مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۳، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۲

برهم‌نهي حالت‌هاي همدوس غيرخطي روي سطح كره

طاهره حسين‌زاده، علي مهدي‌فر و احسان عموقربان

گروه فيزيك، دانشكدة علوم پايه، دانشگاه شهركرد، شهركرد

پست الكترونيكي: mahdifar_a@sci.sku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۵/۱۶ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۱/۱۱/۱۱)

چكيده

در اين مقاله، با استفاده از حالت‌هاي همدوس غيرخطي روي سطح كره، برهم‌نهي حالت‌هاي مزبور را معرفي مي‌كنيم. سپس خواص اپتيك كوانتومي حالت‌هاي برهم‌نهي شدة جديد را بررسي و با خواص متناظر حالت‌هاي همدوس اوليه مقايسه خواهيم كرد. به طور مشخص، براي برهم‌نهي حالت‌هاي همدوس روي سطح كره، توزيع شمارش فوتوني، پارامتر مندل، درجة همدوسي، چلاندگي كودراتوري و تابع ويگنر را محاسبه كرده و اثر خميدگي فضا بر ويژگي‌هاي مزبور را به دست مي‌آوريم. سرانجام، با استفاده از سامانة يون به دام افتاده، طرحواره‌اي فيزيكي براي توليد برهم‌نهي حالت‌هاي همدوس بر سطح كره ارائه خواهيم كرد.

واژه‌هاي كليدي: حالت‌هاي همدوس غيرخطي سطح كره، برهم‌نهي حالت‌هاي همدوس غيرخطي، توليد فيزيكي برهم‌نهي حالت‌ها

۱. مقدمه

حالت‌های همدوس نخستین بار توسط شرودینگر برای توصیف بستهٔ موج پخش‌ناپذیر نوسانگرهای هماهنگ معرفی شد [۱]. این حالت‌ها که از برهم‌نهی حالت‌های عددی به دست می‌آیند، ویژه حالت عملگر نابودی نوسانگر هماهنگ هستند. حالت‌های مزبور دارای ویژگی‌های متمایزی نسبت به دیگر حالت‌ها، و به خصوص خود حالت‌های عددی، هستند. این برهم‌نهی از حالت‌های عددی دارای عدم قطعیت کمینه بوده و همچنین توزیع آمار شمارش فوتون‌های آنها از نوع پواسونی است که کاملا با حالت‌های عددی متفاوت است [۲].

حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ به روش‌های گوناگونی تعمیم یافته‌اند، که گام‌های مهمی در جهت گسترش این نظریه هستند. از جملهٔ این تعمیم‌ها می‌توان به تعمیم‌های دینامیکی [۳]، تقارنی [۴] و جبری [۵] اشاره نمود. به عنوان نمونه، در تعمیم‌های جبری، عملگرهای نردبانی بوزونی استاندارد $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ با شکل عام از این عملگرها جایگزین می‌شوند. این عملگرها در واقع ترکیبی از عملگرهای استاندارد و توابعی از برخی از ثابت‌های حرکت سامانه هستند. این فرآیند منجر به گذار از سامانهٔ خطی به سامانهٔ غیر خطی می‌شود.

از جمله تعمیم‌های جبری حالت‌های همدوس، حالت‌های همدوس غیرخطی هستند. برای رسیدن به این حالت‌ها عملگرهای جبر نوسانگر، به‌صورت تغییر شکل یافتهٔ زیر در نظر گرفته می‌شوند [۵]،

$$\hat{A} = \hat{a}\, f(\hat{n}) = f(\hat{n}+1)\, \hat{a},$$
$$\hat{A}^\dagger = f^\dagger(\hat{n})\, \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\, f^\dagger(\hat{n}+1),$$

حالت‌های همدوس غیرخطی به صورت ویژه حالت‌های عملگر نابودی تغییر شکل یافتهٔ بالا تعریف می‌شوند.

حالت‌های همدوس غیرخطی به دلیل خـواص غیرکلاسـیکی مورد توجه قرار گرفته‌اند، به طوری کـه بـسیاری از حالـت‌هـای اپتیک کوانتومی از قبیل حالت‌های همدوس با تغییـر شـکل q [۱]، حالت‌های فوتون افزوده [۲]، حرکت مرکـز جـرم یـک یـون بـه دام افتاده و همچنین برخی از حالت‌های همدوس تعمیم یافتـه [۶] را می‌توان از دستهٔ حالت‌های همدوس غیرخطی دانـست. همچنـین اثرات محصورسازی فضایی و انحنای فیزیکی بر سـاختار جبـری حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ در چارچوب حالـت‌هـای همدوس غیر خطی بررسی شده است [۸،۷].

برهم‌نهی حالت‌های همدوس استاندارد و تعمـیم‌هـای آن و به خـصوص اثـرات تـداخلی آنهـا یکـی از خـصوصیات بـارز مکانیک کوانتومی است که آنها را از حالت‌های کلاسیک متمایز می‌کند. در فیزیک کلاسیک، برهم‌نهی حالـت‌هـای ممکـن یـک سامانه وجود خارجی ندارد به طوری که به عنوان مثـال، بـرهم نهی یک گربه زنده و مرده قابل مشاهده نیست. در واقع می‌توان نشان داد که در حد کلاسیک، ماتریس چگالی مربوط بـه بـرهم نهی حالت‌ها، در زمان‌های واهمدوسی [۳] بسیار کوتاهی، به شکل قطری در می‌آید که این نیز به معنـای حـذف اثـرات کوانتـومی خواهد بود[۹]. بدین صورت، برهم‌نهی حالت‌های کوانتـومی و ویژگی‌هـای غیرکلاسـیکی آن‌هـا در سـال‌هـای اخیـر موضـوع پژوهش‌های بسیاری قرار گرفته است [۱۰]. در دهه‌هـای اخیـر نیز کارهای متنوعی در زمینهٔ بـرهم‌نهـی حالـت‌هـای همـدوس انجام شده است که به طور معمول، به دست آوردن حالت‌هایی با خواص غیرکلاسیکی انگیـزهٔ انجـام چنـین تحقیقـاتی اسـت. برهم‌نهی حالت‌های همدوس سـبب پدیـد آمـدن خـصوصیات غیرکلاسیکی متعددی می‌شوند که این ویژگـی‌هـا کـاربردهـای متنوعی در فیزیک کوانتومی از قبیل نظریهٔ اطلاعـات کوانتـومی [۱۱]، دوربـری کوانتـومی [۱۲]، کدگـذاری [۱۳] و رمزنگـاری [۱۴] کوانتومی پیدا کرده‌اند. از جمله برهم‌نهی‌های حالـت‌هـای همدوس می‌توان به حالت‌های همدوس زوج و فرد اشاره نمود که این حالت‌ها به ترتیـب نمونـه‌هـای متقـارن و پادمتقـارن از برهم‌نهی هستند [۱۵].

در مرجع [۸]، برای مطالعهٔ اثر خمیدگی فضای فیزیکـی بـر ویژگی‌های حالت‌های همدوس، ساختار جبـری یـک نوسـانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح یک کره بررسی شده است. نشان داده شده است که نوسانگر دو بعدی را می‌توان به عنـوان یـک نوسانگر یک بعدی با جبر تغییر شکل یافته توصیف کرد. علاوه بر این، مشخص شده است که جبر نوسانگر روی کره نیـز یـک جبر نوسانگر تغییر شکل یافته نسبت به جبر آن در فضای تخت است. سرانجام حالت‌های همدوس روی سطح کره نیز به دست آورده شده است. در مرجع [۱۶] نیز با ارائهٔ طرحواره‌ای فیزیکی برای تولید حالت‌های همدوس غیرخطی حرکت ارتعاشی مرکز جرم اتم بـه دام افتـاده، شـیوه‌ای بـرای آشکارسـازی خمیـدگی فضای فیزیکی معرفی شده است. همچنین نشان داده شده است که با تغییر بسامد رابی لیزرهای تابیده شده می‌توان حالـت‌هـای همدوس بر روی کره‌های با خمیدگی‌های مختلف را تولید کرد. لذا می‌توان خمیدگی فـضای فیزیکـی را بـا تنظـیم پارامترهـای مربوط به سامانهٔ اتم به دام افتاده کنترل کرد.

در این مقاله به منظور بررسی اثرات غیرکلاسیکی برهم‌نهی، بـا استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره، برهم‌نهی حالت‌های مزبور را معرفی می‌کنیم. سپس خواص اپتیک کوانتومی حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ جدید را بررسـی و بـا خـواص متنـاظر حالت‌های همدوس اولیه مقایسه خواهیم کرد. به طـور مـشخص، برای برهم‌نهـی حالـت‌هـای همـدوس روی سـطح کـره، توزیـع شـمارش فوتـونی، پـارامتر منـدل، درجـهٔ همدوسـی، چلانـدگی کودراتوری و تابع ویگنر را محاسبه کرده و اثر خمیـدگی فـضا بـر ویژگی‌های مزبور را به دست می‌آوریـم. سـرانجام، بـا اسـتفاده از سامانهٔ یون به دام افتاده، طرحواره‌ای فیزیکی برای تولید برهم‌نهـی حالت‌های همدوس بر سطح کره ارائهٔ خواهیم کرد.

۲. حالت‌هاي همدوس غيرخطي روي سطح کره

حالـت‌هـای همـدوس اسـتاندارد بـه روش‌هـای گونـاگونی تعمـیم یافته‌اند [۵]. حالت‌های همدوس غیرخطی یا حالـت‌هـای همـدوس

---

۱. q-deformed

۲. Photon-added

۳. Decoherence

تغییر شکل یافتهٔ f [۱]، از جمله تعمیم‌های جبری این حالت‌ها هستند. در این روش عملگرهای خلق و نابودی جبر ویل–هایزنبرگ[۲] با شکل تغییریافتهٔ آنها به صورت زیر جایگزین می‌گردد،

$$\hat{A} = \hat{a}\, f(\hat{n}) = f(\hat{n}+1)\, \hat{a}, \qquad \hat{A}^{\dagger} = f^{\dagger}(\hat{n})\, \hat{a}^{\dagger} = \hat{a}^{\dagger}\, f^{\dagger}(\hat{n}+1). \tag{۱}$$

در اینجا $\hat{n}$ عملگر عددی بوده و $f(\hat{n})$ یک تابع عملگر مقدار است. به طور معمول تابع $f(\hat{n})$ به پارامتری بستگی دارد که به ازای مقادیر خاص این پارامتر، عملگرهای تغییرشکل یافتهٔ $\hat{A}$ و $\hat{A}^{\dagger}$ به $\hat{a}$ و $\hat{a}^{\dagger}$ تبدیل می‌شوند. جابه‌جاگر $\hat{A}$ و $\hat{A}^{\dagger}$ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left[\hat{A}\,,\,\hat{A}^{\dagger}\right] = (\hat{n}+1)\, f(\hat{n}+1)\, f^{\dagger}(\hat{n}+1) - \hat{n}\, f(\hat{n})\, f^{\dagger}(\hat{n}), \quad \left[\hat{A}\,,\,\hat{n}\right] = \hat{A}, \quad \left[\hat{A}^{\dagger},\hat{n}\right] = -\hat{A}^{\dagger}, \tag{۲}$$

حالت‌های همدوس غیرخطی در واقع ویژه حالت‌های عملگر تغییرشکل یافتهٔ $\hat{A}$ هستند.

در مرجع [۵]، به‌منظور بررسی ارتباط میان تابع تغییر شکل در نظریهٔ حالت‌های همدوس غیرخطی و ساختار هندسی فضای فیزیکی، یک نوسانگر دو بعدی روی سطح کره‌ای با شعاع R و خمیدگی[۳] λ، $\left(\lambda = \frac{1}{R^2}\right)$ در نظر گرفته شده و با مقایسهٔ جبر یک نوسانگر دو بعدی روی سطح تخت با جبر نوسانگر تغییر شکل یافتهٔ (۲) نشان داده شده است که نوسانگر دو بعدی مزبور را می‌توان به عنوان نوسانگر هماهنگ یک بعدی تغییر شکل یافته‌ای با تابع تغییر شکل:

$$f_S(n) = \sqrt{(N+1-n)}\; g(\lambda,n), \qquad g(\lambda,n) = \sqrt{\left(\lambda(N+1-n)+\sqrt{1+\lambda^2/4}\right)} \times \sqrt{\left(\lambda n+\sqrt{1+\lambda^2/4}\right)}, \tag{۳}$$

در نظر گرفت که در اینجا N بعد فضای فوک متناهی الابعاد مربوط به جبر نوسانگر هماهنگ روی سطح کره است. با توجه به محدود بودن تعداد حالت‌های عددی در فضای هیلبرت با بعد متناهی، حالت‌های همدوس با بعد متناهی را می‌توانیم از قطع کردن حالت‌های همدوس استاندارد در فضای هیلبرت با بعد نامتناهی به‌دست آورد [۱۷]. بر این اساس حالت‌های همدوس غیرخطی متناهی متناظر با نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره به‌دست می‌آید،

$$|z\rangle_S = F^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\binom{N}{n}}\, \left[g(\lambda,n)\right]!\; z^{n} |n\rangle, \qquad F = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left\{\left[g(\lambda,n)\right]!\right\}^2 |z|^{2n}. \tag{۴}$$

که در آن F ضریب بهنجارش است. آشکار است که حالت‌های همدوس $|z\rangle_S$ را می‌توان به عنوان خانواده‌ای از حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با فضای خمیده (کره) به شمار آورد.

۳. برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره

برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$|\phi\rangle_a = B\left[\,|z\rangle_S + a|{-z}\rangle_S\right]. \tag{۵}$$

در رابطهٔ بالا، ثابت بهنجارش B به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$B = \left[1 + a^2 + 2\frac{N_0}{F}a\right]^{\frac{-1}{2}}, \tag{۶}$$

که در آن داریم

$$N_0 = \left[\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{N}{n} \left\{\left[g(\lambda,n)\right]!\right\}^2 |z|^{2n}\right]. \tag{۷}$$

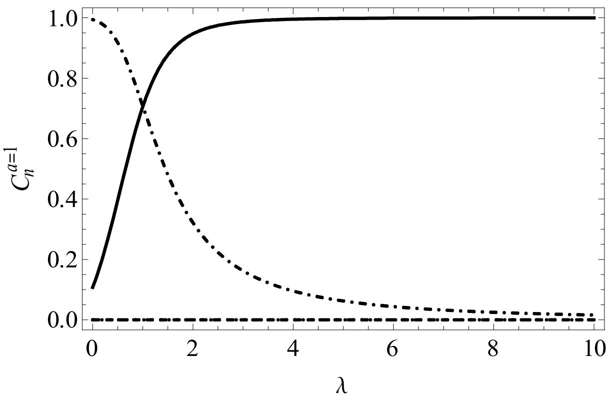
پارامتر a در حالت کلی یک عدد مختلط است که به ازای $a=1$، حالت $|\phi\rangle_a$ نشانگر یک گربهٔ شرودینگر[۴] زوج $|\phi\rangle_1 = B\left[\,|z\rangle_S + |{-z}\rangle_S\right]$، و به ازای $a=-1$، نشانگر یک گربه شرودینگر فرد $|\phi\rangle_{-1} = B\left[\,|z\rangle_S - |{-z}\rangle_S\right]$ است. در حالت خاص $a=0$ نیز حالت برهم‌نهی (۵) به حالت همدوس

۱. f-deformed

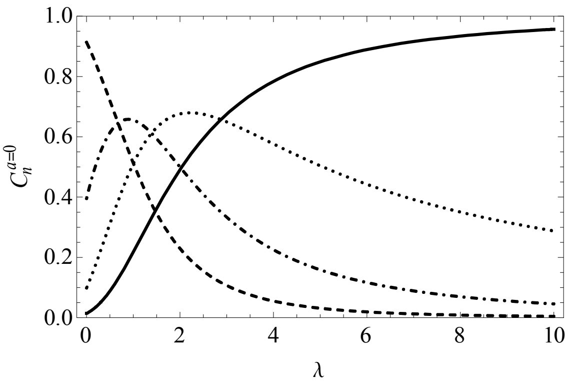
۲. Weyl - Heisenberg

۳. Curvature

۴. Schrodinger cat



شکل ۱. ضرایب بسط برای برهم‌نهی حالت‌های همدوس روی سطح کره بر حسب λ برای $a=1$ و با $z=0/25$ و $N=3$. منحنی نقطه–خط‌چین ضریب C_0، منحنی خط‌چین ضریب C_1، منحنی خطی ضریب C_2 و منحنی نقطه‌چین ضریب C_3.



شکل ۳. ضرایب بسط برای برهم‌نهی حالت‌های همدوس روی سطح کره بر حسب λ برای $a=0$ و با $z=0/25$ و $N=3$. منحنی خط‌چین ضریب C_0، منحنی نقطه–خط‌چین ضریب C_1، منحنی نقطه‌چین ضریب C_2 و منحنی خطی ضریب C_3.

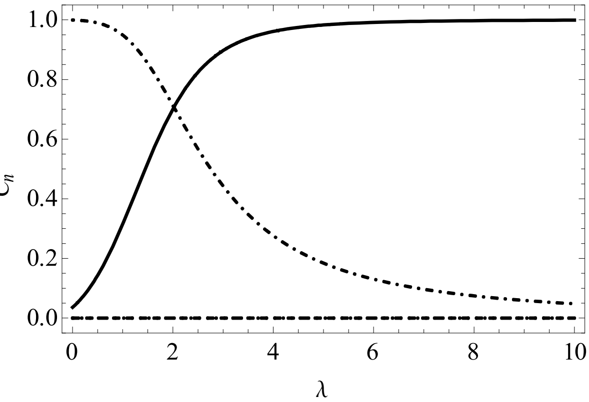
اولیهٔ (۴) تبدیل می‌شود.

با جایگذاری رابطهٔ (۴) در رابطهٔ (۵)، برهم‌نهی حالت‌ها به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\left|\phi\right\rangle_a = \sum_{n=0}^{N} C_n{}^a \left|n\right\rangle, \qquad (8)$$

که در اینجا

$$C_n{}^a = \left[F(1+a^2)+2aN_0\right]^{-\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{n=0}^{N} \sqrt{\binom{N}{n}}\left[g(\lambda,n)\right]!\, z^n \left(1+a(-1)^n\right)\right]. \qquad (9)$$



شکل ۲. ضرایب بسط برای برهم‌نهی حالت‌های همدوس روی سطح کره بر حسب λ برای $a=-1$ و با $z=0/25$ و $N=3$. منحنی خط‌چین ضریب C_0، منحنی نقطه–خط‌چین ضریب C_1، منحنی نقطه‌چین ضریب C_2 و منحنی خطی ضریب C_3.

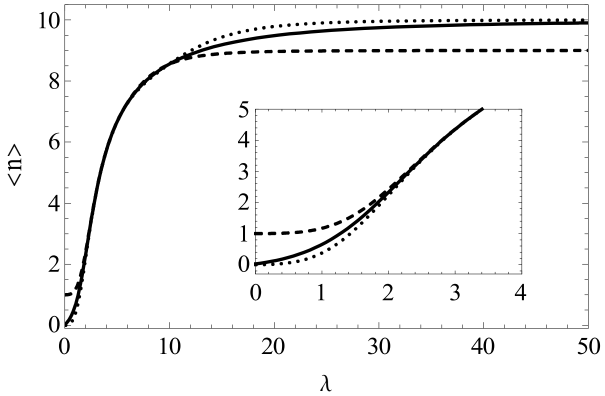
برای بررسی اثر انحنای فضا بر ضرایب برهم‌نهی شدهٔ $C_n{}^a$، در شکل‌های ۱ تا ۳ ضرایب $C_n{}^a$ را بر حسب λ برای $z=0/25$ و $N=3$ به ترتیب برای ۱، ۰، -1 $=a$ رسم کرده‌ایم. همان گونه که مشاهده می‌شود برای گربهٔ زوج، تنها ضرایب زوج و برای گربهٔ فرد نیز تنها ضرایب فرد وجود دارند. برای وضوح بیشتر، حالت‌های حدی را بررسی می‌کنیم. برای کره‌های با شعاع بسیار کوچک، $\lambda \to \infty$، در مورد $a=0$ داریم $C_n{}^0 \to \delta_{n,N}$. برای $a=1$ و $a=-1$ نیز ضرایب برهم‌نهی شدهٔ $C_n{}^a$، بسته به اینکه $C_N{}^a$ یا $C_{N-1}{}^a$ غیر صفر باشند، به $\delta_{n,N}$ یا به $\delta_{n,N-1}$ میل پیدا می‌کنند. بنابراین، در این حالت حدی داریم:

$$\begin{aligned} &\left|\phi\right\rangle_{a=0} \to \left|N\right\rangle, \\ &\left|\phi\right\rangle_{a=\pm1} \to \left|N\right\rangle \quad \text{یا} \quad \left|N-1\right\rangle \end{aligned} \qquad (10)$$

در بخش بعدی به بررسی ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های برهم‌نهی شده و مقایسهٔ آنها با حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره می‌پردازیم.

۴. ویژگی‌های اپتیک کوانتومی برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره

به منظور بررسی ویژگی‌های اپتیک کوانتومی، در این بخش شمار میانگین، پارامتر



شکل۴. شمار میانگین فوتون‌ها $\langle n\rangle$ بر حسب λ و با $z=۰/۰۵$ و $N=۱۰$. منحنی خط‌چین به ازای $a=-۱$، منحنی خطی به ازای $a=۰$ و منحنی نقطه‌چین به ازای $a=۱$. شکل میانی، بزرگ شدهٔ منحنی‌های فوق را در ناحیهٔ بین مقادیر ۰ تا ۴ نشان می‌دهد.

مندل[۱]، درجهٔ همدوسی[۲]، چلاندگی مؤلفهٔ کودراتوری[۳] و تابع ویگنر[۴] را برای برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره محاسبه می‌کنیم.

۴. ۱. آمار شمارش شمار میانگین فوتون‌ها

احتمال یافتن n فوتون در حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ $|\phi\rangle_a$ به صورت زیر به دست می‌آید [۱۸]،

$$P_a(n,N,z,\lambda)=\frac{B^2[1+a^2+2a(-1)^n]}{F}\binom{N}{n}\times\{[g(\lambda,n)!]\}^2\left(|z|^2\right)^n. \qquad (11)$$

همچنین شمار میانگین فوتون‌ها در این حالت برابر است با،

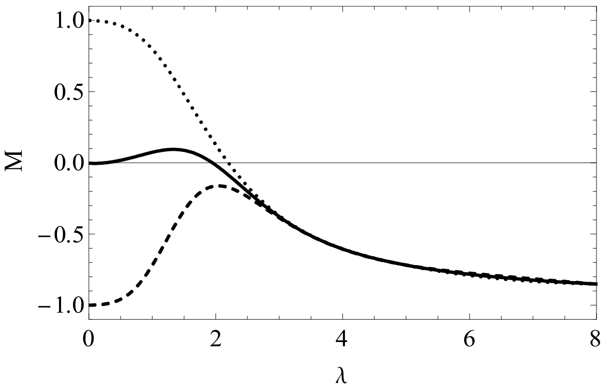
$$\begin{aligned}\langle\hat{n}\rangle_a&=\langle\phi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\phi\rangle_a\\&=\sum_{n=0}^{N} n\,P_a(n,N,z,\lambda)\\&=\frac{B^2[1+a^2+2a(-1)^n]}{F}\\&\quad\times\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\{[g(\lambda,n)!]\}^2 n|z|^{2n}.\end{aligned} \qquad (12)$$

۱. Mandel parameter

۲. Degree of coherence

۳. Quadrature squeezing

۴. Wigner function



شکل ۵. پارامتر مندل M بر حسب λ و با $z=۰/۰۵$ و $N=۱۰$. منحنی خط‌چین به ازای $a=-۱$، منحنی خطی به ازای $a=۰$ و منحنی نقطه‌چین به ازای $a=۱$.

در شکل ۴ شمار میانگین فوتون‌ها را برای حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ $|\phi\rangle_a$ بر حسب λ با $N=۱۰$ و $z=۰/۰۵$ و به ازای $a=-۱$، ۰، ۱ رسم کرده‌ایم. همان گونه که دیده می‌شود شمار میانگین فوتون‌ها، با وجود تفاوت به ازای λهای کوچک، با افزایش λ، برای حالت گربه زوج و حالت همدوس اولیه به سمت N و برای حالت گربه فرد به مقدار $N-۱$ میل می‌کند. همچنین حالت برهم‌نهی زوج نسبت به حالت همدوس اولیه با سرعت بیشتری به مقدار N میل می‌کند. علاوه بر این دیده می‌شود نتایج بالا با نتایج به‌دست آمده از شکل‌های ۳-۱ همخوانی دارد.

۴. ۲. پارامتر مندل

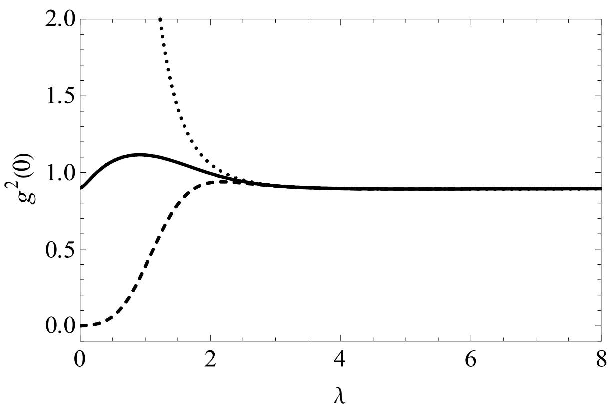
برای مطالعهٔ آمار فوتون‌های حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ $|\phi\rangle_a$ لازم است پارامتر مندل [۱۹] یعنی

$$M=\frac{\left((\Delta\hat{n})^2-\langle\hat{n}\rangle\right)}{\langle\hat{n}\rangle}, \qquad (13)$$

را مورد بررسی قرار دهیم. مقادیر مثبت، صفر و منفی پارامتر مزبور به ترتیب نشانگر آمار فراپواسونی[۵]، پواسونی و زیرپواسونی[۶] است. در شکل ۵ پارامتر مندل را برای حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ $|\phi\rangle_a$ بر حسب λ با $z=۰/۰۵$، $N=۱۰$ و

۵. Super-Poissonian

۶. Sub-Poissonian



شکل ۶. نمودار درجهٔ همدوسی $g^{2}(0)$ بر حسب λ و با $z=0.05$ و $N=10$. منحنی خط‌چین به ازای $a=-1$، منحنی خطی به ازای $a=0$ و منحنی نقطه‌چین به ازای $a=1$.

به ازای ۱، ۰، $a=-1$ رسم کرده‌ایم. همان‌گونه که از شکل مشخص است با گذار از حالت گربهٔ زوج به گربهٔ فرد، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می‌شود. به عبارت دیگر، تا آنجا که به آمار شمارش فوتون‌ها مربوط می‌شود، ویژگی‌های غیرکلاسیک حالت گربه فرد نسبت به گربه زوج تقویت می‌شود. نکتهٔ جالب توجه در نمودارها این است که برای λهای بزرگ، آمار شمارش فوتون‌ها در هر سه حالت گربهٔ زوج، گربهٔ فرد و حالت اولیه دارای سرشت زیر پواسونی یکسانی شده و رفتار غیرکلاسیکی مشابهی از خود نشان می‌دهند. به عبارت دیگر، برای فضاهای با خمیدگی زیاد، اثر انحنای فضای فیزیکی بر تأثیر برهم نهی حالت‌ها غلبه کرده و منجر به خاصیت غیرکلاسیکی یکسان می‌شود. این نتیجه با توجه به اینکه پارامتر مندل نشانگر افت و خیزهای تعداد کوانتوم‌های برانگیختگی نوسانگر است با نتیجهٔ به دست آمده از نمودارهای ۱ تا ۳ همخوانی دارد به عبارت دیگر مشاهده می‌شود که برای فضاهای با خمیدگی زیاد برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره به حالت عددی $|N\rangle$ یا $|N-1\rangle$ میل می‌کنند که برای آنها $\Delta n=0$ است. در نتیجه انتظار داریم پارامتر مندل برای هر سه حالت برهم‌نهی شده در حد انحناهای بزرگ به ۱- میل کند.

۴. ۳. درجهٔ همدوسی مرتبهٔ دوم

به منظور بررسی خواص غیرکلاسیکی حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ $|\phi\rangle_a$، درجه همدوسی مرتبهٔ دوم $g^{2}(0)$ [۱۸]،

$$g^{2}(0)=1+\frac{\left\langle(\Delta\hat{n})^{2}\right\rangle-\langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle^{2}}, \qquad (۱۴)$$

را محاسبه می‌کنیم. مقادیر $0\le g^{2}(0)<1$ هم ارز با تابع توزیع Pی منفی بوده و بنابراین حالت غیرکلاسیک و $g^{2}(0)\ge 1$ حالت کلاسیک را نشان می‌دهند [۱۴]. در شکل ۶ نمودار $g^{2}(0)$ را برای حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ $|\phi\rangle_a$ بر حسب λ با $z=0.05$ ، $N=10$ و به ازای $a=-1, 0, 1$ رسم کرده‌ایم. همان طور که از نمودارهای $g^{2}(0)$ مشاهده می‌شود، به ازای λهای کوچک، برهم‌نهی فرد کاملا غیرکلاسیک و برهم نهی زوج کاملا کلاسیک هستند. به ازای $a=0$ نیز، حالت همدوس اولیه در مواردی کلاسیک و در جاهایی نیز غیرکلاسیک است. برای درجهٔ همدوسی نیز، همانند پارامتر مندل، برای λهای بزرگ، هر سه حالت گربهٔ زوج، گربهٔ فرد و حالت اولیه به یک اندازه غیرکلاسیک می‌شوند.

این نتایج را به سادگی می‌توان از ارتباط پارامتر مندل (۱۳) و درجهٔ همدوسی مرتبهٔ دوم (۱۴)، یعنی $g^{2}(0)=1+\frac{M}{\langle\hat{n}\rangle}$، و مقایسهٔ شکل‌های ۵ و ۶ نیز به دست آورد. از آنجایی که همواره $\langle\hat{n}\rangle\ge 0$ است لذا انتظار داریم که اگر $M>0$ باشد پس $g^{2}(0)>1$ شود و اگر $M<0$ باشد آنگاه $g^{2}(0)<1$ شود. به عبارت دیگر، اگر حالت ما مطابق پارامتر مندل غیرکلاسیک (زیر پواسونی) باشد، دارای تابع توزیع Pی منفی ($0\le g^{2}(0)<1$) و در صورت کلاسیکی بودن (پواسونی بودن) حالت با توجه به پارامتر مندل، درجهٔ همدوسی مرتبهٔ دوم آن نیز نشانگر تابع توزیع Pی مثبت ($g^{2}(0)>1$) است. علاوه بر این، در مواردی که پارامتر مندل صفر باشد، $g^{2}(0)=1$ به دست آمده است.

۴. ۴. تابع ویگنر

توابع توزیع شبه‌احتمال جهت مطالعهٔ ویژگی‌های کوانتومی

بسیار مهم هستند. این توابع به سه دسته تقسیم می‌شوند، تابع شبه احتمالی P، تابع شبه احتمالی Q و تابع ویگنر W [۱۸]. یکی از روش‌های بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌ها استفاده از تابع توزیع ویگنر است. وجود جملات تداخلی در تابع ویگنر یا منفی شدن این تابع در بعضی از مناطق، نشان دهندهٔ غیرکلاسیکی بودن حالت‌ها در آن مناطق است. تابع توزیع ویگنر با استفاده از تابع موج حالت با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود [۲۰]،

$$W(x,p)=\int d\xi\,\psi^*(x+\frac{\xi}{2})\,\psi(x-\frac{\xi}{2})\,e^{-ip\xi}. \qquad (15)$$

برای به دست آوردن تابع ویگنر برای حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ $|\phi\rangle_a$، ابتدا تابع موج آن را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$\psi_a(x)=\langle x|\varphi\rangle_a=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{[F(1+a^2)+2aN_0]^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}}\times\sum_{n=0}^{N}\frac{\sqrt{\binom{N}{n}}\,H_n(x)\,g[\lambda,n]!\,z^n[1+a(-1)^n]}{\sqrt{n!}\times 2^{\frac{n}{2}}}. \qquad (16)$$

با جایگذاری تابع موج به دست آمده در رابطهٔ (۱۵) داریم،

$$W(x,p)=\frac{1}{[F(1+a^2)+2aN_0]\sqrt{\pi}}\int d\xi\,\Bigg\{e^{-\frac{1}{2}(x-\frac{\xi}{2})^2}\,e^{-\frac{1}{2}(x+\frac{\xi}{2})^2}\,e^{-ip\xi}\times\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sqrt{\binom{N}{n}}\,H_n(x+\frac{\xi}{2})\,g[\lambda,n]!\,z^n\,[1+a(-1)^n]}{\sqrt{n!}\times 2^{\frac{n}{2}}}\times\frac{\sqrt{\binom{N}{m}}\,H_m(x-\frac{\xi}{2})\,g[\lambda,m]!\,z^m\,[1+a(-1)^m]}{\sqrt{m!}\times 2^{\frac{m}{2}}}\Bigg\}. \qquad (17)$$

برای حل این انتگرال، تغییر متغیر

$$k=x+i\frac{\xi}{2}, \qquad (18)$$

را استفاده کرده و رابطهٔ (۱۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم،

$$W(x,p)=\int dk\,e^{-k^2}H_m(x+ip-k)H_n(x-ip+k)\times\frac{2e^{-(x^2+p^2)}}{[F(1+a^2)+2aN_0]\sqrt{\pi}}\times\sum_{n,m=0}^{N}\frac{\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{m}}\,g[\lambda,n]!\,g[\lambda,m]!\,z^{*m}\,[1+a(-1)^m]\,z^n[1+a(-1)^n]}{\sqrt{m!n!}\times 2^{\frac{n}{2}-\frac{m}{2}}}. \qquad (19)$$

سپس با استفاده از بسط کلی زیر برای چندجمله‌ای‌های هرمیت [۲۱]،

$$H_n(y+x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_{n-k}(y)(2x)^k, \qquad (20)$$

انتگرال باقی‌مانده در رابطهٔ (۱۹) به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\int dk\;e^{-k^2}H_m(x+ip-k)H_n(x-ip+k)=2\sum_{t,r}^{m,n}\binom{n}{r}\binom{m}{t}[2(x+ip)]^t\times[2(x-ip)]^r(-1)^{m-t}\int dk e^{-k^2}H_{n-r}(k)H_{m-t}(k). \qquad (21)$$

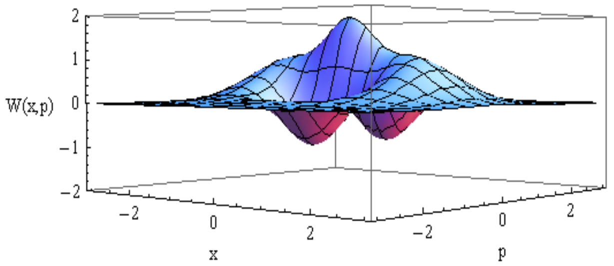
که با استفاده از رابطهٔ تعامد چندجمله‌ای‌های هرمیتی [۲۱]،

$$\int dk\,e^{-k^2}H_{n-r}(k)H_{m-t}(k)=\sqrt{\pi}\times 2^{n-r}(n-r)!\times\delta_{n-r,m-t}, \qquad (22)$$

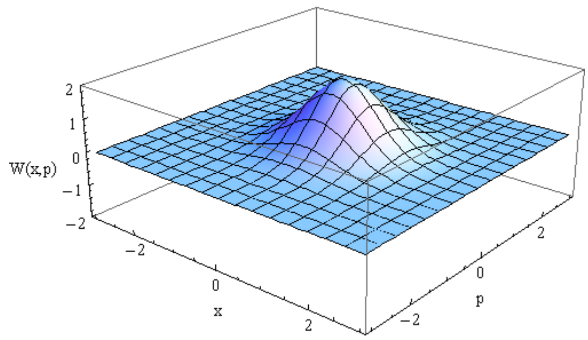
و بسط چندجمله‌ای‌های تعمیم یافتهٔ لاگر $L_n^{\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{x^k}{k!}$ [۲۲]، تابع ویگنر برای برهم‌نهی حالت‌های همدوس به صورت زیر به دست می‌آید،

$$W(x,p)=\frac{2e^{-(x^2+p^2)}}{[F(1+a^2)+2aN_0]}\times\sum_{n,m=0}^{N}z^nz^m(1+a(-1)^m)(1+a(-1)^n)\times\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{m}\frac{n!}{m!}}[x+ip]^{m-n}\times g[\lambda,n]!\;\;g[\lambda,m]!\,2^{(\frac{m}{2}-\frac{n}{2})}\;L_n^{m-n}[2x^2+p^2]. \qquad (23)$$

در شکل‌های ۷ تا ۹ تابع ویگنر حالت‌های برهم‌نهی شدهٔ $|\phi\rangle_a$ بر حسب x و p با $z=0/5$ و $N=3$ و به ترتیب برای



شکل ۷. تابع ویگنر $|\phi\rangle_a$ به ازای $a=۱$ بر حسب x و p با $z=۰/۵$ و $N=۳$.



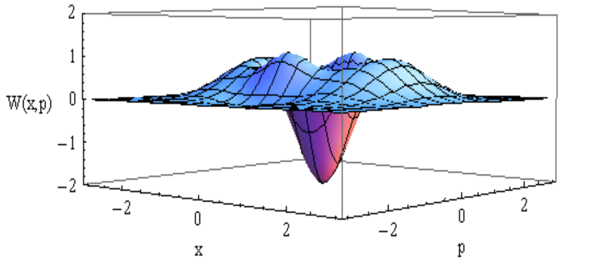
شکل۸. تابع ویگنر $|\phi\rangle_a$ به ازای $a=۰$ بر حسب x و p با $z=۰/۵$ و $N=۳$.

۱، ۰، $a=-۱$ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با برهم‌نهی حالت‌ها در نمودارها جملات تداخلی به وجود آمده است و همچنین در مناطق منفی شده است که این ویژگی‌ها برای حالت اولیه مشاهده نمی‌شود، پس با برهم‌نهی حالت‌ها، خواص غیر کلاسیکی آنها افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که گربهٔ فرد نسبت به گربهٔ زوج غیرکلاسیک‌تر است.

۴. ۵. چلاندگی کوادراتوری

در این بخش به بررسی نوفه‌های کوانتومی مولفه‌های کوادراتوری میدان نسبت به حالت‌های همدوس استاندارد می‌پردازیم. برای این منظور، عملگرهای کوادراتوری $\hat{x}_{۱a}$ و $\hat{x}_{۲a}$ را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر بر حسب عملگرهای تغییر شکل نیافتهٔ $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ تعریف می‌شوند [۱۸]

$$\begin{aligned}\hat{x}_{۱a} &= \frac{۱}{۲}\left(\hat{a}e^{i\varphi}+\hat{a}^\dagger e^{-i\varphi}\right),\\ \hat{x}_{۲a} &= \frac{۱}{۲i}\left(\hat{a}e^{i\varphi}-\hat{a}^\dagger e^{-i\varphi}\right).\end{aligned} \tag{۲۴}$$



شکل ۹. تابع ویگنر $|\phi\rangle_a$ به ازای $a=-۱$ بر حسب x و p با $z=۰/۵$ و $N=۳$.

با استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی میان $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ به رابطهٔ عدم قطعیت زیر می‌رسیم

$$\left(\Delta x_{۱a}\right)^۲\left(\Delta x_{۲a}\right)^۲ \geq \frac{۱}{۱۶}\left|\left\langle\left[\hat{x}_{۱a},\hat{x}_{۲a}\right]\right\rangle\right|^۲ = \frac{۱}{۱۶}. \tag{۲۵}$$

اکنون بنا به تعریف اگر برای حالت میدان داشته باشیم

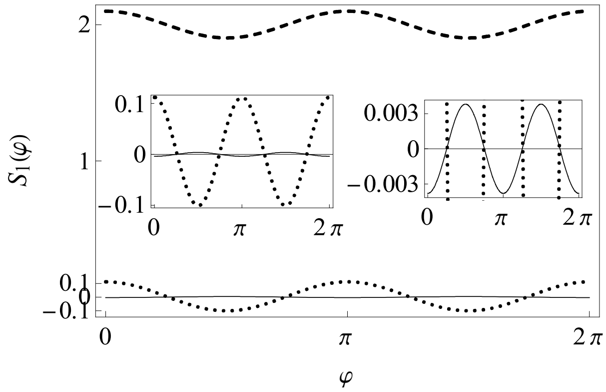
$$\left(\Delta x_{ia}\right)^۲ < \frac{۱}{۴}, \qquad (i=۱\ or\ ۲), \tag{۲۶}$$

یا به طور هم ارز

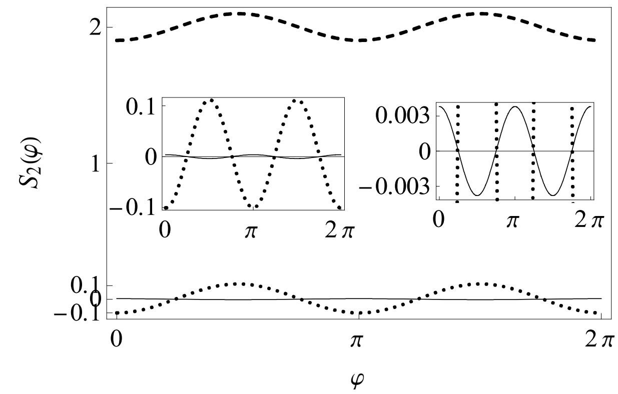
$$S_{ia} \equiv ۴\left(\Delta x_{ia}\right)^۲ - ۱ \ < \ ۰, \tag{۲۷}$$

آن‌گاه حالت مزبور یک حالت چلانده است. بنابراین، برای حالت چلانده افت و خیزهای کوانتومی یکی از مولفه‌های کوادراتوری میدان نسبت به مقدار مربوط به حالت با کمینهٔ حاصل ضرب نامعینی‌ها کاهش می‌یابد. این به بهای افزایش افت و خیزهای کوانتومی مولفهٔ کودراتوری دیگر میدان خواهد بود به طوری که اصل عدم قطعیت همچنان پابرجا است. حالت‌های چلاندهٔ میدان فاقد همتای کلاسیکی هستند و از این‌رو، آنها را حالت‌های غیرکلاسیکی می‌نامند.

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب $S_{۱a}$ و $S_{۲a}$ را برای حالت‌های $|\phi\rangle_a$ بر حسب φ با $z=۰/۰۵$، $N=۱۰$ به ازای ۱، ۰، $a=-۱$ رسم کرده‌ایم. در مقایسهٔ بین نمودارهای هر شکل مشاهده می‌شود که حالت گربهٔ زوج، $a=۱$، نسبت به حالت اولیه، علاوه بر یک تغییر فاز π، چلاندگی مولفه‌های کودراتوری آن افزایش یافته است. در مورد گربهٔ فرد، $a=-۱$، نیز چلاندگی اصلا وجود ندارد. همچنین، در مقایسهٔ بین نمودارهای $S_{۱a}$ و $S_{۲a}$ اختلاف فاز π مشاهده می‌شود.



شکل ۱۰. نمودار چلاندگی S_{1a} بر حسب فاز φ و با $z=$۰/۰۵ و $N=$۱۰. منحنی خط‌چین به ازای $a=-$۱، منحنی خطی به ازای $a=$۰ و منحنی نقطه‌چین به ازای $a=$۱ است. شکل‌های میانی، بزرگ شدهٔ منحنی‌های فوق را به ترتیب در ناحیهٔ بین مقادیر ۰/۱ تا ۰/۱− و ۰/۰۰۳ تا ۰/۰۰۳− نشان می‌دهند.



شکل ۱۱. نمودار چلاندگی S_{2a} بر حسب فاز φ و با $z=$۰/۰۵ و $N=$۱۰. منحنی خط‌چین به ازای $a=-$۱، منحنی خطی به ازای $a=$۰ و منحنی نقطه‌چین به ازای $a=$۱ است. شکل‌های میانی، بزرگ شدهٔ منحنی‌های فوق را به ترتیب در ناحیهٔ بین مقادیر ۰/۱ تا ۰/۱− و ۰/۰۰۳ تا ۰/۰۰۳− نشان می‌دهند.

۵. تولید فیزیکی

روش‌های نظری بسیاری برای تولید فیزیکی[۱] حالت‌های دلخواه در اپتیک کوانتومی وجود دارد [۱۶، ۲۳]. از جمله سامانه‌های پیشنهادی برای فراهم‌سازی یک حالت کوانتومی، سامانهٔ یون به دام افتاده است. پیشرفت‌های زیادی که اخیرا در زمینهٔ به دام اندازی و سردسازی توسط لیزر به دست آمده‌است، سبب به وجود آمدن چشم‌اندازهای جدیدی در این موضوع گردیده است. هنگامی که میدان‌های لیزری به یک یون به دام افتاده بتابد، یون با میدان برهم‌کنش کرده و بنابراین درجات آزادی داخلی و خارجی یون با همدیگر جفت می‌شوند. بنابراین، یک جفت‌شدگی ضعیف میان مدهای ارتعاشی یون و محیط خارجی سبب افزایش احتمال تولید و مشاهدهٔ حالت‌های غیرکلاسیکی کاملا پایدار می‌شود [۱۶].

در این بخش با استفاده از سامانهٔ یون در یک دام دو بعدی ناهمگن[۲]، طرحواره‌ای نظری برای تولید فیزیکی یک برهم‌نهی کلی از حالت‌های همدوس غیرخطی بر سطح کره ارائه می‌کنیم. در این روش که در مرجع [۲۴] برای تولید برهم نهی حالت‌های همدوس معمولی نیز استفاده شده است، در ابتدا حالت‌های داخلی و خارجی یون توسط برهم‌کنش با پرتوهای لیزری درهم‌تنیده[۳] می‌شوند. سپس نشان می‌دهیم در صورتی که حالت اولیهٔ حرکت ارتعاشی یون در یک حالت همدوس غیرخطی روی سطح کره باشد، با اندازگیری روی حالت داخلی سامانه، برهم‌نهی حالت‌های همدوس مورد نظر به دست می‌آید. یک یون دو ترازی درون یک دام دو بعدی با بسامدهای ارتعاشی υ_x و υ_y در راستاهای x و y در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دو باریکهٔ لیزری در راستاهای x و y به یون تابیده شود که با بسامد گذار یون در حالت بازآوایی باشد. در این‌صورت، هامیلتونی سامانهٔ مزبور به صورت زیر خواهد بود [۱۶، ۲۴]

$$H=\upsilon_x \hat{a}^\dagger \hat{a}+\upsilon_y \hat{b}^\dagger \hat{b}+\omega_\circ S_z +[\Upsilon E^-(x,y,t)\, S^- + H.c.]. \qquad (۲۸)$$

در این هامیلتونی، عملگرهای $\hat{a}^\dagger$ ($\hat{b}^\dagger$) و $\hat{a}$ ($\hat{b}$) عملگرهای خلق و فنای حرکت ارتعاشی یون در راستای x (y) بوده و $S^\pm$ عملگرهای بالا برنده و پایین آورندهٔ الکترونی یون[۴] و S_z از ماتریس‌های پائولی است. پارامتر Υ بیانگر تصویر عنصر

۱. Physical generation

۲. Two-dimensional anisotropic trap

۳. Entangled

۴. Electronic flip operators

ماتریسی عملگر بردار گشتاور دو قطبی یون در جهت بردار دامنهٔ میدان الکتریکی لیزر بوده و $\omega_\circ$ بسامد گذار است. $E^-(x,y,t)$ نیز بخش بسامد منفی میدان کلاسیکی تابشی بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned} E^-(x,y,t) &= E_x e^{i(\omega_\circ t - k_\circ x + \phi_x)} \\ &\quad + E_y e^{i(\omega_\circ t - k_\circ y + \phi_y)}, \end{aligned} \tag{۲۹}$$

که در آن ϕ_j و E_j $(j=x,y)$ به ترتیب، فاز و دامنهٔ میدان لیزری تابشی و $k_\circ$ بردار موج میدان است.

در رژیم جانبی تفکیک شده[1] هامیلتونی برهم‌کنشی لیزر–یون توسط مدل جینز–کامینگز[2] غیرخطی توصیف می‌شود [۱۶]. هامیلتونی مزبور در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر به دست می‌آید [۱۶، ۲۴]،

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= \sum_{k=0}^{\infty} [\Omega_x e^{-i\phi_x} e^{\frac{-\eta_x^2}{2}} \frac{(i\eta_x)^{2k}}{(k!)^2} \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^k \\ &\quad + \Omega_y e^{-i\phi_y} e^{\frac{-\eta_y^2}{2}} \frac{(i\eta_y)^{2k}}{(k!)^2} \hat{b}^{\dagger k} \hat{b}^k]\, S^+ + H.c., \end{aligned} \tag{۳۰}$$

که در آن $\Omega_j = 2E_j$ بسامدهای رابی و $\eta_j = \sqrt{\frac{k^2}{2M\upsilon_j}}$ پارامترهای لمب–دیک بوده که M نیز جرم یون است.

در ادامه فرض می‌کنیم که در مورد دام دو بعدی شرط $\upsilon_x << \upsilon_y$ برقرار باشد، به عبارت دیگر، دام به شدت غیرهمگن باشد. بنابراین، در رژیم لمب–دیک $(\eta_y << \eta_x << 1)$، با بسط η_x تا مرتبهٔ دوم و η_y تا مرتبهٔ صفرم در رابطهٔ (۳۰)، هامیلتونی برهم‌کنش یون و لیزر (۳۰) به صورت زیر به دست می‌آید،

$$H_{\text{int}} = [\Omega_x e^{-i j_x} (1 - \eta_x^2 \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \Omega_y e^{-ij_y}]\, S^+ + H.c.. \tag{۳۱}$$

در مرجع [۲۳] طرحواره‌ای فیزیکی برای تولید حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره، رابطهٔ (۴)، توسط حالت‌های تاریک حرکت ارتعاشی یون به دام افتاده معرفی شده است. نشان داده شده است که با تغییر بسامد رابی لیزرهای تابیده شده می‌توان حالت‌های همدوس بر روی کره‌های با خمیدگی‌های مختلف را تولید کرد. بنابراین، فرض می‌کنیم حالت داخلی اولیهٔ یون در حالت پایه و حالت اولیهٔ ارتعاشی یون $|\Psi_v(0)\rangle$ در حالت همدوس غیرخطی روی سطح کره فراهم سازی شده باشد

$$|\Psi_v(0)\rangle = |z\rangle_s = \sum_{n=0}^{N} C_n(\lambda)\, |n\rangle, \tag{۳۲}$$

که در آن داریم

$$C_n(\lambda) = F^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\binom{N}{n}} \left[g(\lambda,n) \right]! z^n |n\rangle. \tag{۳۳}$$

در ابتدا فرض می‌کنیم که لیزر فقط در راستای y تابیده $(\Omega_x = 0)$ و سبب برانگیخته شدن یون شود، در این صورت هامیلتونی (۳۰) به صورت زیر تبدیل خواهد شد،

$$H_y = \Omega_y e^{-i\phi_y} S^+ + H.c.. \tag{۳۴}$$

پس از گذشت زمان t، این برهم‌کنش سبب انتقال یون از حالت پایه به حالت زیر می‌شود،

$$|g\rangle \to p|g\rangle + q|e\rangle, \tag{۳۵}$$

که در آن p و q پارامترهای مختلطی به صورت زیر بوده که توسط دامنه و فاز میدان کلاسیکی قابل تنظیم هستند

$$p = \cos(t\Omega_y), \quad q = ie^{-i\phi_y} \sin(t\Omega_y). \tag{۳۶}$$

در ادامه اگر یون با میدان در راستاهای y و x همزمان برهم‌کنش کند و اگر فرض کنیم که $\Omega_x = \Omega_y = \Omega$ ، $\phi_x = \pi$ و $\phi_y = 0$ باشد، بنابراین هامیلتونی (۳۱) به شکل زیر به دست می‌آید

$$H_{\text{int}} = g\, \hat{a}^\dagger \hat{a}\, S^+ + H.c., \tag{۳۷}$$

که در آن $g = \Omega(\eta_x)^2$ است. در اثر این برهم‌کنش، حالت سامانه در زمان $t > 0$ به صورت زیر به دست خواهد آمد

$$\begin{aligned} |\Psi_v(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{N} C_n(\lambda) \{ [p\cos(ngt) - i\, q\sin(ngt)]\ |g\rangle \\ &\quad + [q\cos(ngt) - i\, p\sin(ngt)]\ |e\rangle \} |n\rangle. \end{aligned} \tag{۳۸}$$

---

1. Resolved sideband limit

2. Jaynes-Cummings

حال اگر یک اندازه‌گیری روی یون انجام داده و آن را در حالت برانگیختهٔ $\langle e|$ آشکار کنیم، سامانه در حالت زیر قرار خواهد گرفت،

$$\left|\Psi_v(t)\right\rangle = C\sum_{n=0}^{N} C_n(\lambda)[q\cos(ngt) - ip\sin(ngt)]\ |n\rangle, \quad (۳۹)$$

که در آن C ضریب بهنجارش است. در نهایت با توجه به معادلهٔ (۳۳) و جایگذاری آن در معادلهٔ بالا، برهم‌نهی کلی حالت‌های همدوس غیرخطی بر سطح کره به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\left|\Psi_v(t)\right\rangle = \frac{C}{2}\left[A\left|ze^{igt}\right\rangle_s + B\left|ze^{-igt}\right\rangle_s \right]. \quad (۴۰)$$

که در آن داریم

$$A = q - p, \quad B = q + p. \quad (۴۱)$$

در این‌صورت، اگر حالت ارتعاشی اولیهٔ یون در یک حالت همدوس روی سطح کره آماده سازی شده باشد، با انتخاب مناسب p و q می‌توان هر برهم‌نهی دلخواه از حالت‌های همدوس روی سطح کره را در زمان $t > 0$ تولید کرد.

۶. نتیجه‌گیری

با تعریف برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره، خواص غیرکلاسیکی حالت‌های مزبور بررسی شد. با مطالعهٔ درجهٔ همدوسی، پارامتر مندل و تابع ویگنر نشان داده شد که در فضاهای با خمیدگی کوچک، برهم‌نهی فرد باعث افزایش خواص غیرکلاسیکی نسبت به حالت همدوس اولیه می‌شود، در حالی که در برهم‌نهی زوج، خاصیت غیرکلاسیکی کاملا حذف می‌گردد. همچنین در بررسی کلی‌تر که برای پارامتر مندل و درجه همدوسی داشتیم، مشاهده کردیم که برای فضاهای با خمیدگی زیاد، اثر انحنای فضای فیزیکی بر تأثیر برهم نهی حالت‌ها غلبه کرده و منجر به خاصیت غیرکلاسیکی یکسان برای همهٔ حالت‌ها می‌شود. در مورد مولفه‌های کوادراتوری نیز مشاهده گردید که برهم‌نهی زوج باعث افزایش چلاندگی نسبت به حالت همدوس اولیه گردیده و برهم‌نهی فرد از خود چلاندگی نشان نمی‌دهد.

سپس با استفاده از بر هم‌کنش لیزر دو مدی در دو راستا با یون به دام افتاده، طرحواره‌ای نظری برای تولید فیزیکی یک برهم‌نهی کلی از حالت‌های همدوس روی سطح کره ارائه شد.

مراجع

1. E Shrodinger, *Die Naturwissenschaften* **14** (1926) 664.
2. F T Arecchi, E Courtens, R Gilmore, and H Thomas, *Phys. Rev.* A **6** (1972) 2211.
3. G S Agarwal, *Opt. Commun.* **42** (1982) 205.
4. A M Perelomov, *"Generalized Coherent States and Their Applications",* Springer, Berlin (1986).
5. ع مهدی‌فر، *"ساختار هندسی حالت‌های همدوس غیرخطی"*، پایان‌نامهٔ دکتری، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه اصفهان، (۱۳۸۶).
6. R Roknizadeh and M K Tavassoly, *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **37** (2004) 8111.
7. M Bagheri Harouni, R Roknizadeh, and M H Naderi, *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **42** (2009) 045403.
8. A Mahdifar, R Roknizadeh, and M H Naderi**,** *J. Phys.* A: Math. Gen. **39** (2006) 7003.
9. J Recamier, O Castanos, R Jauregui, and A Frank, *Phys. Rev.* A **61** (2000) 63808.
10. M A Ahmad and S T Liu, *Optik* **120** (2009**)** 68.
11. M S Kim, W Son, V Buzek, and P L Knight, *Phys. Rev.* A **65** (2002) 032323.
12. S L Braunstein, G M D Ariano, G J Millburn, and M F Sacchi, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 3486.
13. S L Braunstein and H J Kimble, *Phys. Rev.* A **61** (2000) 042302.
14. C H Bennett, G Brassard, and N D Mermin, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 557.
15. O Abbasi and M K Tavassoly, *Opt. Commun.* **283** (2010) 2566.
16. W Vogel and D G Welsch, *"Quantum optics"*, Wiley-VCH Verlag (2006).
17. L M Kuang, F B Wang, and Y G Zhou, *Phys. Lett.* A **183** (1993) 1.
18. M O Scully and M S Zubairy, *"Quantum optics",* Cambridge University Press, Cambridge (1997**).**
19. L Mandel and E Wolf, *"Optical Coherence and Quantum Optics",* Cambridge University Press, Cambridge (1995).
20. W P Schleich, *"Quantum Optics in Phase Space"*, Wiley-VCH Verlag, Berlin (2001).
21. Y Brychkov, *"Special Function"*, Computing Center of the Russian, Moscow (2008).
22. S Roman, "The Laguerre Polynomials", Academic Press, New York (1984).
23. A Mahdifar*,* W Vogel, Th Richter, R Roknizadeh, and M H Naderi*, Phys. Rev.* A **78** (2008) 63814.
24. S B Zheng and G-C Guo, *Eur. Phys. J.* D **1** (1998) 105.