

maleki@alzahra.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۵/۱۸ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۱۰/۸)

()

()

:

است، مورد مطالعه قرار گرفته است [۱]. نمونه‌هایی از آن هم در علوم غیر خطی و هم در کاربردهای فن آوری آشکار می‌شود. که از آن جمله می‌توان به رشد کریستالی^۴، جابه‌جایی سیال در محیط متخلخل^۵، رسوب الکتروشیمیایی^۶، انتشار شعله^۷ و غیره اشاره کرد [۲ و ۳]. مسئله سافمن-تیلور، عموماً به طرح‌های انگشتی وشکسان در سلول هل-شاوا اشاره دارد [۴]. ناپایداری سافمن-تیلور زمانی روی می‌دهد که سیالی با وشکسانی کمتر از طریق حفره‌ای به لایه نازکی از سیالی دیگر

دینامیک سطح مشترک حدود نیم قرن است که با نگاشت همدیس بررسی می‌شود. این مسئله در ابتدا با مدل‌های طرح‌های انگشتی وشکسان^۱ و انجماد درختی^۲ شروع شد و مطالعات بعدی در علم مواد شامل مهاجرت الکتریکی حفره در فلزات^۳ بود. مسئله سافمن-تیلور به مدت چهار دهه به طرز وسیعی به عنوان الگوی اصلی در مسئله مرز-متحرک که مربوط به کلاس گسترده حل‌های ناپایداری‌های ریخت شناسی و شکل گیری الگوی فصل مشترک در فیزیک‌های غیر تعادلی

۴. Crystal growth

۵. Fluid displacement in porous media

۶. Electrochemical deposition

۷. Flame propagation

۱. Viscouse fingering

۲. Dendritic solidification

۳. Void electro-migration

اگر $f'(z_0)$ مخالف صفر باشد اندازه dw برابر است با $|f'(z)||dz|$ و شناسه^۲ آن برابر است با مجموع شناسه^۲ dz و شناسه^۲ $f'(z)$. یعنی اگر $f'(z)$ مخالف صفر باشد، هر خطی که از نقطه^۲ z می‌گذرد در صفحه^۲ w به اندازه^۲ شناسه^۲ $f'(z)$ می‌چرخد. چون این نتیجه برای هر خطی که از z می‌گذرد برقرار است. بنابراین زاویه^۲ بین دو خط تحت هر تبدیلی با فرض $f'(z) \neq 0$ ثابت می‌ماند. به این گونه تبدیل‌ها که در آنها زاویه حفظ می‌شود، هم‌مدیس^۳ گفته می‌شود.

نگاشت هم‌مدیس به دلیل کاربردش در حل معادله^۲ لاپلاس از اهمیت خاصی برخوردار است. تعریف نگاشت هم‌مدیس روشی برای حل معادله^۲ لاپلاس در هندسه‌های مختلف ارائه می‌دهد. این نگاشت برای سیالات تراکم‌ناپذیر که در معادله^۲ لاپلاس صدق می‌کنند به کار می‌رود. فرض می‌کنیم نگاشت هم‌مدیس $w = f(z, t)$ وجود دارد که به وسیله^۲ آن ناحیه‌ای از صفحه^۲ z به ناحیه‌ای از صفحه^۲ w نگاشته می‌شود. حل معادله^۲ لاپلاس در ناحیه^۲ مذکور با شرایط مرزی داده شده در صفحه^۲ z ، به روش تحلیلی امکان‌پذیر نیست ولی در صفحه^۲ w حل این معادله ساده است. تحلیل ریاضی ساختارهای ریز نوعاً مشکل است ولی در دو بعد با استفاده از آنالیز مختلط تعدادی از مسائل قابل بررسی هستند. مسائل مرز آزاد متحرک^۴ با استفاده از نگاشت هم‌مدیس به خوبی فرمول‌بندی می‌شوند. این مدل ابتدا با طرح‌های انگشتی و شکسان و انجام درختی [۷] شروع شد و مطالعات بعدی در علم مواد شامل مهاجرت الکتریکی حفره در فلزات [۸ و ۹] بود. در دهه^۲ گذشته نگاشت‌های هم‌مدیس برای مسائل تصادفی مانند انبوهش محدود به پخش [۱۰ و ۱۱] و شکست دی الکتریک^۵ [۱۲ و ۱۳] نیز استفاده شده است. معادله^۲ حاکم بر پدیده‌های ذکر شده، معادله^۲ پخش است که این معادله در تقریب شبه-مانا به معادله^۲ لاپلاس تبدیل می‌شود. در این مسائل متحرک بودن مرز باعث پیچیده‌تر شدن حل معادله^۲

با شکسانی بیشتر (که بین دو صفحه^۲ موازی و شفاف نگهداری می‌شود) تزریق شود. در این سلول که به سلول هل-شاو معروف است، توزیع فشار از معادله^۲ لاپلاس پیروی می‌کند.

در حالت کلی دینامیک سیالات از معادله^۲ ناویر-استوکس پیروی می‌کند. حل این معادله در حالت کلی بسیار پیچیده است. به همین خاطر هل-شاو^۱ (۱۹۴۱-۱۸۵۴) مطالعات زیادی بر روی سیالات به منظور یافتن معادلاتی با جواب‌های قابل دسترس در شرایط ساده‌تر انجام داد.

او در سال ۱۸۹۸ سلول معروف خود را اختراع کرد، برای این کار از صفحات شیشه‌ای که با فاصله مناسبی روی یکدیگر قرار گرفته بودند (۰/۰۲in) و جریان بین آنها در تمام سرعت‌ها لایه‌ای بود، استفاده کرد [۵]. در این سلول خطوط جریان قابل مشاهده می‌باشند [۶]. معادله^۲ پیچیده^۲ ناویر-استوکس که مربوط به حرکت سیال تراکم‌ناپذیر است در این سلول به روابط ساده زیر تبدیل می‌شوند:

$$U = -\left(\frac{d^2}{12\eta}\right)\nabla p, \quad \nabla \cdot U = 0, \quad \nabla^2 p = 0 \quad (1)$$

که در آن U سرعت سیال، p فشار، d فاصله^۲ بین دو صفحه^۲ شیشه‌ای و η و شکسانی سیال است.

نکته^۲ جالب در مورد این معادلات این است که در دو بعد می‌توان آنها را با استفاده از نگاشت هم‌مدیس حل کرد، ابزاری که ما از آن برای مطالعه^۲ نقش‌های انگشتی در سلول هل-شاو استفاده کردیم.

فرض می‌کنیم تابع $w = f(z)$ ، یک تابع تحلیلی باشد. در این صورت هر نقطه از صفحه^۲ z با تبدیل $f(z)$ به یک نقطه در صفحه^۲ w نگاشته می‌شود. تغییر dz حول نقطه^۲ z معادل تغییر dw حول نقطه^۲ w است.

$$z = x + iy \quad (2)$$

۲. Argument

۳. Conformal

۴. Moving free boundary

۵. Dielectric breakdown

۱. Hele-shaw

$$v = -\left(\frac{k}{\mu}\right)\nabla p, \quad (3)$$

که k ضریب تراوایی و μ ضریب وشکسانی است. این معادله در واقع همان معادله هل-شاو است. فشار روی مرز سیال دوم تقریباً ثابت است. در تقریب شبه-مانا، فشار در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

نقش طرح‌های انگشتی وشکسان به خوشه‌های تولید شده با مدل انبوهش محدود به پخش (DLA) شباهت دارد. گرچه معادله حاکم بر دو مسئله یکسان است ولی تفاوت‌هایی وجود دارد. در طرح‌های انگشتی وشکسان مرز نقش به طور پیوسته رشد می‌کند و تمام نقاط مرز همزمان جابه‌جا می‌شوند. در صورتی که در مدل DLA رشد تصادفی است و ذرات تک تک اضافه می‌شوند.

یک سلول هل-شاو با عرض $w = 2\pi$ در جهت محور y با گستردگی در جهت محور x ، که فاصله دو صفحه به اندازه b می‌باشد در نظر می‌گیریم. میدان سرعت متوسط یک جریان پتانسیل دو بعدی است از قانون داریسی پیروی می‌کند [۴]

$$v = \nabla \phi, \quad (4)$$

که در آن پتانسیل سرعت با فشار با رابطه $\phi = -\left(\frac{b^2}{12\mu}\right)p$ مرتبط است. μ وشکسانی است و فرض می‌شود که سلول افقی باشد و آثار گرانش وجود نداشته باشد. اگر سیال را تراکم ناپذیر فرض کنیم ($\nabla \cdot v = 0$) و معادله لاپلاس به صورت زیر به دست می‌آید [۱۶ و ۱۷]:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (5)$$

شرایط مرزی در فصل مشترک به صورت زیر هستند [۴]:

$$\phi|_{\Gamma} = d_0 k|_{\Gamma}, \quad (6)$$

$$v_n = \hat{n} \cdot \nabla \phi, \quad (7)$$

$$(\nabla \phi)_n = \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right]_n, \quad (8)$$

که Γ نشان دهنده مرز متحرک یا فصل مشترک و k انحنا است. \hat{n} بردار واحد عمود بر سطح و d_0 کشش سطحی بدون بعد است که با رابطه زیر بیان می‌شود:

لاپلاس می‌شود. نگاشت‌های همدیس وابسته به زمان ابزاری مناسب برای بررسی این پیچیدگی‌ها است. از نگاشت‌های وابسته به زمان در تحلیل رشد لاپلاسی با دینامیک پیوسته استفاده می‌شود. همچنین با استفاده از نگاشت همدیس مکرر نقش‌های فراکتالی (دینامیک گسسته) تولید شده و خواص مقیاس بندی آنها مطالعه شده است. در ادامه به تعدادی از مسائل فیزیکی این فرآیند اشاره می‌شود.

در این پدیده انجماد با یک بذر در دمای $T < T_{\text{melt}}$ که در مایع با دمای $T > T_{\text{melt}}$ قرار دارد شروع می‌شود. اگر آهنگ انجماد آهسته باشد می‌توان تقریب شبه-مانا را به کار برد و مسئله به حل معادله لاپلاس برای مرز متحرک تبدیل می‌شود که در این حالت مرز با سرعتی متناسب با ∇T حرکت خواهد کرد.

سیستم از یک الکترولیت شامل یون‌های فلزی مثبت با چگالی کم و یک الکتروود منفی تشکیل شده است. در هر لحظه یک یون مثبت به صورت تصادفی با الکتروود برخورد کرده و به واسطه جاذبه الکتریکی به آن می‌چسبد و شکل نهایی الکتروود یک ساختار شاخه-شاخه است. معادله حاکم بر این پدیده نیز معادله پخش می‌باشد. که در تقریب شبه-مانا به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود. که در آن C ، چگالی یون‌های فلزی مثبت می‌باشد. و آهنگ رشد با ∇C متناسب است [۱۴].

سافمن^۱ و تیلور^۲ یک سیستم شبه دو بعدی را بررسی کردند که در آن سیالی با وشکسانی کمتر به درون صفحه شیشه‌ای مسطح (سلول هل-شاو) که با سیالی با وشکسانی بیشتر پر شده است، تزریق می‌شود. مطابق قانون داریسی که سرعت سیال را در محیط متخلخل برحسب گرادیان فشار به دست می‌دهد [۱۵]، مرز سیال با سرعت زیر حرکت می‌کند:

۱. Saffman

۲. Taylor

ایده این است که دینامیک‌ها را از نظر معادله تکامل یافته برای نگاشت وابسته به زمان $f(w, t)$ توصیف کنیم.

معادله تکاملی برای نگاشت به صورت زیر می‌باشد [۴ و ۱۶]:

$$\partial_t f(w, t) = w \partial_w f(w, t) A \left[\frac{\operatorname{Re}(w \partial_w \Phi(W))}{|w \partial_w f(w, t)|^2} \right], \quad (10)$$

$A[h]$ یک عملگر صحیح است که بر تابع حقیقی تعریف شده روی دایره واحد عمل می‌کند، $h(\phi)$ ، با یک بسط فوری به صورت زیر بیان می‌شود [۱۶]:

$$h(\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{in\phi} + a_n^* e^{-in\phi}], \quad (11)$$

به منظور به دست آوردن یک معادله برای نگاشت پس از معادله (۱۰) باید پتانسیل مختلط $\Phi(w)$ را به $f(w)$ ربط دهیم. این کار به طور کلی نه تنها به هندسه بلکه به حرکت نسبی چهارچوب مرجع نیز بستگی دارد. به این خاطر است که هنگامی که ما یک دیسک (منطقه محدود) را به یک منطقه نامتناهی نگاشت می‌دهیم نقاط تکینگی برای نگاشت تا بینهایت ($w=0$) اتفاق می‌افتد. برای هندسه نوار نیمه نامتناهی در کانال با $w=2\pi$ ساختار کلی برای $f(w)$ به شکل زیر می‌باشد:

$$f(w, t) = -\ln w + \tilde{f}(w, t), \quad (12)$$

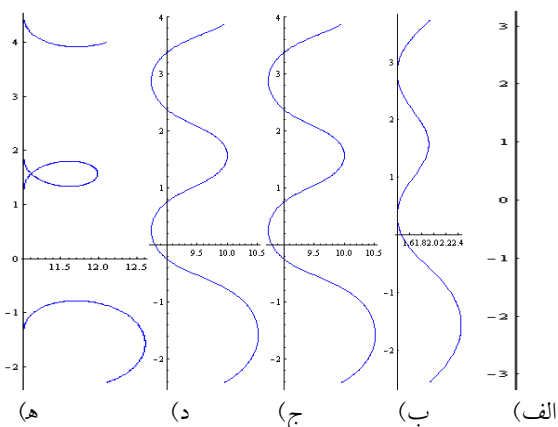
که $\tilde{f}(w)$ یک تابع تحلیلی در دیسک واحد است. فصل مشترک Γ بین دو سیال، تصویری از دایره واحد ($w = e^{i\phi}$) تحت نگاشت $f(w, t)$ می‌باشد و داریم:

$$\Gamma(t, \phi) = f_t(e^{i\phi}), \quad (13)$$

نگاشت $f(w, t)$ در زمان t فصل مشترک $\Gamma(t, \phi)$ را بیان می‌کند. در صفحه w (داخل دیسک واحد) قسمت حقیقی تابع تحلیلی $\Phi(w)$ در مرز ($w = e^{i\phi}$) با $\phi(w) = d \cdot k(\phi)$ معین می‌شود. برای این که تابع Φ تحلیلی شود، قسمت موهومی آن باید مزدوج همساز قسمت حقیقی آن باشد. بنابراین از رابطه پواسون استفاده می‌کنیم. در چهارچوب آزمایشگاه و با در نظر گرفتن $v_{\infty} = 1$ ، پتانسیل مختلط دارای رابطه زیر است:

$$\Phi_L(w) = -\ln w + d \cdot A[k], \quad (14)$$

جمله اول تابع Φ حل برای پتانسیل در غیاب کشش سطحی



شکل ۱. طرح‌های انگشتی در حالت فصل مشترک مسطح با در نظر گرفتن

عامل زمان برای رشد انگشت‌ها به ترتیب برای الف) $\{t=0, \alpha', \alpha''=0\}$ ،

ب) $\{t=1, \alpha'=0.7, \alpha''=0.5\}$ (ج) $\{t=2, \alpha'=0.8, \alpha''=0.5\}$

د) $\{t=3, \alpha'=0.82, \alpha''=0.5\}$ و ه) $\{t=4, \alpha'=0.85, \alpha''=0.6\}$.

به ازای $|\alpha(t)| \leq 1$ ، شکل‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول هستند اما در شکل ه) این شرط برآورده نشده است. بنابراین از نظر فیزیکی قابل قبول نیست.

$$d_0 = \frac{\sigma b^2 \pi^2}{12 w^2 \mu v_{\infty}}, \quad (9)$$

که در آن v_{∞} سرعت سیال در بینهایت است. w عرض کانال است که معمولاً 2π در نظر گرفته می‌شود و μ و شکسانی سیال رانده شده می‌باشد. معادله (۶) جهش فشار لاپلاس برای یک فصل مشترک خمیده در تعادل محلی و معادله (۷) شرط پیوستگی حرکت فصل مشترک است. در اینجا فرض می‌کنیم شرایط مرزی روی دیواره‌های جانبی تناوبی است. سه معادله (۵ تا ۷) به طور کامل مسئله را مشخص می‌کنند.

هندسه دو بعدی به همراه زمینه‌های مربوطه به صورت هماهنگ و واضح نشان می‌دهند که صورت بندی متغیر مختلط بسیار مفید است. به ویژه استفاده از تکنیک‌های نگاشت همدیس برای فرمول بندی مسئله بسیار مفید می‌باشد [۴]. برای این کار نگاشت همدیس $z = f(w)$ یک منطقه مرجع در صفحه w را تعریف کنیم. برای مثال می‌توان به نگاشت دیسک واحد $|w| \leq 1$ ، به منطقه اشغال شده به وسیله سیال و شکسان در صفحه مختلط $z = x + iy$ اشاره کرد (شکل (۱))، به گونه‌ای که دایره واحد $w = e^{i\phi}$ به رابط بین دو سیال نگاشته شود. تابع نگاشت شامل تمام اطلاعات هندسی مربوط به رابط می‌باشد.

این حل‌ها از تکنیکی‌های زمان محدود آزاد می‌باشند و بنابراین فصل مشترک پیوسته هموار است [۲۰ و ۲۱]. نگاشت‌های تعریف شده با معادلات (۱۹)، (۲۰) یا ترکیبی از هر دو، حل‌های معادله (۱۸) هستند. به این معنی که دینامیک حاکم بر مسئله به مجموعه متناهی از پارامترهای ظاهر شده در معادله نگاشت کاهش می‌یابد. محدوده‌ای از α_j که از نظر فیزیکی معنی دار است به صورت $|\alpha_j| \leq 1$ است (فضای فاز را متراکم می‌کند). حل N لگاریتمی معادله (۲۰) شامل شرایط اولیه‌ای است که نوک انگشت با یک زیر مجموعه از α_j رشد می‌کند [۲۲]. شکل تحلیلی نگاشت تنها به تعداد محدودی از پارامترهای وابسته به زمان برای توصیف تحول زمانی نیازمند می‌باشد.

هدف ما پیدا کردن حل‌های صریح هموار (بدون نقاط تکین زمان محدود) است که این حل‌ها شامل سه نوع فیزیکی: فصل مشترک مسطح، طرح‌های انگشتی منفرد، طرح‌های انگشتی دوتایی متشکل از تکرار حل طرح‌های انگشتی منفرد (دو انگشت برابر) می‌باشند.

ساده‌ترین کلاس از حل‌ها که نیاز به این سه دسته را برآورده می‌کند از نظر فرمول بندی نگاشت همدیس به صورت زیر است [۲۳]:

$$f(w, t) = -\ln w + d(t) + (1-\lambda) \ln(1-\alpha(t)w) + (1-\lambda) \ln(1+\alpha(t)^* w), \quad (21)$$

که در آن $\alpha(t) = \alpha'(t) + i\alpha''(t)$ است. این رابطه به طور کلی دو انگشت متفاوت سیال با وشکسانی کم که در سیالی با وشکسانی زیاد نفوذ می‌کنند را بیان می‌کند. این انگشت‌ها متقارن هستند و پیشروی ندارند [۱۶ و ۱۷]. انگشت‌ها به صورت متقارن در طول دو محور ثابت حرکت می‌کنند اما این حالت هیچ محدودیت ضروری را معرفی نمی‌کند. به خصوص درک این که چنین تقارنی از رقابت طرح‌های انگشتی در مسئله منظم جلوگیری نمی‌کند، اهمیت دارد.

حالت $\alpha'(t) = 0$ متعلق به طرح‌های انگشتی منفرد با شکلی

می‌باشد. k عملگر انحنا است که با توجه به تابع نگاشت به صورت زیر داده می‌شود:

$$k = -\frac{1}{|\partial_\phi f|} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial_\phi^2 f}{\partial_\phi f} \right). \quad (15)$$

در چهارچوب متحرک تابع پتانسیل مختلط به صورت زیر می‌باشد [۱۵]:

$$\Phi_M(w) = -\tilde{f}(w) + d_s A[k]. \quad (16)$$

اگر ما معادله (۱۰) را مزدوج کنیم و آن را در $w \partial_w f(w, t) = i \partial_\phi f(\phi, t)$ ضرب کنیم و قسمت حقیقی آن را بگیریم و آن را برای $w = e^{i\phi}$ مشخص کنیم، معادله تکامل یافته‌ای برای نگاشت به صورت زیر به دست می‌آوریم [۱۶]:

$$\operatorname{Re} \left(i \partial_\phi f(\phi, t) \partial_t f^*(\phi, t) \right) = 1 - d_s \partial_\phi H_\phi[k], \quad (17)$$

رابطه بالا برای چهارچوب آزمایشگاهی می‌باشد و برای چهارچوب در حال حرکت رابطه زیر را داریم:

$$\operatorname{Re} \left(i \partial_\phi f(\phi, t) \left[1 + \partial_t f^*(\phi, t) \right] \right) = 1 - d_s \partial_\phi H_\phi[k]. \quad (18)$$

به استثنای حالت کلی حل مسئله سافمن-تیلور در بقیه جاهای این مقاله از چهارچوب مرجع در حال حرکت استفاده می‌کنیم. دو معادله (۱۷) و (۱۸) از نظر حل پذیر بودن سخت هستند. برای حالت $d_s = 0$ ، کلاس‌های عمومی از حل‌های صریح از معادلات فوق شناخته شده هستند. در این جا دو خانواده اصلی از حل‌ها که در فضا متراکم هستند مورد مطالعه می‌گیرند [۱۶]. از یک طرف نگاشت چند جمله‌ای به صورت زیر می‌باشد:

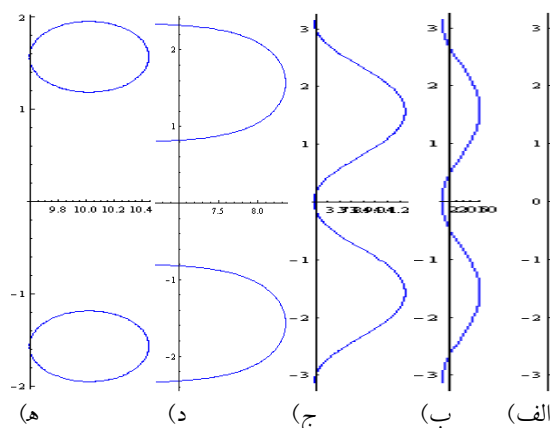
$$f(w, t) = -\ln w + d(t) + \sum_{j=1}^N a_j(t) w^j, \quad (19)$$

معادله بالا به صورت عمومی موجب تکینگی در نوک انگشت می‌شود [۱۸ تا ۲۰].

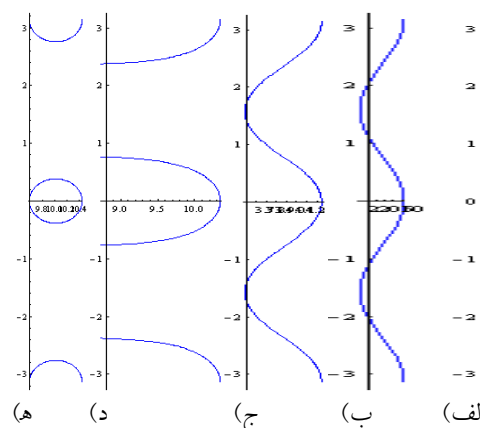
از طرف دیگر، یک کلاس عمومی حل به شکل زیر است:

$$f(w, t) = -\ln w + d(t) + \sum_{j=1}^N \gamma_j \ln(1 - \alpha_j(t)w), \quad (20)$$

که γ_j ثابت‌های حرکت با محدودیت $\sum_{j=1}^N \gamma_j = 2(1-\lambda)$ می‌باشند که در آن λ کسری از کانال است که با انگشت‌ها اشغال شده‌اند. در این مورد برای همه مقدارهای حقیقی از γ_j ،



شکل ۳. طرح‌های انگشتی دوتایی یکسان با در نظر گرفتن عامل زمان برای رشد انگشت‌ها به ترتیب الف) $\{t=0, \alpha'=0\}$ و ب) $\{t=1, \alpha'=0.5\}$ و ج) $\{t=2, \alpha'=0.85\}$ و د) $\{t=3, \alpha'=1\}$ و ه) $\{t=4, \alpha'=1.2\}$. به ازای $|\alpha(t)| \leq 1$ ، شکل‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول هستند اما در شکل ه) این شرط برآورده نشده است. بنابراین از نظر فیزیکی قابل قبول نیست.



شکل ۲. طرح‌های انگشتی منفرد با در نظر گرفتن عامل زمان برای رشد انگشت به ترتیب برای زمان‌های الف) $\{t=0, \alpha''=0\}$ و ب) $\{t=1, \alpha''=0.5\}$ و ج) $\{t=2, \alpha''=0.85\}$ و د) $\{t=3, \alpha''=1\}$ و ه) $\{t=4, \alpha''=1.2\}$. به ازای $|\alpha(t)| \leq 1$ ، شکل‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول هستند اما در شکل ه) این شرط برآورده نشده است. بنابراین از نظر فیزیکی قابل قبول نیست.

متقارن است که در این حالت $\alpha'' \rightarrow 1$ است. حالت $\alpha''(t) = 0$ متعلق به دو انگشت یکسان است وقتی $\alpha' \rightarrow 1$ باشد. برای $|\alpha(t)| \ll 1$ معادله (۲۱) یک اختلال سینوسی از فصل مشترک سطح را توصیف می‌کند. λ یک ثابت حرکت است و مقادیری حقیقی در بازه $[1, 0]$ می‌گیرد. در واقع λ کسری از کانال است که به وسیله انگشت‌های مهاجم اشغال می‌شود [۱۶ و ۱۷].

طرح‌های انگشتی دوتایی نا برابر به ازای زمان‌های متفاوت و در نتیجه $\alpha(t)$ متفاوت در شکل‌های زیر در محیط کامپیوتر رسم شده‌اند، که به ترتیب برای الف) $\{t=0, \alpha', \alpha''=0\}$ و ب) $\{t=1, \alpha'=0.7, \alpha''=0.4\}$ و ج) $\{t=2, \alpha'=0.8, \alpha''=0.5\}$ و د) $\{t=3, \alpha'=0.82, \alpha''=0.5\}$ و ه) $\{t=4, \alpha'=0.85, \alpha''=0.6\}$ رسم شده‌اند.

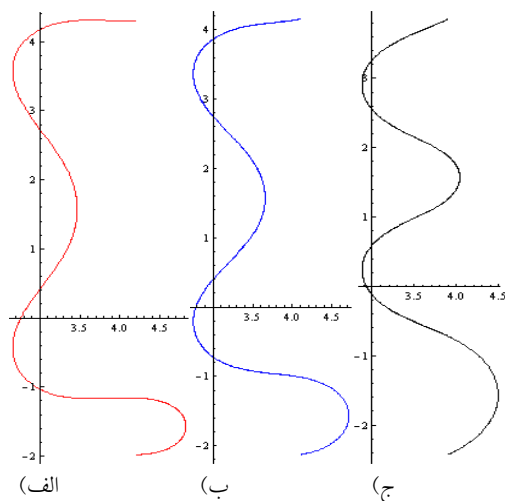
همان طور که در شکل ۱ دیده می‌شود به ازای $|\alpha(t)| \leq 1$ ، شکل‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول هستند اما در شکل ۱ ه) این شرط برآورده نشده است. بنابراین از نظر فیزیکی قابل قبول نیست [۱۶ و ۱۷].

در این طرح‌های انگشتی $\alpha' = 0$ می‌باشد بنابراین با گذشت زمان مقدار α'' زیاد می‌شود. برای رسم شکل از زمان‌های متفاوت و در نتیجه α'' های متفاوت استفاده می‌کنیم. که به ترتیب برای زمان‌های الف) $\{t=0, \alpha''=0\}$ و ب) $\{t=1, \alpha''=0.5\}$ و ج) $\{t=2, \alpha''=0.85\}$ و د) $\{t=3, \alpha''=1\}$ و ه) $\{t=4, \alpha''=1.2\}$ شکل‌ها رسم شده‌اند. نتایج در شکل ۲ آمده‌اند.

در این طرح انگشتی $\alpha'' = 0$ می‌باشد. بنابراین با گذشت زمان مقدار α' زیاد می‌شود و برای رسم شکل از زمان‌های متفاوت در نتیجه α' های متفاوت استفاده می‌کنیم.

در شکل ۳، شکل‌ها به ترتیب برای زمان‌های الف) $\{t=0, \alpha'=0\}$ و ب) $\{t=1, \alpha'=0.5\}$ و ج) $\{t=2, \alpha'=0.85\}$ و د) $\{t=3, \alpha'=1\}$ و ه) $\{t=4, \alpha'=1.2\}$ رسم شده‌اند.

به ازای z های مختلف در معادله (۲۰) و اعمال شرط حاکم بر



شکل ۵. رقابت بین دو انگشت نا برابر را برای $\alpha(t) = 0.85 + 0.4i$ ، (الف) برای طرح‌های انگشتی دوتایی قبل از اعمال رشد و (ب) با اعمال رشد $\varepsilon = 0.2$ و (ج) با اعمال رشد $\varepsilon = 0.3$ نشان می‌دهد. با افزایش مقدار ε انگشتی که جلوتر است بیشتر پیشروی می‌کند.

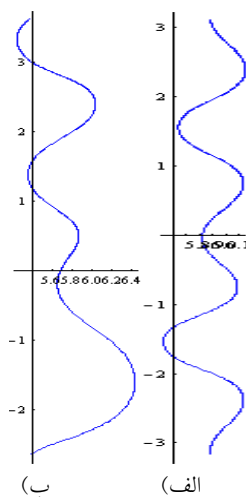
با معرفی $\varepsilon \neq 0$ چهره فاز به طور چشمگیری تغییر می‌کند. این اختلال نشان می‌دهد که در رقابت در نهایت کدام انگشت زنده خواهد ماند.

در شکل ۵ برای $\alpha(t) = 0.85 + 0.4i$ با اعمال $\varepsilon = 0.2$ و $\varepsilon = 0.3$ می‌توانیم رقابت موفقیت‌آمیز بین دو انگشت را نمایش دهیم.

نوع دیگری از اختلال را در اینجا مورد بررسی قرار می‌دهیم که شامل یک جمله لگاریتمی اضافه به تابع نگاشت دو انگشتی غیر متقارن به صورت زیر می‌باشد:

$$f(w, t) = -\ln w + d(t) + (1-\lambda) \ln(1-\alpha_1(t)w) + (1-\lambda) \ln(1-\alpha_2(t)w) + 2(\lambda-\lambda_s) \ln(1-\delta(t)w) \quad (23)$$

برای $\delta \leq 1$ جمله لگاریتمی اضافه یک تغییر شکل کوچک دلخواه فصل مشترک بین دو سیال را تعریف می‌کند. با این حال می‌توان نشان داد که اثر عبارت اضافی در زمان طولانی مهم است. هنگامی که δ به صورت یکنواخت با زمان رشد می‌کند، یک تغییر در محدوده کسر اشغال شده از کانال به وسیله انگشت‌ها، از λ به λ_s تولید می‌کند.



شکل ۴. (الف) سه انگشت وشکسان به ازای زمان $t=3$ و $\alpha_1 = 0.2 + 0.89i$ ، $\alpha_2 = 0.84 + 0.52i$ و $\alpha_3 = 0.96 - 0.4i$ (ب) چهار انگشت وشکسان در زمان $t=3$ و $\alpha_1 = 0.3 + 0.93i$ و $\alpha_2 = 0.83 - 0.2i$ ، $\alpha_3 = 0.85 - 0.5i$ و $\alpha_4 = 0.95 - 0.95i$.

ثابت حرکت γ_j ، می‌توان تعداد زیادی انگشت را به دست آورد. به عنوان مثال طرح انگشتی سه تایی و طرح انگشتی چهارتایی با اعمال شرایط فوق رسم می‌گردند.

برای طرح سه انگشتی وشکسان در زمان $t=3$ و $\alpha_1 = 0.2 + 0.89i$ ، $\alpha_2 = 0.84 + 0.52i$ و $\alpha_3 = 0.96 - 0.4i$ شکل (الف) را داریم. برای طرح چهار انگشتی وشکسان در زمان $t=3$ و $\alpha_1 = 0.3 + 0.93i$ ، $\alpha_2 = 0.83 - 0.2i$ و $\alpha_3 = 0.85 - 0.5i$ و $\alpha_4 = 0.95 - 0.95i$ شکل (ب) را رسم کرده‌ایم.

در این جا یک اختلال معرفی می‌کنیم که تقارن انگشت را بهم نمی‌زند اما احتمال پیشروی انگشت را بیان می‌کند. این نوع اختلال ویژگی جالبی دارد که رقابت موفقیت‌آمیز یک انگشت را بیان می‌کند. ایده ایجاد اختلال در مدل حداقل با معرفی ضرایب مختلط به شکل زیر می‌باشد [۱۶ و ۱۷]:

$$f(w, t) = -\ln w + d(t) + (1-\lambda+i\varepsilon) \ln(1-\alpha(t)w) + (1-\lambda-i\varepsilon) \ln(1+\alpha(t)^* w) \quad (22)$$

می‌توان نشان داد که پارامتر کوچک ε یک ثابت حرکت است که بیانگر سیستم دینامیکی جدید با ابعاد مشابه می‌باشد.

می‌کنیم [۱۶]. که $v_{\infty} = 1$ می‌باشد. سرعت U به λ ، کسر پر شده از کانال با عرض w توسط انگشت‌ها، با عبارت $U = \frac{1}{\lambda}$ مرتبط می‌باشد. برای راحتی نماد کشش سطحی بدون بعد را به صورت $d_* = \frac{\sigma b^2 \pi^2}{12Uw^2}$ تعریف می‌کنیم. در این شرایط معادله تکامل یافته (۱۰) به صورت زیر می‌شود:

$$\operatorname{Re}(i\partial_t f^* \partial_\phi f) = 1 - Ud_* \partial_\phi H_\phi[k], \quad (24)$$

که در آن $H_\phi[k]$ تبدیل هیلبرت می‌باشد. نقطه شروع ما برای انتخاب مسئله معادله (۲۴) است. یعنی:

$$-U \frac{dy}{d\phi} = 1 - Ud_* \partial_\phi H_\phi[k] \quad (25)$$

که در آن از این عبارت که $\partial_t f^* = U = \frac{1}{\lambda}$ استفاده کرده‌ایم. از معادله فوق نسبت به متغیر ϕ انتگرال‌گیری می‌کنیم که این کار اجازه می‌دهد ناپیوستگی‌های پرش از y به عنوان فاصله بین انگشت‌ها حساب شود. بنابراین داریم:

$$-Uy(\phi) = \phi - Ud_* H_\phi[k] + c(\phi), \quad (26)$$

که $c(\phi)$ یک تکه ثابت است. در حالت یک انگشتی $c(\phi)$ تنها ثابت در تمام بازه ϕ می‌باشد. برای حالت دو انگشتی، $c(\phi)$ دو مقدار در دو بازه (ϕ_1, ϕ_2) و (ϕ_3, ϕ_4) می‌گیرد. دو مقدار به اندازه مقدار محدود $\pi(U-1)$ با یکدیگر تفاوت دارند [۲۶] و [۲۷]. بعد از تبدیل هیلبرت معادله (۲۶) و استفاده از معادلات مربوط به تبدیل هیلبرت به دست می‌آوریم:

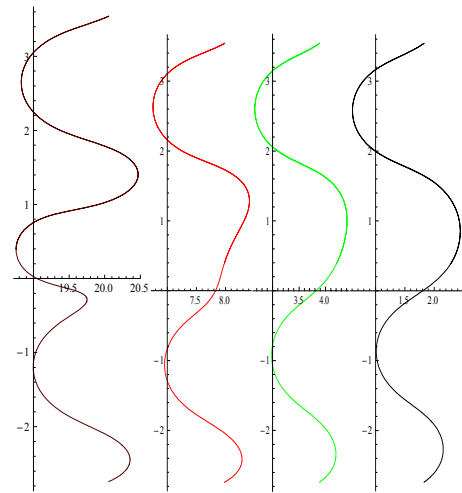
$$-d_* k + x(\phi) = x_*(\phi), \quad (27)$$

$$y(\phi) + \phi = \text{const} + H_\phi[x]. \quad (28)$$

که در آن معادله دوم چیزی جز بیان تحلیلی از $\tilde{f}(w) = f(w) + \ln w$ نیست. k انحنا است که به نگاهی از طریق رابطه زیر مربوط می‌شود:

$$k = -\frac{1}{|\partial_\phi f|} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial_\phi^2 f}{\partial_\phi f} \right), \quad (29)$$

$x_*(\phi)$ ، حل برای حالت با کشش سطحی می‌باشد. برای حالت طرح‌های انگشتی منفرد، طرح‌های انگشتی سافمن-تیلور با عرض λ به صورت زیر اصلاح می‌شود:



شکل ۶. تغییر عرض انگشت برای دو انگشت نامتقارن برای $\alpha_1(t) = 0.5 - 0.788i$ و $\alpha_2(t) = -0.88 + 0.4i$ قبل از اضافه کردن اختلال و بعد از آن به ازای زمان‌های مختلف و در نتیجه افزایش مقدار δ ، با مقادیر (د) ۰.۹۹، (ج) ۰.۶، (ب) ۰.۲ و (الف) قبل از اختلال، تغییر عرض انگشت‌ها را از ۱.۲ به ۱.۳ داریم.

بی‌ثباتی کسر اشغال شده به علاوه یک نقطه تکین در بی‌نهایت مخصوص مورد دو انگشتی نیست بلکه کاملاً عمومی است. قابل توجه است که اتفاقاً این باعث می‌شود که هیچ امتیازی برای $\lambda = \frac{1}{p}$ به عنوان یک حالت ممتاز نباشد، به خاطر این که هیچ دلیلی برای انتخاب عرض انگشت خاص در حالتی که از کشش سطحی صرف‌نظر کرده‌ایم وجود ندارد [۲۴ و ۲۵].

برای ضرایب حقیقی از لگاریتم‌ها ما دوباره یک زنجیره از نقاط ثابت مربوط به λ_0 داریم. به ازای $\alpha_1(t) = 0.5 - 0.788i$ و $\alpha_2(t) = -0.88 + 0.4i$ ، قبل از اضافه کردن اختلال و بعد از آن به ازای زمان‌های مختلف و در نتیجه افزایش مقدار δ ، با مقادیر (د) ۰.۹۹، (ج) ۰.۶ و (ب) ۰.۲، تغییر عرض انگشت‌ها را از ۱.۲ به ۱.۳ داریم. همان‌طور که در نمودارهای در شکل ۶ دیده می‌شود در قسمت (ج) تغییر شکل رابط به خاطر نزدیک شدن مقدار δ به مقدار یک، کامل‌ترین حالت را دارا است.

در این جا مسئله را در چهارچوب مرجع آزمایشگاه فرمول‌بندی

در زیر شکل‌هایی که از معادلات (۳۰ تا ۳۶) به دست می‌آیند را در محیط کامپیوتر در شکل‌های (۷ تا ۹) به تصویر کشیده‌ایم. برای این منظور ابتدا شکل‌های مربوط به معادله مرتبه صفر از معادلات (۳۳-۳۵) یعنی حالت‌های با کشش سطحی صفر را در شکل ۷ با استفاده از x_0 و y_0 مربوط به انگشت مورد نظر، برای حالت طرح‌های انگشتی منفرد، دو انگشتی، سه انگشتی و چهار انگشتی رسم می‌کنیم. شکل ۷ حاصل کار را نشان می‌دهد.

همان‌طور که در شکل‌های ۸ و ۹ دیده می‌شود، با افزایش مقدار d_0 نقش طرح‌های انگشتی ثانویه بزرگتر می‌شود. با توجه به معادله (۹) کشش سطحی بدون بعد با وشکسانی نسبت عکس دارد. به این دلیل در سلول هل-شاو، هر چه وشکسانی سیال اولیه (سیال با وشکسانی بیشتر) بیشتر باشد d_0 آن کوچکتر و در نتیجه طرح‌های انگشتی ثانویه کوچکتری ایجاد می‌کند. در شکل برای سیال اولیه (سیال وشکسان تر) از دو سیال آب و گلیسیرین در دمای اتاق استفاده شده است. چون وشکسانی گلیسیرین از آب بیشتر است در شکلی که در آن آب ماده اولیه (سیال با وشکسانی بیشتر) است، d_0 بزرگتر و در نتیجه طرح‌های انگشتی ثانویه بزرگتری را نسبت به شکلی که در آن گلیسیرین سیال اولیه (سیال با وشکسانی بیشتر) می‌باشد، می‌بینیم.

در این بخش اثر وشکسانی بر طرح‌های انگشتی را بررسی می‌کنیم. در شکل ۱۰ وشکسانی را در یک محدوده تغییر می‌دهیم و سپس طرح‌های انگشتی را در این محدوده و برای ابتدا و انتهای بازه وشکسانی رسم کرده‌ایم. مشاهده می‌کنیم که با افزایش وشکسانی طرح‌های انگشتی اضافه کاهش می‌یابد و دلیل آن تأثیر وشکسانی بر کشش سطحی بدون بعد است.

در این قسمت برای بیان تکامل انگشت‌های اضافه از معادله

$$x_0(\phi) = 2(1-\lambda) \ln \left(2 \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right), \quad (30)$$

$$y_0(\phi) = -\lambda(\phi + const)$$

برای حالت دو انگشتی داریم [۲۶ و ۲۷]:

$$x_0(\phi) = (1-\lambda) \ln \left(2 \left| \sin \phi - \cos(p\pi) \right| \right), \quad (31)$$

که $p = \frac{\lambda_1}{\lambda}$ است و $y_0(\phi) = -\lambda(\phi + c(\phi))$ می‌باشد. این رابطه کلاس دو پارامتری از حل‌ها را نتیجه می‌دهد که ما آن را در معادله (۲۱) مدل حداقل نامیدیم.

در نهایت، ما آنالیزها را به ساختارهای N -انگشتی تعمیم

می‌دهیم. که نتیجه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$x_0(\phi) = \frac{2}{N} (1-\lambda) \ln \left(2^N \prod_{i=1}^N \sin \left(\frac{\phi - \phi_i}{2} \right) \right), \quad (32)$$

که $\phi_i = [(2j-1)/N - P_j] \pi$, ($j = 1, 2, 3, \dots$) می‌باشد و

$$p_j = \frac{\lambda_j}{\lambda} \text{ است، با این قید که } \sum_{j=1}^N p_j = 1 \text{ باشد.}$$

همان‌طور که در مرجع [۲۸] اشاره شده است، طرح اختلالی

برای انگشت شدگی‌ها به صورت زیر می‌باشد:

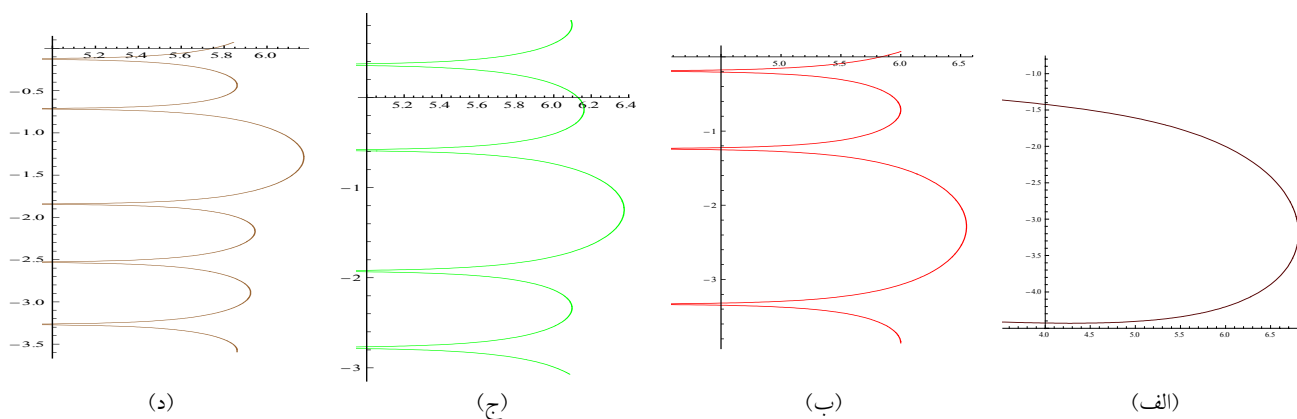
$$x(\phi) = \sum_n x_n(\phi) d_0^n = x_0(\phi) + d_0 x_1(\phi) + \dots, \quad (33)$$

$$y(\phi) = \sum_n y_n(\phi) d_0^n = y_0(\phi) + d_0 y_1(\phi) + \dots, \quad (34)$$

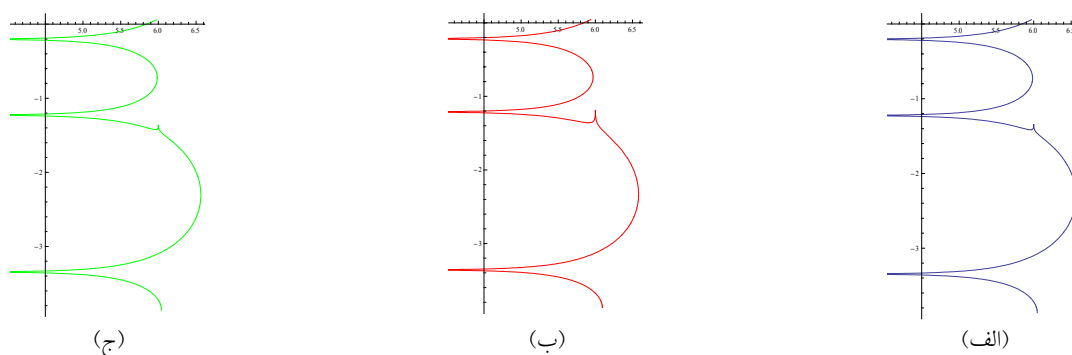
$$f(x) = Ut + x(\phi) + iy(\phi). \quad (35)$$

در حقیقت در مرتبه اول، $x_1(\phi) = k_0$ و $y_1 = H_\phi[x_1]$ می‌باشد. که k_0 انحناء برآورد شده از حل مرتبه صفر می‌باشد. در مرتبه‌های بعدی روابط بین پارامترها داده شده است. نقش منحصر به فرد کشش سطحی در پدیده انگشت شدگی، مسئول انتخاب این سازوکار است [۱۶]. و برای انحناء داریم:

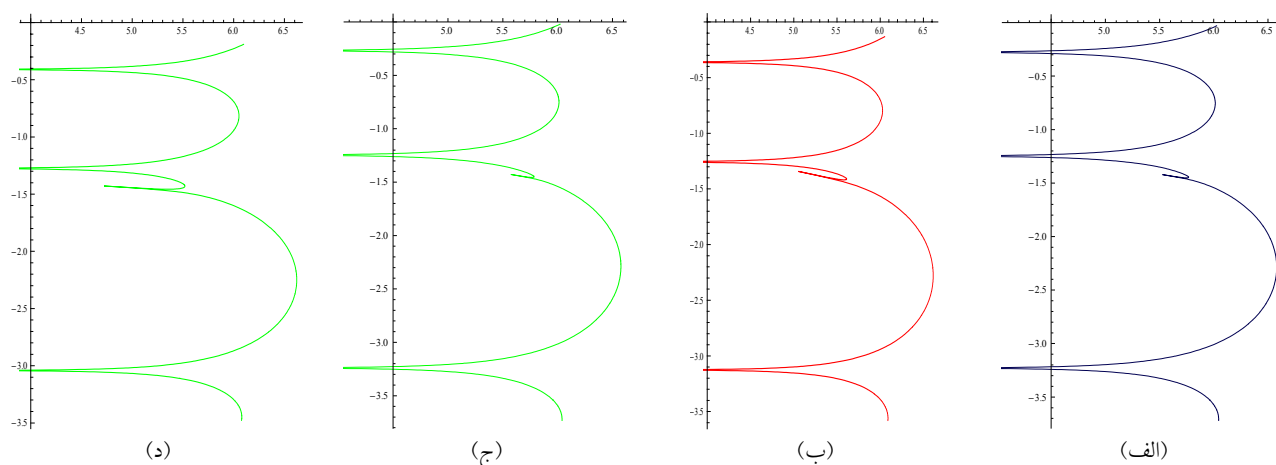
$$k(\phi) = k_0(\phi) + d_0 \frac{\partial_\phi y_0}{|\partial_\phi f_0|^2} \frac{d^2 x_1}{d\phi^2} - d_0 \frac{\partial_\phi x_0}{|\partial_\phi f_0|^2} \frac{d^2 H_\phi[x_1]}{d\phi^2} + \dots \quad (36)$$



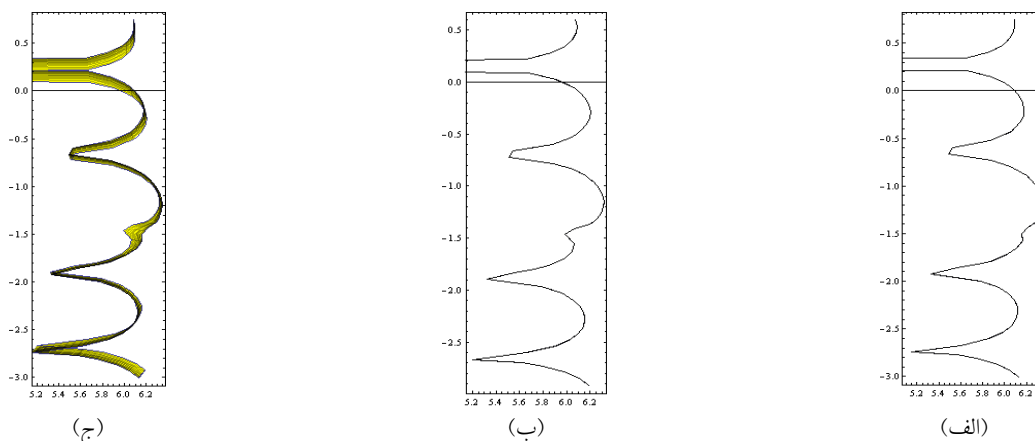
شکل ۷. الف) طرح‌های انگشتی منفرد (ب) انگشت دو تایی (ج) سه انگشتی (د) چهار انگشتی برای حالت با کشش سطحی، مرتبه صفرم. این شکل‌ها بر اساس روابط ذکر شده x_0 و y_0 مشخص شده برای انگشت‌ها رسم شده‌اند.



شکل ۸. الف) انگشت دو تایی با $d_0 = 0.01$ ، ب) انگشت دو تایی با $d_0 = 0.02$ و ج) انگشت دو تایی با $d_0 = 0.09$. با توجه به شکل‌ها برای d_0 بزرگتر، نقش طرح انگشتی ثانویه بزرگتر می‌باشد.

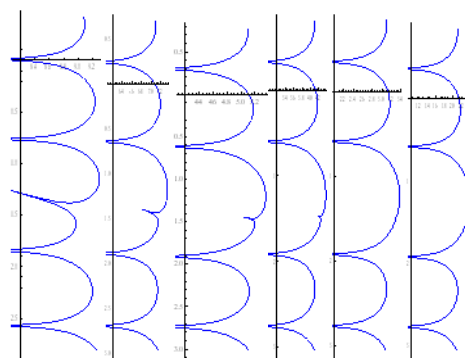


شکل ۹. الف) انگشت دوتایی با $d_0 = 0.01$ با اعمال رشد $\epsilon = 3$ ، ب) انگشت دوتایی با $d_0 = 0.01$ با اعمال رشد $\epsilon = 9$ ، ج) انگشت دوتایی با $d_0 = 0.02$ با اعمال رشد $\epsilon = 3$ و د) انگشت دوتایی با $d_0 = 0.02$ با اعمال رشد $\epsilon = 9$. با اعمال رشد یکسان، انگشت ثانویه با d_0 بزرگتر، رشد بیشتری دارد و با داشتن d_0 یکسان در دو مورد (ج) و (د) با افزایش عامل رشد، انگشت ثانویه بیشتر رشد می‌کند.



شکل ۱۰. الف) انگشت سه تایی در حد وشکسانی ۰/۹۴ و ب) در حد وشکسانی ۰/۴ و ج) اثر تغییر وشکسانی در محدوده $\{0.4, 0.94\}$ ، با در نظر گرفتن یک محدوده وشکسانی مشاهده می‌شود که با کاهش وشکسانی کشش سطحی بدون بعد افزایش یافته و نقش طرح انگشتی ثانویه رشد بیشتری می‌یابد.

در شکل ۱۱ این روند تکامل انگشت اضافه از چپ به راست برای $d_0 = 0.009$ و $N = 3$ مشخص شده است:



شکل ۱۱. انگشت ثانویه از چپ به راست برای $d_0 = 0.009$ و $N = 3$ به وسیله اعمال اختلال رشد به صورت تابعی از زمان تکامل می‌یابد. در واقع از چپ به راست با گذشت زمان، افزایش مقدار اختلال رشد و در نتیجه تکامل انگشت ثانویه مشاهده می‌شود.

در نهایت می‌توان گفت که ما در این کار با استفاده از نگاشت همدیس توانستیم طرح‌های انگشتی وشکسان در سلول مستطیلی هل-شاو را با استفاده از دو فرمول بندی متفاوت، ترسیم نماییم و اهمیت کشش سطحی را در ایجاد نقش‌های انگشت ثانویه مشاهده کنیم. سافمن و تیلور برای فرمول بندی طرح‌های انگشتی وشکسان از مقدار بسیار کوچک کشش سطحی صرف نظر کردند. به همین خاطر آنها مجموعه‌ای از حل‌های پیوسته را به دست آوردند که در حل آنها پدیده‌هایی چون رشد و رقابت انگشت‌ها به درستی بیان نشده بود. به همین علت از اختلال‌هایی برای جبران کمبود d_0 استفاده شد. این اختلال‌ها شامل اختلال رشد و اختلال تغییر عرض انگشت‌ها می‌باشند. اختلال رشد نشان می‌دهد که در رقابت بین انگشت‌ها در نهایت کدام انگشت برنده می‌شود و اختلال مربوط به تغییر عرض انگشت‌ها باعث تغییر عرض انگشت‌ها از مقدار λ به مقدار دلخواه λ_i می‌گردد. با اعمال این اختلالات اگر چه فرمول بندی اولیه مسئله کامل‌تر می‌شد ولی این فرمول بندی برای ایجاد نقش‌های انگشت‌های ثانویه ناقص می‌باشد. دلیل این امر حذف کشش سطحی در معادلات بود. این مطلب بیانگر اهمیت نقش کشش سطحی در

مربوط به سه انگشتی همراه با کشش سطحی استفاده نموده‌ایم:

$$f(x) = \frac{t}{\lambda} + \frac{\gamma}{N} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \log \left(\gamma^N \left| \prod_{i=1}^N \sin \left(\frac{\phi - \phi_i}{\gamma} \right) \right| \right) + d_0 (1 - \lambda + i\varepsilon(t)) (3\varphi) + \gamma i (-\lambda\varphi) + i d_0 (1 - \lambda + i\varepsilon(t)) \times \left(-2 \log \left| \gamma \sin \left(\frac{\varphi}{\gamma} \right) \right| \right). \quad (37)$$

در معادله (۳۷) تعداد انگشت‌ها N ، $(1 - \lambda + i\varepsilon(t))$ اختلال رشد و d_0 بیانگر کشش سطحی بدون بعد می‌باشد. با استفاده از اختلال رشد به صورت تابعی از زمان توانستیم رشد انگشت‌های اضافه را با زمان به دست آوریم.

جملات بیشتری از معادله انحنا و استفاده از تبدیل هیلبرت این جملات در معادلات نگاشت، انگشت‌های اضافه بیشتری ایجاد می‌گردد.

مایلم از دکتر شاهین روحانی بابت مشاوره‌های بی دریغشان صمیمانه سپاسگزاری کنیم. همچنین باید از حمایت‌های دانشگاه الزهرا که این کار در آنجا انجام شد قدردانی کنیم.

خوشه‌های کاتوره‌ای تولید شده با نگاشت همدیس"

پایان‌نامه دکتری، دانشگاه صنعتی شریف.

15. T E Faber, "Fluid Dynamics For Physicists" Press Syndicate of the University of Cambridge (1995).
16. J Casademunt and F X Magdaleno, *Physics Reports* **337** (2000) 1.
17. E Paune, F X Magdaleno, and J Casademunt, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 056213
18. B Shraiman and D Bensimon, *Physical Review A* **30** (1984) 2840.
19. S K Sarkar, *Physical Review A* **31** (1985) 3468.
20. S D Howison, *Journal of Fluid Mechanics* **167** (1986) 439.
21. S P Dawson and M Mineev-Weinstein, *Physica D* **73** (1994) 373.
22. B I Shraiman, *Physical Review Letters* **56** (1986) 2028.
23. F X Magdaleno and J Casademunt, *Physical Review E* **57** (1998) R3707.
24. J Casademunt and F X Magdaleno, *Physical Review Letters* **81** (1998) 5950.
25. R Almgren, *Physical Review Letters* **81** (1998) 5951.
26. F X Magdaleno and J Casademunt, *Physical Review E* **60** (1999) R5013.
27. F X Magdaleno and J Casademunt, in preparation.
28. J W McLean and P G Saffman, *Journal of Fluid Mechanics* **192** (1981) 455.

مسئله طرح‌های انگشتی وشکسان است. اعمال مرتبه‌های مختلف از کشش سطحی باعث ایجاد نقش‌های طرح‌های انگشتی بیشتر و در نتیجه تکامل پدیده ایجاد طرح‌های انگشتی می‌شود، به طوری که ما با اعمال توامان این اختلال‌ها توانستیم تشکیل انگشت ثانویه را مشاهده کنیم که با این روش قبلاً مشاهده نشده بود. شکل‌های به دست آمده تا مرتبه اول اختلال با نمونه‌های اولیه مشاهده شده طرح‌های انگشتی در آزمایشگاه تطابق نسبتاً خوبی دارند. برای به دست آوردن نمونه‌های کاملتر از این پدیده (شامل انگشت‌های بیشتر)، پیشنهاد این است که با در نظر گرفتن

1. P G Saffman and G Taylor, "The Penetration of a Fluid into a Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Fluid" *Proceeding the Royal of Society A* **245** (1958) 312.
2. H P Pelce "Dynamics of curved fronts, perspectives in physics", Academic Press, New York (1988).
3. D A Kessler, J Koplik, and H Levine, *Advanced Physics* **37** (1988) 255.
4. D Bensimon, L Kadanoff, S Liang, B I Shraiman, and C Tang, *Review of Modern Physics* **58** (1986) 1.
5. P Coussot, *Journal of Fluid Mechanics* **380** (1999) 363.
6. A Vasilev, "Hele-Shaw Flows: Historical Overview", University of Bergen, Norway (2007), <http://robson.birs.ca/~07w5008/vasiliev.pdf>
7. L M Cummings, Y E Hohlov, S D Howison, and K Kornev, *Journal of Fluid Mechanics* **378** (1999) 1.
8. T Yoshikawa and A M Balk, *Physical Review Letters A* **251** (1999) 184.
9. D Crowdy, *Journal Application of Mathematica* **10** (1999) 623.
10. M B Hastings, *Physical Review E* **55** (1997) 135.
11. M B Hastings and L Levitov, *Physica D* **116** (1998) 244.
12. L Niemeyer, L Pietronero, and H J Wiesmann, *Physical Review Letters* **52** (1984) 1033.
13. M B Hastings, *Physical Review Letters* **87** (2001) 175502.

۱۴. فاطمه محمدی، (۱۳۸۹) "بررسی رفتار مقیاس‌بندی