

farinaz@ipm.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۱/۱۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۱۲/۲۷)

عبارت‌اند از SIS^1 [۷-۵] و SIR^2 [۱۱-۸] می‌باشند. شایعه نیز همانند بیماری یکی از عناصر اصلی در روابط انسان‌ها با هم، به قدمت سوالات بشر از پیرامون اطراف خود، بوده است. شایعه سریع منتشر می‌شود، قابل دیدن نیست، کنترل آن مشکل است و چون می‌تواند اثرات مخربی داشته باشد، قابل چشم‌پوشی نیست. شایعه را می‌توان تحت عنوان آلودگی ذهن تعبیر کرد. مدل اصلی پخش شایعه اولین بار توسط دلی و کندل^۳ معرفی شده است [۱۲ و ۱۳]. یکی دیگر از مدل‌های مهم پخش شایعه که منشعب از مدل DK

در سال‌های اخیر، مدل سازی با استفاده از شبکه‌ها بدون شک یکی از راه‌های مطلوب محققان برای نمایش سیستم‌های اجتماعی، بیولوژیکی و فیزیکی بوده است [۱ و ۲]. در حالت کلی شبکه‌ها گراف‌های متصلی هستند که در آنها رأس‌ها حداکثر با یک یال به هم متصل می‌شوند. در این حالت رأس‌ها نشان دهنده افراد و یال‌ها نشانه دهنده برهم‌کنش بین افراد می‌باشند [۳ و ۴]. مدل سازی بیماری‌های واگیر، ابزاری است که برای مطالعه مکانیزم پخش بیماری استفاده شده است تا بتوان پیش‌بینی‌های لازم را برای آینده و همچنین برای کنترل واگیری انجام داد. از میان مدل‌های ممکن، مدل‌هایی که بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند

۱. Susceptible-Infected-Susceptible

۲. Susceptible-Infected-Removed

۳. Daley and Kendall (DK)

را ملاقات می‌کند، شایعه پراکن اولیه با نرخ σ به یک بی‌علاقه تبدیل خواهد شد.

فرآیند بی‌علاقه‌گی خودبه‌خودی: $S \rightarrow U$ هر شایعه پراکن با نرخ δ ممکن است به طور خودبه‌خودی دست از انتشار شایعه بکشد (بدون نیاز به تماس با همسایگی‌های خود).

اگر $I_k(t)$ ، $S_k(t)$ و $U_k(t)$ به ترتیب معرف چگالی‌های بی‌خبر، شایعه پراکن و بی‌علاقه با درجه k (تعداد اتصالات) در زمان t باشند آنگاه این کمیت‌ها شرط بهنجارش $I_k(t) + S_k(t) + U_k(t) = 1$ برای شبکه‌های همگن با استفاده از روش تقریب میدان میانگین معادلات تحول این چگالی‌ها به صورت زیر می‌باشد [۱۵]

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= -\lambda \bar{k} I(t) S(t) \quad , \\ \frac{dS(t)}{dt} &= \lambda p \bar{k} I(t) S(t) - \sigma \bar{k} S(t) (S(t) + U(t)) - \delta S(t) \quad , \\ \frac{dU(t)}{dt} &= \sigma \bar{k} S(t) (S(t) + U(t)) + \delta S(t) \quad , \end{aligned}$$

که \bar{k} نشان دهنده توزیع درجه ثابت برای تمام رأس‌ها می‌باشد. نویسندگان نشان داده‌اند که این معادلات را می‌توان به روش تحلیلی حل کرد و آستانه بحرانی پخش به صورت $\lambda_c = \frac{\delta}{\bar{k}}$ می‌باشد. واضح است که آستانه پخش به نرخ فرآیند بی‌علاقه‌گی خودبه‌خودی بستگی دارد و مستقل از نرخ فرآیند بی‌علاقگی تماسی می‌باشد. این آستانه با مقدار به دست آمده برای مدل SIR در شبکه‌های همگن یکسان است [۸-۱۰].

در اینجا ما فرآیندهای معرفی شده در مدل استاندارد را اصلاح کرده و تعمیم خواهیم داد. همچنین در این بخش با استفاده از نظریه سیستم‌های دینامیکی و بررسی شرایط پایداری تعادل سیستم، آستانه پخش را بر اساس نرخ‌های برهم‌کنش‌ها و شرایط اولیه به دست می‌آوریم.

در مدل استاندارد فرض شده است که هرگاه یک شایعه پراکن با یک بی‌خبر ملاقات می‌کند، بی‌خبر با نرخ λ به یک

می‌باشد مدل مکی و تامسون^۱ می‌باشد [۱۴]. در مدل DK افراد نسبت به شایعه به سه دسته تقسیم می‌شوند: بی‌خبر^۲، کسی که هنوز شایعه را نشنیده است. شایعه پراکن^۳، کسی که اقدام به پخش شایعه می‌کند. بی‌علاقه^۴، کسی که شایعه را شنیده ولی علاقه خود را از دست داده و دیگر اقدام به پخش آن نمی‌کند. اگر شایعه پراکن با بی‌خبر تماس برقرار کند، شایعه در بین جمعیت پخش می‌شود. هر شایعه پراکن پس از برقراری تماس با بقیه افراد جامعه، سعی می‌کند ذهن آن را با شایعه آلوده می‌کند. اگر آن فرد بی‌خبر باشد، او به یک شایعه پراکن تبدیل می‌شود و اگر آن فرد یک شایعه پراکن یا یک بی‌علاقه باشد، هر دو متوجه می‌شوند شایعه دست اول نیست و هر دو به حالت بی‌علاقه می‌روند. در مدل MK نیز شایعه با تماس مستقیم افراد شایعه پراکن و بقیه افراد جامعه پخش می‌شود اما وقتی یک شایعه پراکن یک شایعه پراکن دیگر یا یک بی‌خبر دیگر را می‌بیند، فقط شایعه پراکن اولیه به حالت بی‌علاقه می‌رود. ما در این مقاله مدلی تعمیم یافته براساس مدل MK ارائه می‌دهیم و با استفاده از نظریه سیستم‌های تعادلی آستانه پخش شایعه را برای شبکه‌های همگن پیدا می‌کنیم.

بر اساس مرجع [۱۵] که ما آن را مدل استاندارد می‌نامیم، فرآیندهایی که بین یک شایعه پراکن و بقیه افراد جامعه اتفاق می‌افتد به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرآیند پخش: $IS \rightarrow SS$ وقتی که یک شایعه پراکن یک بی‌خبر را ملاقات می‌کند، بی‌خبر با نرخ λ شایعه پراکن می‌شود.

فرآیند بی‌علاقه‌گی تماسی: $SS \rightarrow US$ و $SU \rightarrow UU$ وقتی یک شایعه پراکن یک شایعه پراکن دیگر یا یک بی‌علاقه

۱. Maki and Thompson (MK)

۲. I-ignorant

۳. S-spreader

۴. U-uninterested

$$\frac{dU(t)}{dt} = (\lambda - p)\lambda \bar{k} I(t) S(t) + \sigma^{(1)} \bar{k} S(t) S(t) + \sigma^{(2)} \bar{k} S(t) U(t) + \delta S(t) \quad (1)$$

در مدل تعمیم یافته پخش شایعه معادله اول بدون تغییر باقی می‌ماند و دو معادله دیگر نیز به ازای $\{\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = \sigma, p = 1\}$ به مدل استاندارد پخش منجر می‌شود. لازم به تاکید است که قید $I(t) + S(t) + U(t) = 1$ بین این سه متغیر برقرار است که توسط معادلات نیز ارضاء می‌گردد.

از آنجا که حل تحلیلی و دقیق معادلات دیفرانسیل وابسته غیر خطی (۱) ممکن نیست، بنابراین از روش مرجع [۱۵] برای به دست آوردن آستانه بحرانی پخش نمی‌توان استفاده کرد. در ادامه از نظریه سیستم‌های دینامیکی (بررسی حالت تعادل) برای به دست آوردن آستانه بحرانی پخش استفاده می‌کنیم. با توجه به قید $I(t) + S(t) + U(t) = 1$ ، معادلات (۱) را می‌توان به صورت دو معادله مستقل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= -\lambda \bar{k} I(t) S(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= (\lambda p \bar{k} + \sigma^{(2)} \bar{k}) I(t) S(t) + (\sigma^{(2)} \bar{k} - \sigma^{(1)} \bar{k}) \\ &\quad \times S(t) S(t) - (\sigma^{(2)} \bar{k} + \delta) S(t) \end{aligned} \quad (2)$$

از معادلات (۲) به سادگی می‌توان دریافت که به ازای $S = 0$ سمت راست رابطه بالا صفر می‌شود ($\dot{I} = \dot{S} = 0$). بنابراین نقطه $(I, S = 0)$ یک نقطه ثابت سیستم است.

با تشکیل ماتریس ژاکوبی در نقطه تعادل و بررسی ویژه مقادیر آن می‌توان پایداری نقطه تعادل را بررسی کرد [۱۶]. ماتریس ژاکوبی در نقطه تعادل به صورت زیر است:

$$J_{S=0} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \bar{k} I \\ 0 & (\lambda p \bar{k} + \sigma^{(2)} \bar{k}) I - (\sigma^{(2)} \bar{k} + \delta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ژاکوبی بالا دارای مقادیر ویژه $\{e_1 = 0, e_2 = \lambda p \bar{k} I - (\sigma^{(2)} \bar{k} + \delta) - I\}$ است. اگر $e_2 < 0$ باشد آنگاه این نقطه ثابت، یک نقطه حاشیه‌ای است. هنوز با این آزمون نمی‌توان گفت که نقطه تعادل پایدار است، اما می‌توان مقدار آستانه‌ای برای λ به دست آورد:

شایعه‌پراکن تبدیل می‌شود ($SI \xrightarrow{\lambda} SS$). این فرآیند به این صورت قابل تعمیم و اصلاح می‌باشد که هنگام ملاقات یک شایعه‌پراکن با بی‌خبر، این احتمال هم وجود دارد که بی‌خبر در همان لحظه اظهار بی‌علاقه‌گی کند و شایعه را نپذیرد. بنابراین هنگام تماس یک پخش‌کننده با یک بی‌خبر، با احتمال p بی‌خبر به شایعه‌پراکن تبدیل می‌شود و با احتمال $(1-p)$ مستقیماً به حالت بی‌علاقه‌گی می‌رود. به طور خلاصه داریم:

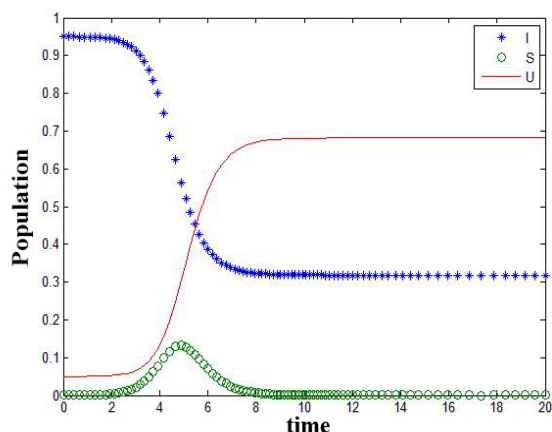
$$SI \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{p\lambda} SS \\ \xrightarrow{(1-p)\lambda} SU \end{cases}$$

همچنین در مدل استاندارد فرض شده است که هنگام تماس یک شایعه‌پراکن با یک شایعه‌پراکن و یا با یک بی‌علاقه دیگر، شایعه‌پراکن در هر دو حالت با نرخ یکسان σ به حالت بی‌علاقه می‌رود ($SS \xrightarrow{\sigma} US$ و $SU \xrightarrow{\sigma} UU$). این فرآیند را این گونه می‌توان اصلاح کرد که نرخ فرآیند رفتن به حالت بی‌علاقه‌گی هنگام تماس دو شایعه‌پراکن با هم (SS) و هنگام ملاقات یک شایعه‌پراکن با یک بی‌علاقه (SU) با هم متفاوت و مستقل از هم باشد (به ترتیب $\sigma^{(1)}$ و $\sigma^{(2)}$ باشند). به بیان دیگر خواهیم داشت:

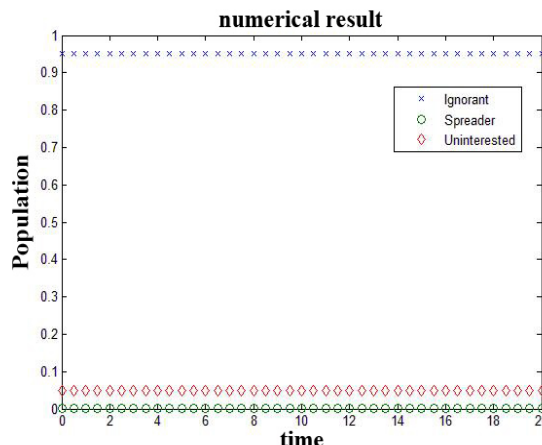
$$\begin{aligned} SS &\xrightarrow{\sigma^{(1)}} US \\ SU &\xrightarrow{\sigma^{(2)}} UU \end{aligned}$$

به منظور نشان دادن برخی ویژه‌گی‌های مدل تعمیم یافته نسبت به مدل استاندارد، پخش مدل تعمیم یافته را در شبکه‌های همگن (که در آنها تغییرات درجه بسیار کوچک می‌باشد و درجه رأس‌ها ناهمبسته می‌باشند) بررسی می‌کنیم. در این مدل $p(k) = \bar{k}$ را به عنوان تابع توزیع درجه ثابت در نظر می‌گیریم (یا درجه متوسط یک شبکه که در آن شبکه احتمال پیدا کردن رأسی با درجه اتصالات متفاوت به صورت نمایی سریعاً به سمت صفر می‌رود). معادلات میدان میانگین برای تحول مدل تعمیم یافته پخش شایعه به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= -\lambda p \bar{k} I(t) S(t) - (\lambda - p)\lambda \bar{k} I(t) S(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= \lambda p \bar{k} I(t) S(t) - \sigma^{(1)} \bar{k} S(t) S(t) \\ &\quad - \sigma^{(2)} \bar{k} S(t) U(t) - \delta S(t) \end{aligned}$$



شکل ۲. چگالی افراد جامعه برای وقتی که جامعه از حالت تعادل نسبت به شایعه خارج شده است و اپیدمی رخ می دهد.



شکل ۱. چگالی افراد جامعه برای سه دسته شایعه پراکن، بی خبر و بی علاقه در حالت تعادل.

$$\lambda$$

در این بخش معادلات تحول را برای مجموعه خاصی از پارامترها حل می کنیم. به طور مثال اگر داشته باشیم

$$\{p = 0.8, \sigma^{(1)} = 0.5, \sigma^{(2)} = 0.6, \delta = 0.5, I = 0.95, U = 0.05, \bar{k} = 4\}$$

آنگاه بر اساس رابطه (۴) برای آستانه پخش داریم $\lambda_c = 0.2$. بنابراین انتظار داریم به ازای λ های بزرگتر از این مقدار (وقتی که سیستم اندکی از حالت تعادل خارج می شود) تعادل از بین برود و در بین جمعیت پخش رخ دهد. حال اگر اندکی سیستم را از حالت تعادل خارج کنیم، یعنی مقدار δ را از مقدار صفر خارج کنیم به عبارتی داشته باشیم $[I = 0.95, S = 0.000001, U = 0.05]$ و در نظر بگیریم $\lambda = \lambda_c = 0.2$ ، آنگاه حل عددی به صورت زیر خواهد بود.

از شکل ۱ مشخص است که سیستم در حالت تعادل می ماند و وضعیت خود را تغییر نمی دهد. با توجه به انتخاب $\lambda = \lambda_c = 0.2$ انتظار همین وضعیت را هم داشتیم. اگر $\lambda = 0.8$ را انتخاب کنیم که از آستانه بحرانی بیشتر است انتظار داریم که با اندکی اختلال در تعداد δ ها سیستم از وضعیت تعادل خارج شود. شکل ۲ این مطلب را تأیید می کند.

حال نگاهی به وضعیت U نسبت به تمام λ های ممکن در محدوده $0 \leq \lambda \leq 1$ می اندازیم.

$$\lambda_c = \frac{\sigma^{(2)} \bar{k} (1 - I) + \delta}{p \bar{k} I}$$

واضح است که آستانه بحرانی به پارامترهای $\{p, \sigma^{(2)}, I, \bar{k}, \delta\}$ وابسته است.

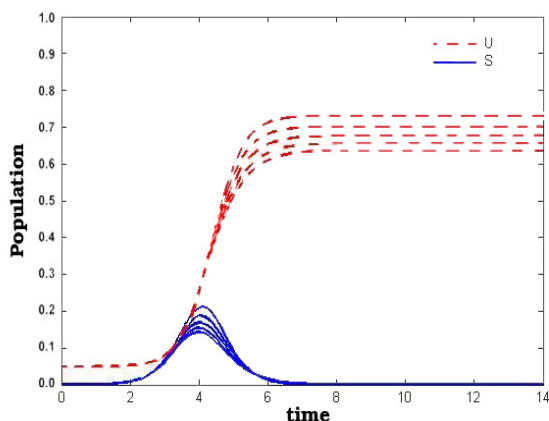
حال اگر به طریقی ثابت شود که نقطه ثابت $(I, S = 0)$ نقطه تعادل پایدار است می توان گفت که به ازای λ های کوچکتر از λ_c سیستم در حالت تعادل پایدار و برای λ های بزرگتر از λ_c سیستم در حالت تعادل ناپایدار بوده و بنابراین در سیستم پخش خواهیم داشت.

از روی معادلات (۲) و با استفاده از مرجع [۱۷] می توان برای این سیستم تابع لیاپانوف مناسب:

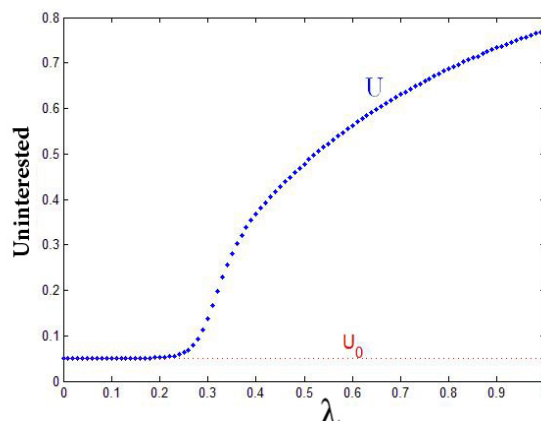
$$\begin{aligned} \frac{\partial V(I, S)}{\partial I} = & -(\lambda p \bar{k} + \sigma^{(2)} \bar{k}) I(t) S(t) \\ & -(\sigma^{(2)} \bar{k} - \sigma^{(1)} \bar{k}) S(t) S(t) \\ & + (\sigma^{(2)} \bar{k} + \delta) S(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial V(I, S)}{\partial S} = -\lambda \bar{k} I(t) S(t)$$

که در آن $V(I, S) = (\sigma^{(1)} \bar{k} - \sigma^{(2)} \bar{k}) I S^2$ را به دست آورد، که نقطه ثابت $(I, S = 0)$ نیز در آن صدق می کند. به این ترتیب با به دست آوردن تابع لیاپانوف بنا بر قضیه لیاپانوف، می توان پایداری تعادل در نقطه ثابت را برای این سیستم تحقیق نمود.



شکل ۴. در شکل بالا $\sigma^{(1)} = 1$ و $\sigma^{(2)}$ از بالا به پایین متغیر از ۰٫۲ تا ۱ با فاصله ۰٫۲ است.



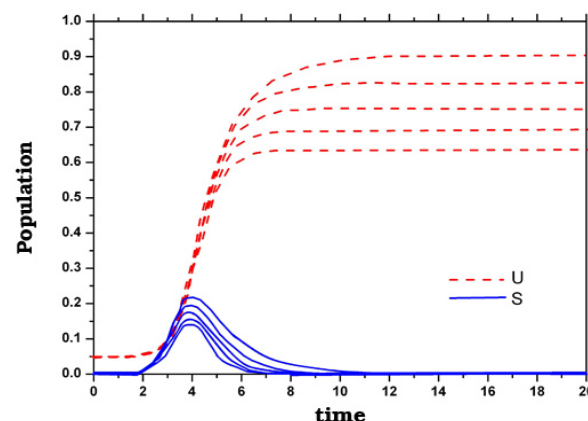
شکل ۳. چگالی افرادی که شایعه را شنیده‌اند نسبت به مقادیر مختلف $0 < \lambda \leq 1$.

$UU \xrightarrow{\sigma^{(2)}} SU$. حال می‌خواهیم اثر متفاوت فرض کردن این نرخ‌ها را در فرآیند پخش بررسی کنیم (برای این منظور نرخ فرآیند بی‌علاقه‌گی خودبه‌خودی را صفر فرض می‌کنیم $\delta = 0$). پارامترهای سیستم را برای حل عددی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\{p = 0.18, \lambda = 0.18, \delta = 0, I = 0.95, U = 0.05, \bar{k} = 4\}.$$

شکل‌های ۴ و ۵ تحول سیستم را برای مقادیر مختلف $\sigma^{(1)}$ و $\sigma^{(2)}$ نمایش می‌دهند.

با توجه به اینکه مقدار U در پایان اپیدمی بیانگر افرادی است که شایعه را شنیده‌اند از شکل ۴ معلوم می‌شود که هر چه $\sigma^{(1)}$ کوچک‌تر باشد آنگاه افراد بیشتری شایعه را شنیده‌اند ($\sigma^{(1)}$ نرخ فرآیند بی‌علاقه‌گی تماسی SS است و هر چه این نرخ کوچک‌تر باشد آنگاه S ها در اثر تماس با یکدیگر با احتمال کمتر بی‌علاقه می‌شوند و بیشتر به فعالیت خود ادامه می‌دهند). با توجه به شکل مدت زمان حضور همه S ها، به ازای تمام $\sigma^{(1)}$ های مختلف، در سیستم یکسان است. از شکل ۵ و نمودار S ها مشخص است که هر چه $\sigma^{(2)}$ کوچک‌تر باشد آنگاه S ها بیشینه بزرگتری خواهند داشت و همچنین مدت زمان بیشتری در سیستم می‌مانند و بنابراین مدت زمان بیشتری را برای پخش شایعه در اختیار دارند، بنابراین تعداد افراد بیشتری را به شایعه آلوده می‌کنند (به عبارت دیگر U های



شکل ۵. در شکل بالا $\sigma^{(1)} = 1$ و $\sigma^{(2)}$ از بالا به پایین متغیر از ۰٫۲ تا ۱ با فاصله ۰٫۲ است.

با توجه به شکل ۳ واضح است که $\lambda_c = 0.2$ است و بعد از آن مقدار U شروع به بیشتر شدن از مقدار اولیه خود ($U_0 = 0.05$) می‌کند و سیستم از وضعیت تعادلی خارج می‌شود. بنابراین حل عددی و رابطه (۴) مقدار یکسانی را برای آستانه بحرانی، $\lambda_c = 0.2$ ، پیش بینی می‌کنند.

$$\sigma^{(2)} \quad \sigma^{(1)}$$

همان طور که قبلاً اشاره شد، در مدل استاندارد نرخ فرآیندهای بی‌علاقه‌گی تماسی یکسان و برابر با σ است ($SS \xrightarrow{\sigma} US$ و $SU \xrightarrow{\sigma} UU$). ما در مدل تعمیم یافته این نرخ‌ها را متفاوت فرض کردیم ($SS \xrightarrow{\sigma^{(1)}} US$ و

مدل به دست آوردیم. نشان دادیم که اگر $\lambda < \lambda_c$ باشد تعادل سیستم پایدار است و سیستم حالت خود را حفظ می‌کند بنابراین پخش نخواهیم داشت اما اگر $\lambda > \lambda_c$ باشد تعادل سیستم ناپایدار است و یک اختلال کوچک باعث از دست رفتن تعادل و یا به عبارتی پخش همگانی می‌شود. در بخش ۳ حل عددی معادلات تحول سیستم به ازای نرخ‌های مختلف λ آورده شد و نشان دادیم که بالای نرخ آستانه پخش داریم. همچنین در این بخش تأثیر متفاوت فرض کردن نرخ‌های $\sigma^{(1)}$ و $\sigma^{(2)}$ با نتایج محاسبات عددی نشان داده شد.

از معاونت پژوهشی دانشگاه الزهرا بابت حمایت از این کار تشکر می‌شود.

بیشتری خواهیم داشت). برای روشن‌گری بیشتر دو حالت خاص زیر را با هم مقایسه می‌کنیم

$$۱: \{\sigma^{(1)} = ۰/۲, \sigma^{(2)} = ۱\}$$

$$\rightarrow \{S_{\max} = ۰/۲۱۲۹, U_{\max} = ۰/۷۳۰۷, t = ۷/۱۲۵\}$$

$$۲: \{\sigma^{(1)} = ۱, \sigma^{(2)} = ۰/۲\}$$

$$\rightarrow \{S_{\max} = ۰/۲۲۱۳, U_{\max} = ۰/۹۰۷۸, t = ۱۳\}$$

اگر چه در دو حالت ۱ و ۲، S_{\max} تفاوت زیادی ندارند اما در پایان اپیدمی تعداد افرادی که شایعه را شنیده اند، U_{\max} ، در دو حالت تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارند. دلیل این اتفاق این است که در حالت دوم، S ها زمان بیشتری را برای فعالیت در اختیار دارند و بنابراین افراد بیشتری را به شایعه آلوده می‌کنند.

در بخش ۲ مدل تعمیم یافته پخش شایعه معرفی شد. با استفاده از نظریه سیستم‌های تحولی، آستانه پخش، λ_c ، را برای این

11. Y Moreno, R Pastor-Satorras, and A Vespignani, *Eur. Phys. J. B* **26** (2002) 521.
12. D J Daley and D G Kendal, *J. Inst. Math. Appl.* **1** (1965) 42.
13. D J Daley and J Gani, "Epidemic Modelling", Cambridge University Press, Cambridge (2000).
14. D P Maki, "Mathematical Models and Applications, with Emphasis on Social, Life, and Management Sciences", Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973).
15. M Nekoveea, Y Moreno, G Bianconic, and M Marsili, *Physica A* **374** (2007) 457.
16. I Percival, "Introduction to dynamics", Cambridge University Press, Cambridge (1982).
17. S H Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, and Engineering", Westview Press (2001).

1. S N Dorogovtsev and J F F Mendes, *Adv. Phys.* **51** (2002) 1079.
2. R Albert, A-L Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 47.
3. S H Strogatz, *Nature (London)* **410** (2001) 268.
4. D J Watts and S H Strogatz, *Nature* **393** (1998) 440.
5. R Patros-Satorras and A Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 3200.
6. R Pastor-Satorras and A Vespignani, *Phys. Rev. E* **63** (2001) 066117.
7. M Boguna and R Patros-Satorras, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 047104.
8. M Boguna, R Pastor-Satorras, and A Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 028701.
9. R M May and A L Lloyd, *Phys. Rev. E* **64** (2002) 066112.
10. A L Lloyd and R M May, *Science* **292** (2001) 1316.