2} + uX \ .$$

پرانچ[1] [۱] با افزودن یک ناخالصی بـه صـورت تـابع دلتـا، ایـن سیستم را مورد بررسی قرار داد . اگر پتانـسیل اعمـال شـده بـه صورت زیر باشد:

$$V_I = \lambda\delta(x - x_\cdot)\delta(y - y_\cdot) \ ,$$

در نتیجـه هـامیلتونی جدیـد بـه شـکل $H' = H + V_I$ نوشـته می‌شود. می‌توان تابع دلتا را بر حسب ویژه توابع یک عملگر بـه صورت زیر بسط داد:

$$\delta(x - x_\cdot)\delta(y - y_\cdot) = \sum_{n,k} \psi_{nk}(x, y)\psi^*_{nk}(x_\cdot, y_\cdot) \ ,$$

$$H' - H = V_I = \lambda \sum_{n,k} \psi_{nk}(x_\cdot, y_\cdot) \ .$$

با فرض این که ψ_α ویژه توابع تابع H باشد و با توجه به این که $H'\psi_\alpha = E_\alpha \psi_\alpha$:

$$\psi_\alpha = \frac{\lambda}{(E_\alpha - H)} \sum_{n,k} \psi_{nk}(x, y)\, \psi^*_{nk}(x_\cdot, y_\cdot)\psi_\alpha \quad ,$$

$$\sum_{n,k} \frac{\lambda \psi_{nk}(x, y)\, \psi^*_{nk}(x_\cdot, y_\cdot)}{E_\alpha - E_{nk}} = 1 \quad .$$

رابطه بالا به ازای هر x, y از جمله بـه ازای $x = x_\cdot$ و $y = y_\cdot$ برقرار است بنابراین خواهیم داشت :

$$\sum_{n,k} \frac{\lambda |\psi_{n,k}(x_\cdot, y_\cdot)|^2}{E_\alpha - E_{nk}} = 1 \quad ,$$

مشاهده می‌کنیم که با انتخاب هر E_α که مقدارش بین دو تـراز E_{nk} قرار گیرد رابطه فوق برقرار می‌شود. با نزدیک شـدن E_α به یکی از مقدارهای E_{nk}، جمع بـالا بـه اعـداد بـسیار بزرگـی خواهد انجامید و دیگر برابر عدد یک نمـی‌شـود. تمـام سـطوح انرژی E_α که نزدیک به تراز E_{nk} قرار داشته باشـند حالتهـای گسترده را به وجود می‌آورند که حامل جریـان هـستند و بیـشتر در قسمت مرکزی دیده می‌شوند. همچنین یک سـری ترازهـای جایگزیده در قسمتهای دورتر پراکنده می‌باشند که جریانی حمل نمی‌کنند و باعث جابه‌جایی انرژی نمی‌شوند [۲].

۱. Prange

۲. پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار

می‌دانیم یک سیستم، در حـضور میـدان مغناطیـسی خـارجی و میدان الکتریکی در جهت محور x دارای هـامیلتونی بـه شـکل زیر می‌باشد:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} + \frac{e\vec{A}}{c}\right]^2 + eEx \ , \qquad (1)$$

در صـورت اسـتفاده از پیمانـه لانـدائو بـه صـورت $A_x = 0$ و $A_y = -Bx$ برای معادله (۱) می‌توان جوابها را به صورت زیـر نوشت:

$$\psi_{nk} = \pi^{\frac{-1}{4}} L_y^{\frac{-1}{2}} \exp(iky)\phi_n(x - X), \qquad (2)$$

که ϕ_n، nامین تابع نوسانگر هارمونیک است، $X = kl^2$ و طول مغناطیسی به صورت $l = \left(\frac{\hbar c}{eB}\right)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود. انرژی ایـن ویژه حالتها به شکل زیر است :

$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + eEX \ , \qquad (3)$$

اگر در یکای مغناطیسی کار کنیم، در آن صورت $\hbar\omega = 1$، و بـا فـرض $u = \frac{cE_x}{B}$ رابطـه (۳) را مـی‌تـوان بـه صـورت زیـر بازنویسی کرد:

$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2}\right) + uX \ . \qquad (4)$$

تغییر شار، تابع موج را به شکل زیر تغییرمی دهد:

$$\psi \to \psi \exp\left(2\pi i \frac{\phi}{\phi_\cdot}\right), \ \phi_\cdot = \frac{hc}{e} \ ,$$

با این تغییر شار، معادله (۲) به شکل زیر درمی آید:

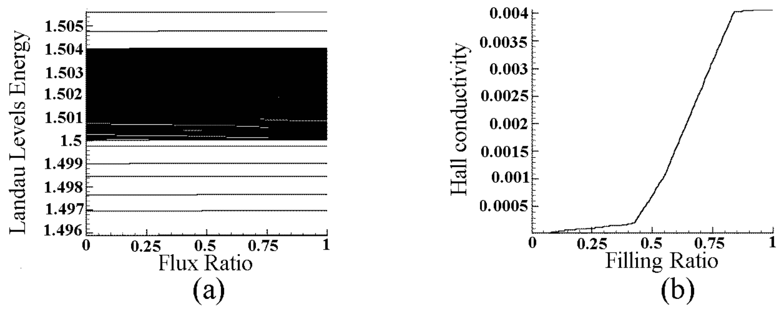
$$\psi'_{nX} = \pi^{-\frac{1}{4}} L_y^{-\frac{1}{2}} exp\left(\frac{i}{l^2}\left(Xy + 2\pi l^2 \frac{\phi}{\phi_\cdot}\right)\right)\phi_n(x - X),$$

می‌توان معادله (۴) را که ویـژه مقـادیر حالـت بـدون ناخالـصی است، با تغییر شار به صورت زیر بازنویسی کرد:

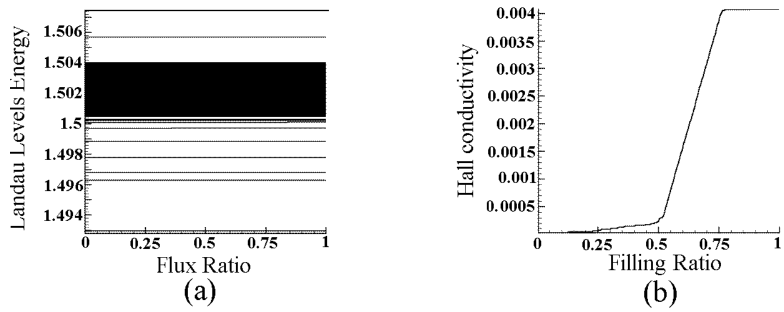
$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2}\right) + u\left(X + \frac{\phi}{\phi_\cdot}\Delta X\right) \ , \qquad (5)$$

بنابراین در حالت بدون ناخالـصی، مـاتریس هـامیلتونی قطـری $H_\cdot$ را خواهیـــم داشت که عناصر روی قطر آن از معادله (۵) بـه دسـت

Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 21:53 IRDT on Sunday July 21st 2019



شکل ۱. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی همسانگرد با $N = ۱۰۰$، (b) نمایش پله هال.



شکل ۲. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد و توزیع بیشتر در جهت y با $N = ۱۰۰$، (b). نمایش پله هال.

می‌آید. حال اگر بـه ایـن سیـستم پتانـسیل ناخالـصی V_{im} را اضافه کنیم، در این صورت ماتریس کـل $H = H_. + V_{im}$، از حالت قطری بودن در می‌آید و بـرای بـه دسـت آوردن ویـژه مقادیر کافی است تـا مـاتریس کـل را بـه روش حـل عـددی قطری کنیم. قطری سازی به روش عددی بـا اسـتفاده از زبـان برنامـه نویســی فرترن ۹۰ انجام شده اسـت (subrotin evalf) [۳]، [۶]. در این مقالـه تعـداد زیرترازهـا $N_S = ۲۵۶$ انتخـاب شده است و میدان الکتریکی را طوری انتخـاب مـی‌کنـیم کـه $u = ۱۰^{-۴}$ باشد [۷]. تعداد N ناخالصی V_{im}، به صورت تابع دلتای دیراک با توزیع ناهمسانگرد به سیستم اعمال می‌کنـیم و پاسخ زیرترازها را به تغییر شار بررسی می‌نماییم.

ترازهـای گـسترده بـه تغییـر شـار پاسـخ مـی‌دهنـد و ترازهای جایگزیـده بـه تغییـر شـار پاسخ نمـی‌دهنـد [۴, ۵]. در پایان تعداد ناخالـصی را افـزایش مـی‌دهـیم و رابطـه بـین افزایش آنها، با ناهمسانگرد بودن توزیـع ناخالـصی را بررسـی می‌کنیم.

۳. پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با اعمال توزیـع ناخالصی ناهمسانگرد

همان طور که قبلاً گفته شد، در حالت بدون ناخالـصی، عناصـر روی قطر ماتریس قطری $H_.$ را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$E_{ii} = \left(۱ + \frac{۱}{۲}\right) + ۱۰^{-۴}\left(i\Delta X + \frac{\phi}{\phi_.}\Delta X\right),$$

$$i = ۱,۲,۳,...,۲۵۶$$

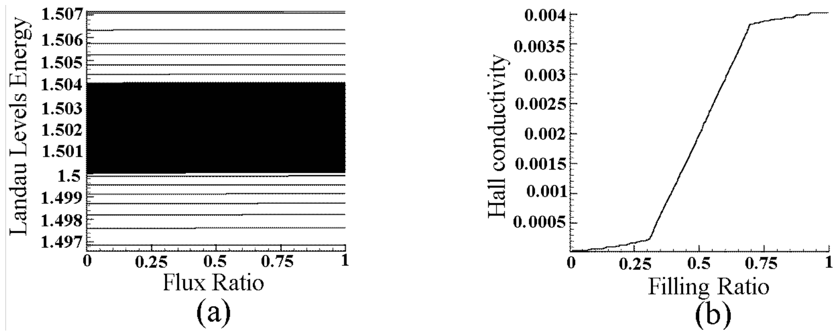
با اعمال N ناخالصی با پتانسیلهایی به شکل زیر داریم:

$$V_{im}(\vec{r}) = V_. \sum_{i,j} \delta(x - x_.)\ \delta(y - y_.)\ (-۱)^{i+j}$$

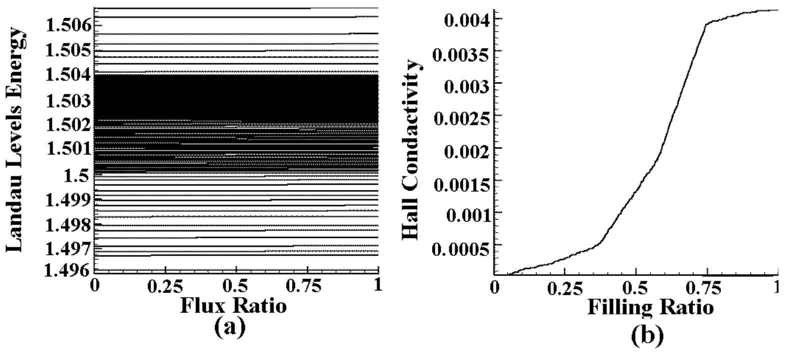
که این پتانسیلها یک در میان به صورت جاذبه و دافعه می‌باشند. دامنه ناخالصی $V_.$، برابر با ۰/۰۲ انتخـاب شـده اسـت. عناصـر ماتریس ناخالصی را کـه یـک مـاتریس غیـر قطـری اسـت، بـا ماتریس قطری $H_.$ جمع می‌کنـیم و سـپس مـاتریس حاصـل را قطری کرده و نتایج را با توجه بـه نمودارهـای بـه دسـت آمـده بررسی می‌کنیم .

در شکل ۱ تعداد ناخالصیها ۱۰۰ انتخاب شده است کـه بـه صورت همـسانگرد در سیـستم توزیـع شـده‌انـد. یعنـی تعـداد

Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 21:53 IRDT on Sunday July 21st 2019



شکل ۳. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد و توزیع بیشتر در جهت x با $N = ۱۰۰$، (b). نمایش پله هال.



شکل ۴. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی همسانگرد با $N = ۴۰۰$، (b) نمایش پله هال.

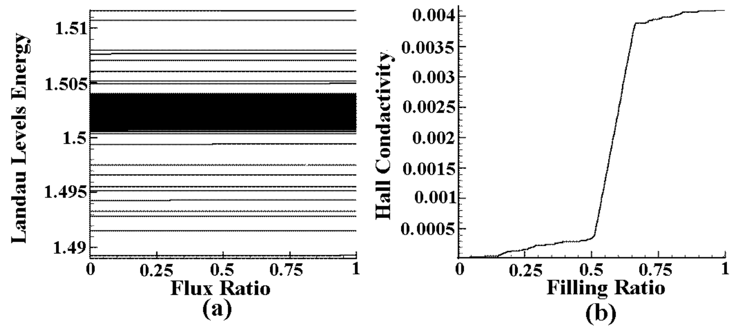
ناخالصیها در جهت x,y یکسان هستند. همان طور که در قسمت (a) نمودار دیده می‌شود، یک‌سری ترازهای گسترده در نواحی مرکزی و یک‌سری ترازهای جایگزیده در ابتدا و انتهای نمودار قرار دارند. به علت وجود این دو نوع دسته تراز لاندائو پله هال نیز تشکیل می‌شود که در قسمت (b) نمودار دیده می‌شود.

در شکل ۲ توزیع ناخالصی را ناهمسانگرد در نظر می‌گیریم. به همبن منظور تعداد ناخالصی در جهت y را ۲۵ برابر تعداد ناخالصی در جهت x انتخاب می‌کنیم. با مقایسه شکل ۱ مشاهده می‌شود که ترازهای گسترده در همان محدوده قبلی باقی می‌مانند، ولی ترازهای جایگزیده از مبدا دورتر شده اند و این پراکندگی در هر دو جهت بالا و پایین دیده می‌شود. در این حالت با توجه به قسمت (a) نمودار، شکل پله هال نیز به طور واضح تر دیده می‌شود.

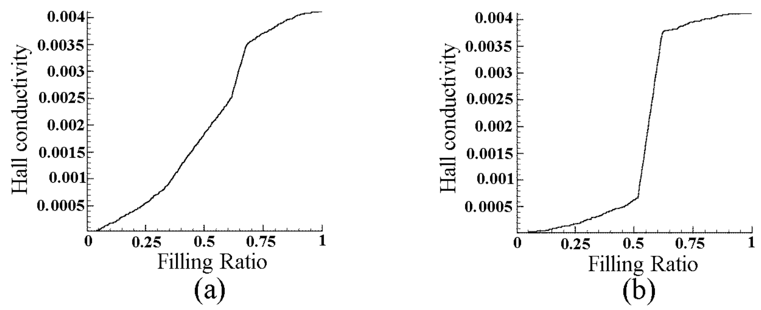
شکل ۳ عکس حالت قبل را نشان می‌دهد. یعنی تعداد ناخالصیها در جهت x، ۲۵ برابر تعداد ناخالصی در جهت y است. با مقایسه شکل ۱، مشاهده می‌شود تعداد ترازهای گسترده بیشتر شده و ترازهای جایگزیده نیز پراکندگی کمتری نسبت به مبدأ دارند و چون محدوده پراکندگی ترازهای گسترده بازتر شده است، شکل پله هال به وضوح دیده نمی‌شود. با توجه به نتایج به دست آمده و از آنجایی که در این سیستم جریان در جهت y است، می‌توان چنین نتیجه گیری کرد که، هر چقدر توزیع ناخالصی در جهت جریان افزایش یابد، بر تعداد ترازهای جایگزیده افزوده می‌شود و این ترازها از مبدا دورتر می‌شوند، به همین جهت شکل پله هال بهتر دیده می‌شود. بالعکس اگر افزایش ناخالصی در جهتی باشد که جریان وجود ندارد، ترازهای گسترده در محدوده بیشتری پراکنده می‌شوند که این امر موجب می‌شود پله هال به خوبی مشاهده نشود.

در مرحله بعد تعداد ناخالصی همسانگرد سیستم را به $N = ۴۰۰$ افزایش می‌دهیم (شکل ۴). در قسمت (a) نمودار، ترازهای لاندائو نسبت به تغییر شار و در قسمت (b)، شکل پله هال نشان داده شده است.

Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 21:53 IRDT on Sunday July 21st 2019



شکل ۵. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد با $N = ۴۰۰$ ، (b) نمایش پله هال.



شکل ۶. (a). نمایش پله هال با ناخالصی همسانگرد با $N = ۹۰۰$ ، (b) نمایش پله هال با ناخالصی ناهمسانگرد با $N = ۹۰۰$.

در شکل ۵، ۴۰۰ ناخالصی به طور ناهمسانگرد توزیع شده‌اند (توزیع ناخالصی در جهت y، ۲۵ برابر ناخالصی در جهت x انتخاب شده است). با مقایسه شکل ۴، مشاهده می‌شود که ترازهای جایگزیده بیشتر و از مبدأ دورتر شده‌اند، به همین جهت شکل پله هال بهتر دیده می‌شود. در شکل ۶ میزان ناخالصی ۹۰۰ انتخاب شده است. در قسمت (a) نمودار شکل پله هال برای توزیع همسانگرد و در قسمت (b) نمودار شکل پله هال برای توزیع ناهمسانگرد نشان داده شده است که تعداد بیشتری از ناخالصیها در جهت جریان توزیع شده است. این نمودارها نشان می‌دهد، اگر میزان ناخالصی افزایش یابد، در آن صورت برای مشاهده پله هال، توزیع ناخالصی باید به شکل ناهمسانگرد و در جهت جریان باشد.

۴. نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج به دست آمده از نمودارها می‌توان چنین نتیجه گیری کرد که در محیطهایی با توزیع ناخالصی ناهمسانگرد، دو دسته تراز گسترده و جایگزیده به وجود می‌آیند و به دنبال این دو دسته تراز، پله هال ایجاد می‌شود. در صورتی که بیشتر ناخالصی در جهت جریان توزیع یابد، تعداد ترازهای جایگزیده بیشتر و از مبدأ نیز دورتر می‌شوند و در نتیجه پله هال بهتر دیده می‌شود. بالعکس، اگر ناخالصی در جهتی که جریان وجود ندارد، بیشتر توزیع شود، در آن صورت تعداد ترازهای گسترده در محدوده بیشتری پراکنده می‌شوند و پله هال به خوبی دیده نمی‌شود. همچنین اگر ناخالصی، کل افزایش یابد، برای مشاهده اثر هال لازم است تا توزیع ناخالصی، ناهمسانگرد و همچنین در جهت جریان باشد.

Downloaded from ijpr.iut.ac.ir at 21:53 IRDT on Sunday July 21st 2019

مراجع

1. R E Prange, *Phys. Rev*. B **23,** 9 (1981).
2. R E Prange and S M Girvin, *The Quantum Hall Effect* (1990).
3. L Frank Friedman and B Koffman Elliot, *Problem Solving And Structured Programming In FORTRAN*. Addison-Wesley, Rev. **2** (1981).
4. G F Giulian, J J Quinn and S C Ying, *Phys. Rev*. **B** (1983) 28.
5. H Aoki, *Phys*. **15l** (1982) 1227.

۶. برنامه نویسی در فرترن ۹۰، ترجمه دکتر محمود مشعل، چاپ سوم، (۱۳۸۲).

۷. سعیده رمضانی ثانی، *بررسی اثر کوانتومی هال **IQHE** در سیستمهای دارای ناخالصی به روش تبدیل پیمانه‌ای در حضور نقطه‌های کوانتومی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه الزهرا، (۱۳۸۳).