

## بررسی نوسانگرهای کلاین-گوردن و دیراک در فضای ناجابه‌جایی تحت میدان مغناطیسی ثابت

بهروز میرزا<sup>۱</sup>، رسول نریمانی، اعظم صادقی و طیبه عامری

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان  
 ۱. پست الکترونیکی: b.mirza@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۴/۴/۵ ؛ دریافت نسخه‌نهایی: ۸۴/۹/۸)

### چکیده

در این مقاله نوسانگرهای کلاین-گوردن و دیراک رادر فضای ناجابه‌جایی تحت میدان مغناطیسی ثابت بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که به ازای میدان مغناطیسی خاصی شکل این نوسانگرها در فضای ناجابه‌جایی به فضای معمولی نگاشته می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: نوسانگر دیراک، فضای ناجابه‌جایی

### ۱. مقدمه

در سالهای اخیر برخی از نظریه‌ها در فضای ناجابه‌جایی مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از آنها نظریه میدان کوانتومی ناجابه‌جایی است که با اعمال ضرب ستاره موپال (\*) روی توابع فضای معمولی به دست می‌آید [۱ و ۲]. با مطالعه یک تک ذره می‌توان به شناختی ساده از ساختار ناجابه‌جایی در نظریه میدان دست یافت. این موضوع انگیزه‌ای برای مطالعه مکانیک کوانتومی ناجابه‌جایی است [۳-۱۰]. در برخی از این مطالعات به مکانیک کوانتومی ناجابه‌جایی (NCQM) در دو بعد و ارتباطش با مسئله لاندائو توجه شده است و نتیجه این بوده که معادله حرکت یک نوسانگر هارمونیک در یک فضای ناجابه‌جایی با معادله حرکت یک ذره در میدان مغناطیسی ثابت و در پایین‌ترین تراز لاندائو مشابهت دارد [۹]. این روابط به مکانیک کوانتومی نسبیتی تعمیم داده شده و این نتیجه به دست آمده که نوسانگرهای دیراک و کلاین-گوردن در یک فضای ناجابه‌جایی رفتاری مشابه با مسئله لاندائو در یک فضای معمولی

(جابه‌جایی) دارند [۱۱].

ما در این جا نشان خواهیم داد نوسانگرهای دیراک و کلاین-گوردن در فضای ناجابه‌جایی و در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی با اندازه مناسب به فضای معمولی نگاشته می‌شوند.

فضای ناجابه‌جایی فضای است که مختصات به صورت عملگرهایی در نظر گرفته می‌شوند که از روابط ناجابه‌جایی زیر پیروی می‌کنند:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i \theta^{\mu\nu}, \quad (1)$$

$\theta^{\mu\nu}$  یک تانسور پاد متقارن است. می‌توان نشان داد که روابط فوق منجر به تعریف جدیدی از ضرب در فضای توابع می‌شوند که به صورت زیر است:

$$(f * g)(x) = \exp\left[\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}\right] f(x) g(y) \Big|_{x=y}, \quad (2)$$

عبارت فوق را می توان در فضای ناجابه جایی به صورت زیر نوشت:

$$c^2 \left[ \left( \vec{P} - \frac{e \vec{B} \times \vec{r}}{c} \right) - i m \omega \vec{r} \right] \cdot \left[ \left( \vec{P} - \frac{e \vec{B} \times \vec{r}}{c} \right) + i m \omega \vec{r} \right] \psi = (E^2 - m^2 c^4) \psi \quad (8)$$

ضرب ستاره موپال (\*) معادل است با تبدیل  $\vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{2\hbar}$  به  $\vec{r}$  که در آن برداری است که بنا به تعریف به صورت  $\theta^{ij} = \varepsilon^{kij} \theta_k$  با  $\theta^{ij}$  مرتبط است ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) و می توان آن را با چرخش دستگاه مختصات به برداری در امتداد محور  $z$  تبدیل کرد ( $\vec{\theta} = \theta \hat{k}$ ).

اگر حرکت را در صفحه  $x-y$  در نظر بگیریم، تبدیل  $\vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{2\hbar}$  به صورت ساده زیر در می آید:

$$x \rightarrow x - \frac{\theta P_y}{2\hbar}, \quad y \rightarrow y + \frac{\theta P_x}{2\hbar} \quad (9)$$

پس معادله نوسانگر کلاین-گوردن دو بعدی با این فرض که میدان خارجی در راستای محور  $z$  باشد ( $\vec{B} = B \hat{k}$ ) به شکل زیر در می آید:

$$c^2 \left[ \left( 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \left( \frac{eB\theta}{2c\hbar} \right)^2 + \left( \frac{m\omega\theta}{2\hbar} \right)^2 \right) P^2 + (m^2 \omega^2 + \left( \frac{eB}{2c} \right)^2) (x^2 + y^2) - \left( \frac{2eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2 \hbar} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \right) L_z - \left( 2m\omega\hbar + \frac{m\omega e B \theta}{c} \right) \right] \psi = (E^2 - m^2 c^4) \psi \quad (10)$$

می توان با انتخاب مناسب شدت میدان  $B$  اثر فضای ناجابه جایی را در معادله فوق حذف کرد. این عمل با صفر قرار دادن ضریب  $L_z$  انجام می شود [۱۱]:

$$\frac{2eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2 \hbar} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} = 0, \quad (11)$$

حل این معادله به صورت زیر:

$$\theta = \frac{-\frac{eB}{c}}{\left( \frac{e^2 B^2}{4c^2 \hbar} + \frac{m^2 \omega^2}{\hbar} \right)} \quad (12)$$

و می توان مکانیک کوانتمی ناجابه جایی را به صورت زیر تعریف کرد [۳]:

$$H(x, p) \psi(x) = E \psi(x), \quad (3)$$

که با شکل زیر در فضای ناجابه جایی معادل است:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x}), \quad (4)$$

در رابطه فوق  $x$  و  $p$  عبارتند از:

$$\vec{x}_i = x_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j, \quad \vec{p}_i = p_i.$$

در قسمت دوم این مقاله ابتدا نوسانگر کلاین-گوردن دو بعدی در یک فضای ناجابه جایی تحت اثر میدان مغناطیسی ثابت را بررسی کرده و ارتباطش را با شکل نوسانگر در فضای معمولی مورد مطالعه قرار می دهیم. در بخش سوم به بررسی نوسانگر دیراک سه بعدی در فضای ناجابه جایی و در حضور میدان مغناطیسی ثابت پرداخته و نگاهت آن را به فضای جابه جایی بررسی می کنیم.

## ۲. نوسانگر کلاین-گوردن در فضای ناجابه جایی و در میدان مغناطیسی خارجی

نوسانگر کلاین-گوردن به صورت زیر تعریف می شود [۱۱]:

$$c^2 (\vec{P} - i m \omega \vec{r}) \cdot (\vec{P} + i m \omega \vec{r}) \psi = (E^2 - m^2 c^4) \psi, \quad (5)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت تا شکل نوسانگری آن نمایان شود:

$$c^2 (P^2 + m^2 \omega^2 r^2) \psi = (E^2 - m^2 c^4 - 2m\omega\hbar) \psi. \quad (6)$$

در معادلات فوق  $m$  جرم سکون و  $\omega$  بسامد کلاسیکی نوسانگر است. اگر این نوسانگر تحت میدان مغناطیسی قرار بگیرد  $\vec{P}$  به  $\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A}$  تغییر می یابد.  $\vec{A}$  پتانسیل برداری است که برای میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت به صورت  $\frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2}$  تعریف می شود. بنابراین معادله نوسانگر کلاین-گوردن در میدان مغناطیسی به شکل زیر است:

$$c^2 \left[ \left( \vec{P} - \frac{e \vec{B} \times \vec{r}}{c} \right) - i m \omega \vec{r} \right] \cdot \left[ \left( \vec{P} - \frac{e \vec{B} \times \vec{r}}{c} \right) + i m \omega \vec{r} \right] \psi = (E^2 - m^2 c^4) \psi, \quad (7)$$

و یا میدان مغناطیسی زیر است:

$$[c\vec{\alpha} \cdot ((\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{B} \times \vec{r}) - im\omega\beta\vec{r}) + \beta mc^2] * \psi(\vec{r}) = w\psi(\vec{r}) \quad (18)$$

اثر ضرب ستاره (\*) را با تبدیل  $\vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{\hbar}$  به اعمال می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} & c\vec{\sigma} \cdot \left( \left[ \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{B} \times \left( \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{\hbar} \right) \right] + \right. \\ & \left. im\omega \left( \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{\hbar} \right) \right) \psi_b + mc^2 \psi_a = w\psi_a \\ & c\vec{\sigma} \cdot \left( \left[ \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{B} \times \left( \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{\hbar} \right) \right] - \right. \\ & \left. im\omega \left( \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{\hbar} \right) \right) \psi_a - mc^2 \psi_b = w\psi_b \end{aligned} \right. \quad (19)$$

که در آن  $\psi(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix}$  در نظر گرفته شده است. اگر بردارهای  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  و  $\vec{\theta}$  را به صورت زیر در نظر بگیریم ( $p_z = 0$ ):

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B\hat{k} \\ \vec{A} &= \frac{B}{\gamma} (-y\hat{i} + x\hat{j}) \\ \vec{\theta} &= \theta\hat{k} \end{aligned} \quad (20)$$

پس از حل معادلات جفت شده فوق به دو رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & c^2 \left[ \left( 1 + \frac{eB\theta}{\hbar c} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{\hbar^2} \right) P^2 + \left( m^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{\hbar^2 c^2} \right) r^2 \right. \\ & \left. - \left( \frac{m\omega}{\hbar} + \frac{\gamma m\omega e B \theta}{\hbar^2 c} \right) S_z L_z - \left( \frac{eB}{c} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta}{\hbar^2 c^2} \right) L_z \right. \\ & \left. - \left( \frac{eB}{c} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta}{\hbar^2 c^2} \right) S_z \right. \\ & \left. + \left( \frac{m\omega\theta}{\hbar^2} + \frac{m\omega e B \theta^2}{\hbar^2 c} \right) S_z (p_x^2 + p_y^2) \right] \psi_a = (w^2 - m^2 c^4) \psi_a, \\ & c^2 \left[ \left( 1 + \frac{eB\theta}{\hbar c} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{\hbar^2} \right) P^2 + \left( m^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{\hbar^2 c^2} \right) r^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{m\omega}{\hbar} + \frac{\gamma m\omega e B \theta}{\hbar^2 c} \right) S_z L_z - \left( \frac{eB}{c} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta}{\hbar^2 c^2} \right) L_z \right. \end{aligned}$$

$$B = \frac{-\gamma \hbar c}{e\theta} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{\hbar^2}} \right], \quad (13)$$

با انتخاب فوق معادله (۱۰) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$c^2 \left[ P^2 + (m^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{\hbar^2 c^2}) (x^2 + y^2) - \left( \gamma m\omega\hbar + \frac{m\omega e B \theta}{c} \right) \right] \psi = (E^2 - m^2 c^4) \psi, \quad (14)$$

که در آن اثر ناجابه‌جایی مشاهده نمی‌شود. به عبارت دیگر با انتخاب مناسب میدان مغناطیسی اثر ناجابه‌جایی و همچنین اثر میدان مغناطیسی از بین رفته و نوسانگر در فضای ناجابه‌جایی به فضای جابه‌جایی بدون میدان مغناطیسی نگاشته می‌شود، البته با ثابتهای فیزیکی جدید (معادله (۱۴)) پس از باز تعریف ضرایب قابل مقایسه با معادله (۱۰) در حالت  $B=0, \theta=0$  است.

### ۳. نوسانگر دیراک سه بعدی در فضای ناجابه‌جایی و در میدان مغناطیسی خارجی

معادله دیراک سه بعدی به صورت زیر است:

$$[c\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta mc^2] \psi(\vec{r}) = w\psi(\vec{r}) \quad (15)$$

$\vec{\alpha}, \beta$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \cdot & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{pmatrix},$$

که در آن  $\sigma_i$ ها ماتریسهای پائولی هستند.

با تبدیل  $\vec{P}$  به  $\vec{P} - im\omega\beta\vec{r}$  نوسانگر دیراک به دست می‌آید:

$$[c\vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - im\omega\beta\vec{r}) + \beta mc^2] \psi(\vec{r}) = w\psi(\vec{r}), \quad (16)$$

که  $m$  و  $\omega$  به ترتیب جرم سکون و بسامد نوسانگر هستند.

با اعمال میدان مغناطیسی در معادله (۲) و تبدیل  $\vec{P}$  به

$$\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \times \vec{r}$$

به معادله زیر می‌رسیم:

$$[c\vec{\alpha} \cdot ((\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{B} \times \vec{r}) - im\omega\beta\vec{r}) + \beta mc^2] \psi(\vec{r}) = w\psi(\vec{r}). \quad (17)$$

با تبدیل ضرب معمولی به ضرب ستاره مویال داریم:

بنابراین با انتخاب مناسب میدان مغناطیسی  $B$  می‌توان اثر ناجابه‌جایی و همچنین اثر خود میدان مغناطیسی را حذف کرده و مسئله را به حالتی در فضای جابه‌جایی و بدون میدان مغناطیسی نگاشت. در این حالت مسئله با حالت  $B=0, \theta=0$  معادله (۲۱) قابل مقایسه است.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله نگاشت نوسانگرهای نسبتی در فضای ناجابه‌جایی به فضای جابه‌جایی مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شد که به ازای مقادیر خاصی از میدان مغناطیسی، نوسانگر کلاین-گوردن و دیراک در فضای ناجابه‌جایی به فضای جابه‌جایی نگاشته می‌شوند و میدان مغناطیسی و فضای ناجابه‌جایی می‌توانند در این حالتها اثر یکدیگر را از بین ببرند.

$$\begin{aligned} & + \left( \frac{eB}{c} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta}{2\hbar c} \right) S_z \\ & - \left( \frac{m\omega\theta}{\hbar} + \frac{m\omega e B \theta}{2\hbar c} \right) S_z (p_x^2 + p_y^2) \\ & - \left( \frac{m\omega e B \theta}{c} + 2m\omega\hbar \right) \psi_b = (w^2 - m^2 c^2) \psi_b . \end{aligned} \quad (21)$$

در این جا نیز مشاهده می‌شود که به ازای یک  $\theta$  خاص، اثر میدان خارجی می‌تواند اثر ناجابه‌جایی را حذف کند. با صفر قرار دادن ضریب  $L_z$  مقدار این  $\theta$  و میدان مغناطیسی معادل با آن به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{2\hbar c}{e\theta} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{\hbar^2}} \right] \\ \theta &= \frac{-eB}{c} \\ & \left( \frac{e^2 B^2}{2c^2 \hbar} + \frac{m^2 \omega^2}{\hbar} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

#### مراجع

1. M R Douglas and N A Nekrasov, *Rev Mod. Phys.* **73** (2001) 977-1029; hep-th/0106048.
2. N Seiberg and E Witten, *JHEP* **9909** (1998) 003; hep-th/9808042.
3. L Mezincescu, hep-th/0007046.
4. M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari and A Tureanu. *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2716; hep-th/0010175.
5. V P Nair. *Phys. Lett. B* **505**; (2001) 249, hep-th/0008027
6. J Gamboa, M Loewe and J C Rojas, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 067901; hep-th/0010220.
7. S Belluchi, et al; *Phys. Lett. B* **522** (2001) 345, hep-th/0106138.
8. C Acatrinei, *JHEP* **0109** (2001) 009; hep-th/0107078.
9. J Gamboa, et al; *Int. J. Mod. Phys. A* **17** (2002) 2555-2566; hep-th/0106125.
10. J Gamboa, et al; *Mod. Phys. Lett. A* **16** (2001) 2075-2078; hep-th/0104224.
11. B Mirza and M Mohadesi, *Commun Theor. Phys.* **42** (2004) 664-668; hep-th/0412122.
12. D Ito, K Mori and E Carrieri, *Nuovo Cimeto* **51A** (1967) 1119.
13. M Moshinsky and A Szczepaniak, *J. Phys. A. Math. Gen.* **22** (1989) L817-L819.
14. M Moreno and A Zentella, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989) L821-L825.
15. J Benitez, et al; *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 14-1643.
16. P Strange, *Relativistic Quantum Mechanics* (1998) Camb. Univ. Press.