مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۳، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۹۲

حالت‌های همدوس غیرخطی به عنوان حالت‌های مرجح در فرآیند واهمدوسی یک کاواک اتلافی غیرخطی

الهه بخشایی و علی مهدی‌فر

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

پست الکترونیکی: mahdifar_a@sci.sku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۴/۱۷ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۲/۵/۱۳)

چکیده

در این مقاله برای بررسی یک کاواک اتلافی غیرخطی، معادلهٔ عام خطی حاکم بر اتلاف کاواک را به یک معادلهٔ عام غیرخطی در دمای صفر تعمیم می‌دهیم. سپس نشان می‌دهیم که حالت‌های همدوس غیرخطی تنها حالت‌های مرجح سامانهٔ غیرخطی مزبور هستند.

واژه‌های کلیدی: واهمدوسی، حالت‌های مرجح، کاواک اتلافی، حالت‌های همدوس غیرخطی

۱. مقدمه

یکی از ویژگی‌های متمایز کنندهٔ مکانیک کوانتومی از مکانیک کلاسیک برهم‌نهی همدوس حالت‌های فیزیکی مجزا است. به دلیل خطی بودن مکانیک کوانتومی، یعنی معادلهٔ شرودینگر، هر برهم‌نهی از پاسخ‌های آن یک جواب قابل قبول خواهد بود. وجود این برهم‌نهی‌ها در سطح کوانتومی و نبود آنها در جهان کلاسیک، فیزیک‌دانان را از بدو تولد مکانیک کوانتومی به چالش کشیده است، برای مثال مشهور گربهٔ شرودینگر. تا کنون حداقل دو رهیافت برای توجیه این مسئله پیشنهاد شده است. در نخستین رهیافت، که رهیافتی پدیده شناختی است، سعی می‌شود که معادلهٔ شرودینگر به صورتی مناسب تغییر داده شود که در اثر آن جملات همدوسی در سطح ماکروسکوپی به طور خودکار حذف گردند [۱ و مراجع آن]. در رهیافت دوم، از بین رفتن جملات همدوسی از طریق جفت شدگی سامانهٔ مورد نظر با درجات آزادی یک سامانهٔ دیگر، یا محیط، توضیح داده می‌شود. در واقع، همبسته شدن تابع موج این سامانه‌ها با یکدیگر منجر به از بین رفتن رفتار کوانتومی و بروز رفتار کلاسیکی در آنها خواهد شد. از این رو، در برهم‌کنش یک سامانهٔ کوانتومی با یک محیط، که سامانه‌ای با بی‌شمار درجهٔ آزادی است، درهم‌تنیدگی حالت‌های سامانه با محیط باعث از بین رفتن برهم‌نهی کوانتومی حالت سامانه و نابودی جملات همدوسی بین مؤلفه‌های آن می‌شود. حذف بازگشت ناپذیر همدوسی‌های کوانتومی، که منشاء اثرات کوانتومی از قبیل اثرات تداخلی

هستند، از سامانهٔ مزبور واهمدوسی[۱] نامیده می‌شود [۲ و ۳]. در اثر واهمدوسی، در طی یک بازهٔ زمانی مشخص که زمان واهمدوسی[۲] نامیده می‌شود، حالت خالص اولیهٔ سامانه به یک مخلوط آماری تبدیل می‌شود. زمان واهمدوسی که تابعی است از پارامترهای سامانه و نوع برهم‌کنش با محیط، با اینکه برای سامانه‌های کوانتومی دارای مقداری متناهی بوده، برای سامانه‌های ماکروسکوپی به سمت صفر میل کرده و در نتیجه برهم‌نهی‌های همدوس حالت‌های یک سامانهٔ کلاسیکی به سرعت از بین می‌روند. این فرآیند توضیح می‌دهد که چرا مشاهدهٔ حالت‌هایی مانند برهم‌نهی گربهٔ شرودینگر، در جهان تجربیات روزمرهٔ ما امکان‌پذیر نیست [۲].

از طرف دیگر، مشاهده می‌شود که حالت‌هایی از سامانه وجود دارند که در مقابل واهمدوسی مقاوم هستند. این حالت‌ها که حالت‌های مرجح[۳] سامانه نامیده می‌شوند، و حالت‌هایی از سامانه هستند که در برهم‌کنش با محیط حداقل درهم تنیدگی[۴] و بنابراین نسبت به واهمدوسی حداکثر مصونیت را دارند [۳]. به بیان دیگر، این حالت‌ها با توجه به ساختار برهم‌کنش محیط با سامانه، ابرگزینش[۵] می‌شوند. بنابراین، برای مشاهدهٔ رفتار کوانتومی در یک سامانه، تعیین حالت‌های مرجح آن سامانه دارای اهمیت بسیار است [۲ و ۳].

از جمله برهم‌کنش‌های از بین برندهٔ همدوسی در سامانه‌ها می‌توان از برهم‌کنش‌های اتلافی نام برد. در اثر این برهم‌کنش‌ها، یک حالت اولیهٔ خالص از سامانه به یک مخلوط آماری از حالت‌ها تبدیل می‌شود. در مرجع [۴] نشان داده شده است که برای سامانهٔ نوسانگر هماهنگ تحت حرکت براونی کوانتومی، پدیدهٔ واهمدوسی به طور طبیعی حالت‌های همدوس را به عنوان حالت‌های خالص مرجح، با کمینهٔ احتمال برای تبدیل شدن به یک مخلوط آماری، برمی‌گزینند. از جمله سامانه‌های مورد استفاده در اپتیک کوانتومی می‌توان به کاواک‌های اپتیکی اشاره کرد. کاواک‌های اپتیکی واقعی دارای آینه‌های بازتابی ایده‌آل نبوده و از این رو تابش الکترومغناطیسی درون آن‌ها به دلیل وجود اتلاف میرا می‌شود. نشان داده شده است که یک حالت همدوس استاندارد اولیه درون یک کاواک واقعی دارای اتلاف و در دمای صفر به یک حالت همدوس تحول پیدا می‌کند، که نسبت به حالت همدوس اولیه دارای دامنهٔ کاهش یابنده به شکل نمایی است [۵]. علاوه بر این، نشان داده شده است که در این سامانه، حالت‌های همدوس استاندارد تنها حالت‌های خالص ایمن از واهمدوسی هستند که همچنان خالص باقی می‌مانند [۶]. با این حال، نشان داده شده است که در دماهای غیر صفر، به دلیل وجود نوفه‌های کوانتومی، حالت‌های همدوس نیز دیگر خالص نمی‌مانند و بنابراین حالت‌های مرجح سامانه نیز نخواهند بود [۵].

حالت‌های همدوس استاندارد، ویژه حالت‌های عملگر نابودی جبر ویل- هایزنبرگ بوده و دارای کمینهٔ عدم قطعیت هستند [۷]. این حالت‌ها به روش‌های گوناگونی تعمیم داده شده‌اند. از میان حالت‌های همدوس تعمیم یافته، حالت‌های همدوس غیرخطی، یا حالت‌های همدوس تغییر شکل یافتهٔ[۶] f، به دلیل دارا بودن ویژگی‌های غیرکلاسیک، بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند [۸]. تا کنون بسیاری از حالت‌های اپتیک کوانتومی به عنوان مثال‌هایی از حالت‌های همدوس غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به عنوان نمونه می‌توان از حالت‌های همدوس بر سطح کره [۹]، حالت‌های دوجمله‌ای [۱۰]، حالت‌های دوجمله‌ای منفی [۱۱و۱۲] و حالت‌های همدوس فوتون افزوده و فوتون کاهیده [۱۳ و ۱۴] نام برد.

در این مقاله، ابتدا حالت‌های همدوس غیرخطی را تعریف کرده و سپس با تبدیل معادلهٔ عام[۷] خطی حاکم بر اتلاف یک کاواک در دمای صفر به معادلهٔ عام تغییر شکل یافتهٔ f، تبدیل کاواک به یک کاواک غیرخطی، نشان می‌دهیم که حالت‌های همدوس غیرخطی به عنوان تنها حالت‌های مرجح سامانهٔ مزبور

۱. Decoherence

۲. Decoherence time

۳. Preferred states

۴. Entanglement

۵. Superselection

۶. Deformed

۷. Master-equation

به دست می‌آیند. بدین ترتیب، با وجود اینکه معمولاً حالت‌های همدوس غیرخطی با یک تعمیم ریاضی از جبر ویل- هایزنبرگ تعریف می‌شوند، در این مقاله حالت‌های همدوس غیرخطی با رهیافتی فیزیکی تعریف خواهند شد.

۲. حالت‌های همدوس استاندارد، تعمیم یافته و غیرخطی

در این بخش به طور خلاصه به تعریف حالت‌های همدوس استاندارد و تعمیم آنها به حالت‌های همدوس غیرخطی می‌پردازیم.

۲. ۱. حالت‌های همدوس استاندارد

حالت‌های همدوس همزمان با تولد مکانیک کوانتومی و در ضمن مطالعهٔ نوسانگر هماهنگ توسط شرودینگر مطرح گردیدند [۱۵]. ساختار نوسانگر هماهنگ که از جمله مباحث عمده در بسیاری از حوزه‌های فیزیک مدرن به شمار می‌آید، با عملگرهای آفرینش و نابودی $\hat{a}^\dagger$ و $\hat{a}$ توصیف می‌شود. عملگرهای مزبور از جبر ویل- هایزنبرگ پیروی می‌کنند

$$\begin{aligned}&\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{I},\\&\left[\hat{a},\hat{n}\right]=\hat{a},\\&\left[\hat{a}^\dagger,\hat{n}\right]=-\hat{a}^\dagger,\end{aligned}\qquad (۱)$$

که در آن در آن $\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ عملگر عددی است. حالت‌های همدوس استاندارد به عنوان ویژه حالت عملگر نابودی $\hat{a}$ تعریف شده و بر حسب حالت‌های عددی به صورت زیر به‌دست می‌آیند [۷]

$$|z\rangle=\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.\qquad (۲)$$

۲. ۲. تعمیم حالت‌های همدوس

حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ به روش‌های گوناگونی تعمیم یافته‌اند که گام‌های مهمی در جهت گسترش این نظریه هستند. از جملهٔ این تعمیم‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۱۶و۱۷]:

الف) تعمیم‌های دینامیکی: مبتنی بر پتانسیل‌های متفاوت با پتانسیل نوسانگر هماهنگ.

ب) تعمیم‌های تقارنی: بر اساس نظریهٔ گروه‌ها.

پ) تعمیم‌های جبری: متناظر با تغییر شکل جبر نوسانگر هماهنگ.

از جمله تعمیم‌های جبری حالت‌های همدوس، حالت‌های همدوس غیرخطی، $|z,\ f\rangle$ ، هستند. برای رسیدن به این حالت‌ها عملگرهای جبر نوسانگر تغییر شکل یافته را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}&\hat{A}=\hat{a}\ f(\hat{n})=f(\hat{n}+1)\ \hat{a},\\&\hat{A}^\dagger=f^\dagger(\hat{n})\ \hat{a}^\dagger=\hat{a}^\dagger\ f^\dagger(\hat{n}+1),\end{aligned}\qquad (۳)$$

که برای آنها داریم

$$\begin{aligned}&\left[\hat{A},\hat{A}^\dagger\right]=(\hat{n}+1)\ f(\hat{n}+1)\ f^\dagger(\hat{n}+1)-\hat{n}\ f(\hat{n})\ f^\dagger(\hat{n}),\\&\left[\hat{A},\hat{n}\right]=\hat{A},\qquad \left[\hat{A}^\dagger,\hat{n}\right]=-\hat{A}^\dagger.\end{aligned}\qquad (۴)$$

در روابط بالا تابع غیرخطی $f(\hat{n})$ یک تابع عملگری وابسته به شدت $\hat{n}$ بوده که به طور معمول به یک پارامتر تغییر شکل وابسته است که برای سادگی فرض می‌شود $f^\dagger(\hat{n})=f(\hat{n})$ است. این تابع به ازای مقادیر خاصی از این پارامتر به مقدار ۱ میل کرده و در این حالت، جبر تغییر شکل یافتهٔ بالا به جبر ویل- هایزنبرگ تبدیل می‌شود. بدین ترتیب حالت‌های همدوس غیرخطی، به صورت ویژه حالت عملگر تغییر شکل یافتهٔ $\hat{A}$ تعریف شده و در پایهٔ حالت‌های عددی به صورت زیر به دست می‌آیند [۸ و ۱۷]،

$$|z,\ f\rangle=N_f^{-\frac{1}{2}}\left(|z|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}\ [f(n)]!}|n\rangle,\qquad (۵)$$

که در آن ضریب بهنجارش N_f با معادلهٔ زیر بیان می‌شود،

$$N_f\left(|z|^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n!\left([f(n)]!\right)^2},\qquad (۶)$$

و $[f(n)]!$ بنا به تعریف برابر است با

$$[f(n)]!=f(0)\ f(1)\dots f(n),\quad [f(0)]!=1.\qquad (۷)$$

۳. کاواک اتلافی خطی و غیرخطی

معادلات عام به صورت مستقیم و به نحوی مناسب تحول زمانی ماتریس چگالی کاهش‌یافتهٔ یک سامانهٔ برهم‌کنش کننده با

محیط را توصیف می‌کنند. بدون استفاده از این معادلات لازم است که در ابتدا دینامیک ترکیب سامانه – محیط را تعیین کرده و سپس برای حذف محیط، بر درجات آزادی محیط ردگیری[۱] نماییم. البته به طور معمول آنچه برای ما مهم است تأثیر محیط بر سامانهٔ مورد نظر بوده و از این رو دانستن دینامیک محیط یا دینامیک ترکیب سامانه – محیط غیر ضروری خواهد بود. به هر حال، تعیین معادلهٔ تحول زمانی ماتریس چگالی سامانه به صورت تحلیلی معمولا امکان‌پذیر نیست. در چنین مواردی اغلب از تقریب‌هایی برای یافتن معادلهٔ تحول ماتریس چگالی کاهش یافتهٔ سامانه استفاده می‌شود که در نهایت به معادلات عام منجر می‌شود [۲].

در این بخش، نحوهٔ به‌دست آوردن معادلهٔ عام حاکم بر یک کاواک اتلافی کوانتومی را با استفاده از اصل همخوانی[۲] در دمای صفر، دمایی که تابش جسم سیاه وجود ندارد، مرور می‌کنیم [۱۸]. کاواکی را در نظر می‌گیریم، برای سادگی در یک بعد x، که از دو آینه با ضریب بازتاب R و فاصلهٔ جدایی L تشکیل شده باشد. برای N بار رفت و برگشت، مدت زمان $t=\frac{2LN}{c}$ مورد نیاز بوده که در آن c سرعت نور است. میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی کلاسیک در زمان t و در مکان x، به دلیل بازتابش جزیی از آینه‌ها، با رابطهٔ میرا شوندهٔ زیر داده می‌شود

$$E(x,t)=R^N E(x,0), \tag{۸}$$

که در آن، $E(x,0)$ میدان الکتریکی در زمان $t=0$ و در مکان x است. با جایگذاری $N=\frac{ct}{2L}$ در معادلهٔ بالا داریم

$$E(x,t)=e^{-\frac{k}{2}t}E(x,0), \tag{۹}$$

که در آن $k=-\frac{c\,ln(R)}{L}$ است. باید توجه کرد که به دلیل اینکه $R<1$ است، مقدار k همیشه مثبت است و بنابراین رابطهٔ بالا به درستی یک سامانهٔ اتلافی را توصیف می‌کند.

حالت‌های همدوس حالت‌های کوانتومی هستند که در حد شدت‌های بزرگ، تابش کلاسیکی را نتیجه می‌دهند. در واقع این حالت‌ها مرز بین کوانتوم و کلاسیک هستند. از این رو، با استفاده از این حالت‌ها می‌توان معادلهٔ عام حاکم بر یک کاواک اتلافی کوانتومی را به‌دست آورد. در واقع طبق اصل همخوانی، معادلات حالت‌های کلاسیکی برای حالت‌های کوانتومی (در اینجا حالت‌های همدوس) نیز صحیح هستند. بنابراین، انتظار داریم که حالت‌های همدوس نیز همانند میدان کلاسیکی میرا شوند، یعنی

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| \to \left|\alpha e^{-\frac{k}{2}t}\right\rangle\left\langle\alpha e^{-\frac{k}{2}t}\right|. \tag{۱۰}$$

برای یک بازهٔ زمانی $\delta t << \frac{1}{\gamma}$ به صورت تقریبی داریم

$$\begin{aligned}\left|\alpha e^{-\frac{k}{2}\delta t}\right\rangle\left\langle\alpha e^{-\frac{k}{2}\delta t}\right| &\approx e^{-|\alpha|^2}\left(1+|\alpha|^2 k\,\delta t\right)\\ &\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\left(\alpha^*\right)^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}\left[1-\frac{k}{2}\delta t\left(n+m\right)\right]|n\rangle\langle m|.\end{aligned} \tag{۱۱}$$

با نگه داشتن جمله‌های مرتبهٔ اول δt، رابطهٔ (۱۱) به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$\begin{aligned}\left|\alpha e^{-\frac{k}{2}\delta t}\right\rangle\left\langle\alpha e^{-\frac{k}{2}\delta t}\right| &\approx |\alpha\rangle\langle\alpha|+\frac{k}{2}\delta t\\ &\times\left(2\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}^\dagger-\hat{n}|\alpha\rangle\langle\alpha|-|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{n}\right).\end{aligned} \tag{۱۲}$$

در نهایت با مرتب سازی دوبارهٔ جملات، به معادلهٔ عام یک کاواک اتلافی تک مد در دمای صفر می‌رسیم

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}}{dt} &= k\,\hat{a}\,\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger-\frac{k}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{\rho}-\frac{k}{2}\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\\ &=-\frac{k}{2}\left\{\hat{\rho},\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}+k\,\hat{a}\,\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger .\end{aligned} \tag{۱۳}$$

معادلهٔ عام بالا در بسیاری از مسایل اپتیک کوانتومی و الکترودینامیک کوانتومی درون کاواک مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان نمونه، برای بررسی اثرات کاواک اتلافی بر تابش خود به خود اتم‌های درون کاواک از این معادله استفاده می‌شود [۱۸].

در ادامه، معادلهٔ عام بالا را با تبدیل عملگرهای خلق و نابودی مد میدان به عملگرهای خلق و نابودی تغییر شکل یافته (غیرخطی)، به معادلهٔ عام یک کاواک غیرخطی تعمیم می‌دهیم

۱. Trace

۲. Correspondence principle

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{k}{2}\left\{\hat{\rho}, \hat{A}^{\dagger}\hat{A}\right\} + k\,\hat{A}\,\hat{\rho}\,\hat{A}^{\dagger}, \tag{۱۴}$$

به طوری که $\hat{A}^{\dagger}$ و $\hat{A}$ عملگرهای خلق و نابودی تغییر شکل یافته هستند که در رابطهٔ (۳) تعریف شده‌اند. بدین ترتیب، معادلهٔ بالا توصیف کنندهٔ یک کاواک اتلافی غیرخطی وابسته به شدت $\hat{n}$ در دمای صفر خواهد بود. طراحی سامانه‌های اتلافی غیرخطی توصیف شونده با معادلهٔ غیرخطی بالا امکان پذیر بوده و در تجربه نیز قابل تحقق است. به عنوان نمونه، تحقق فیزیکی اتلاف غیرخطی مزبور برای حالت‌های ارتعاشی یون درون دام مغناطیسی در مرجع [۱۹] ارایه گردیده است. به علاوه نشان داده شده است که اتلاف غیرخطی بالا در سامانهٔ چگالیدهٔ بوز–اینشتین نیز قابل تحقق است [۲۰]. همچنین معادلهٔ غیرخطی (۱۴)، با انتخاب مناسب تابع غیرخطی $f(\hat{n})$ ممکن است بتواند توصیف کنندهٔ کاواک‌های کوانتومی دارای جاذب‌های قابل اشباع باشد (این کار در دست انجام است). جذب قابل اشباع خاصیتی از مواد است که در آنها جذب نور با افزایش شدت نور کاهش پیدا می‌کند [۲۱].

۳. واهمدوسی به عنوان فرآیند تولید حالت‌های همدوس غیر خطی

در این قسمت به دنبال یافتن کلیهٔ جواب‌هایی هستیم که در فرآیند واهمدوسی ناشی از معادلهٔ عام غیرخطی (۱۴) به صورت خالص باقی بمانند. در ابتدا فرض می‌کنیم که جواب خالص و غیر بهنجار این معادله به شکل زیر باشد

$$\bar{\rho}(t) = \left|\bar{\psi}(t)\right\rangle\left\langle\bar{\psi}(t)\right|. \tag{۱۵}$$

در ادامه، به دلیل عدم بهنجارش اولیهٔ حالت $\left|\bar{\psi}(t)\right\rangle$، در محاسبات خود از ثابت‌های انتگرالگیری صرف نظر کرده و در انتهای محاسبات، حالت به دست آمده را بهنجار خواهیم کرد. با جایگذاری معادلهٔ (۱۵) در معادلهٔ عام (۱۴) مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جفت شده برای ضرایب بسط $\left|\bar{\psi}(t)\right\rangle$ در پایهٔ حالت‌های عددی، یعنی

$$c_n(t) = \left\langle n\middle|\bar{\psi}(t)\right\rangle, \tag{۱۶}$$

به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{c_n(t)\,c_m^*(t)\right\} = &\\ &-\frac{k}{2}\left\{m f^2(m) + n f^2(n)\right\}c_n(t)\,c_m^*(t)\\ &+k\left\{(n+1)(m+1)\right\}^{\frac{1}{2}} f(n+1)\,f(m+1)\\ &\times c_{n+1}(t)\,c_{m+1}^*(t)\ ,\end{aligned} \tag{۱۷}$$

که در آن $m,n=0,1,\ldots$ است. این رابطه بیان می‌کند که شرط این که $\hat{\rho}(t)$ یک جواب خالص از معادلهٔ عام (۱۴) باشد این است که ضرایب $c_n(t)$ در معادلات جفت شدهٔ بالا صدق کند. بنابراین، اگر معادلهٔ (۱۴) هرگونه جواب خالصی داشته باشد، با حل معادلهٔ (۱۷) برای ضرایب $c_n(t)$ مشخص می‌شود.

ابتدا معادلات را برای مؤلفه‌های قطری

$$e_n(t) \equiv \left|c_n(t)\right|^2, \tag{۱۸}$$

بررسی می‌کنیم. با قرار دادن $m=n$ در معادلهٔ (۱۷)، عبارت زیر به دست می‌آید،

$$\begin{aligned}(n+1)f^2(n+1)\,k\,e_{n+1}(t) = n\,k\,f^2(n)e_n(t)&\\ +\frac{d}{dt}e_n(t)\ .&\end{aligned} \tag{۱۹}$$

با تعریف $D_t^f(n)$ به صورت زیر

$$D_t^f(n) \equiv nk\,f^2(n) + \frac{d}{dt}\ , \tag{۲۰}$$

معادلهٔ (۱۹) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$e_{n+1}(t) = \frac{1}{k(n+1)f^2(n+1)}\,D_t^f(n)\,e_n(t)\ , \tag{۲۱}$$

اکنون می‌توانیم این رابطهٔ بازگشتی را حل کرده و تمام ضرایب را بر حسب جملهٔ اول بیابیم

$$e_n(t) = \frac{\left[D_t^f(n-1)\right]!}{k^n\,n!\left[f^2(n)\right]!}\,e_0(t)\ , \tag{۲۲}$$

به طوری که $\left[D_t^f(n)\right]!$ و $\left[f^2(n)\right]!$ به صورت زیر تعریف شده‌اند،

$$\left[D_t^f(n)\right]! = D_t^f(n)\,D_t^f(n-1)\ldots D_t^f(1)\,D_t^f(0), \tag{۲۳}$$

$$\left[f^2(n)\right]! = f^2(n)\,f^2(n-1)\ldots f^2(1)\,. \tag{۲۴}$$

اکنون معادلات مربوط به جملات غیر قطری در بسط پایهٔ عددی را بررسی می‌کنیم. اگر فاز $c_n(t)$ را با $\varphi_n(t)$ نشان دهیم، داریم

$$c_n(t)=\left[e_n(t)\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left[i\varphi_n(t)\right]. \tag{۲۵}$$

با جایگذاری معادلهٔ (۲۵) در معادلهٔ (۱۷) نیز عبارت زیر به دست می‌آید،

$$\frac{1}{2}\left[e_m(t)\dot{e}_n(t)+e_n(t)\dot{e}_m(t)\right]+i\left[\dot{\varphi}_n(t)-\dot{\varphi}_m(t)\right]e_n(t)e_m(t)$$
$$=-\frac{k}{2}\left[n f^2(n)+m f^2(m)\right]e_n(t)e_m(t)+k f(n+1) f(m+1)$$
$$\times\left[(n+1)(m+1)e_{n+1}(t)e_{m+1}(t)e_n(t)e_m(t)\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left(i\theta_{n,m}\right), \tag{۲۶}$$

که در آن نقطهٔ بالای کمیت‌ها به معنای مشتق زمانی بوده و $\theta_{n,m}$ به صورت زیر تعریف شده است

$$\theta_{n,m}(t)\equiv\varphi_{n+1}(t)-\varphi_{m+1}(t)-\left[\varphi_n(t)-\varphi_m(t)\right]. \tag{۲۷}$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۹) در معادلـهٔ (۲۶) نیز عبارت زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{2}(n+1) f^2(n+1) k\, e_{n+1}(t)e_m(t)$$
$$+\frac{1}{2}(m+1) f^2(m+1) k\, e_{m+1}(t)e_n(t)$$
$$+i\left(\dot{\varphi}_n-\dot{\varphi}_m\right)e_n(t)e_m(t) \tag{۲۸}$$
$$=k f(n+1) f(m+1)\left[(n+1)(m+1)\right.$$
$$\left.\times e_{n+1}(t)e_{m+1}(t)e_n(t)e_m(t)\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left(i\theta_{n,m}\right).$$

معادلهٔ (۲۸) یک معادلهٔ مختلط است و بنابراین دو معادله مجزا برای بخش‌های حقیقی موهومی نتیجه می‌دهد. معادلـهٔ بخش حقیقی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\cos\theta_{n,m}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{(n+1) f^2(n+1)\, e_{n+1}(t)e_m(t)}{(m+1) f^2(m+1) e_{m+1}(t)e_n(t)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{(m+1) f^2(m+1) e_{m+1}(t)e_n(t)}{(n+1) f^2(n+1) e_{n+1}(t)e_m(t)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{۲۹}$$

چون $\cos\theta_{n,m}\le 1$ است و عبارت داخل کروشه درسمت راست معادله همیشه مثبت است، معادله تنها در صورتی دارای جواب است که داشته باشیم:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{(n+1) f^2(n+1)\, e_{n+1}(t)e_m(t)}{(m+1) f^2(m+1) e_{m+1}(t)e_n(t)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{(m+1) f^2(m+1) e_{m+1}(t)e_n(t)}{(n+1) f^2(n+1) e_{n+1}(t)e_m(t)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\le 1. \tag{۳۰}$$

با تعریف z به شکل زیر

$$z\equiv\left(\frac{(n+1) f^2(n+1)\, e_{n+1}(t)e_m(t)}{(m+1) f^2(m+1) e_{m+1}(t)e_n(t)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{۳۱}$$

معادلهٔ (۳۰) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$z+\frac{1}{z}\le 2. \tag{۳۲}$$

با توجه به اینکه $z=0$ در معادلهٔ بالا صدق نمی‌کند، برای $z\neq 0$، معادله را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$(z-1)^2\le 0. \tag{۳۳}$$

همان طور که مربع یک عدد حقیقی نمی‌تواند منفی باشد، در معادلهٔ بالا، تنها رابطهٔ تساوی برقرار است. در نتیجه داریم

$$z=1, \tag{۳۴}$$

و بنابراین با توجه به معادلهٔ (۲۹) به‌دست می‌آید

$$\cos\theta_{n,m}=1. \tag{۳۵}$$

اکنون می‌توانیم نتایج رابطهٔ (۳۴) را جستجو کنیم. از معادلات (۳۱) و (۲۲) فهمیده می‌شود که $z=1$ به معنای این است که برای هر $n=0,1,\ldots$ و هر $m=0,1,\ldots$ داریم،

$$\frac{\left[D_t^f(m)\right]!\, e_0(t)}{\left[D_t^f(m-1)\right]!\, e_0(t)}=\frac{\left[D_t^f(n)\right]!\, e_0(t)}{\left[D_t^f(n-1)\right]!\, e_0(t)}\equiv F(t). \tag{۳۶}$$

تابع $F(t)$ تابعی است که باید تعیین شود. به هر حال، در مورد خاص $n=0$ در معادلهٔ (۳۶)، با استفاده از معادلهٔ (۲۰)، عبارت زیر به دست می‌آید،

$$\left[D_t^f(0)\right]! e_0(t)=\frac{d}{dt}e_0(t)=F(t)e_0(t). \tag{۳۷}$$

در نتیجه‌گیری رابطهٔ بالا از تعریف زیر نیز بهره گرفته‌ایم

$$D_t^f(-1)\equiv 1. \tag{۳۸}$$

همچنین از معادلهٔ (۳۶) برای $n=1$ عبارت زیر به دست می‌آید

$$\left[D_t^f(1)\right]!\, e_0(t)=F(t)\,\frac{d}{dt}e_0(t). \tag{۳۹}$$

با جایگذاری معادلهٔ (۳۷) در معادلهٔ (۳۹)، عبارت زیر حاصل می‌شود

$$\left[D_t^f(1)\right]! c_0(t) = F^2(t)\, c_0(t). \qquad (۴۰)$$

برای n امین مشتق نیز، عبارت زیر نتیجه می‌شود

$$\left[D_t^f(n)\right]! c_0(t) = F^{n+1}(t)\, c_0(t). \qquad (۴۱)$$

همچنین با استفاده از معادلات (۲۰) و (۴۰) داریم

$$\begin{aligned}\left[D_t^f(1)\right]! c_0(t) &= D_t^f(1) D_t^f(0) c_0(t)\\ &= \left[kf^2(1)+\frac{d}{dt}\right]\left[\frac{d}{dt}\right] c_0(t)\\ &= F^2(t) c_0(t).\end{aligned} \qquad (۴۲)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف معادلهٔ (۳۷) و استفاده در رابطهٔ بالا، معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\dot{F}(t) = -k f^2(1) F(t)\,, \qquad (۴۳)$$

با حل این معادله، $F(t)$ به صورت زیر تعیین می‌شود،

$$F(t) = e^{-k f^2(1)\, t}. \qquad (۴۴)$$

بنابراین، c_0 با استفاده از رابطهٔ (۳۷) و رابطهٔ بالا به صورت زیر به دست می‌آید

$$c_0(t) = \exp\left(\int F(t)\,dt\right) = \exp\left(-\frac{e^{-k f^2(1)\, t}}{k f^2(1)}\right). \qquad (۴۵)$$

همچنین برای تعیین فازهای $\varphi_n(t)$، از قسمت موهومی معادلهٔ (۲۸) به عبارت زیر خواهیم رسید

$$\dot{\varphi}_n(t) - \dot{\varphi}_m(t) = 0. \qquad (۴۶)$$

این معادله همراه با معادلهٔ (۳۵)، منجر به جواب زیر برای فازها می‌شود

$$\varphi_n(t) = n\theta + \theta_0(t)\,, \qquad (۴۷)$$

که در اینجا θ یک عدد حقیقی و $\theta_0(t)$ یک تابع دلخواه از زمان است.

در نهایت، با استفاده از معادلات (۲۲)، (۲۵)، (۴۱)، (۴۴)، (۴۵) و (۴۷) ضرایب $c_n(t)$ به شکل زیر به‌دست خواهد آمد

$$\begin{aligned}c_n(t) &= \frac{\exp(i\theta_0)\,\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{e^{-k f^2(1)\, t}}{k f^2(1)}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}k f^2(1)\, t}\, e^{i\theta}\right)^n}{k^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}\,\left[f(n)\right]!}\\ &= c_0(t)\frac{z^n(t)}{\sqrt{n!}\,\left[f(n)\right]!}\,,\end{aligned} \qquad (۴۸)$$

که در آن $z(t)$ و $c_0(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$z(t) \equiv k^{\frac{-1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}k f^2(1)\, t}\,\exp(i\theta)\,, \qquad (۴۹)$$

$$c_0(t) = e^{i\theta_0(t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{e^{-k f^2(1)\, t}}{k f^2(1)}\right). \qquad (۵۰)$$

بنابراین، حالت مرجح و غیر بهنجار $\left|\overline{\psi}(t)\right\rangle$ به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\left|\overline{\psi}(t)\right\rangle = c_0(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}\,\left[f(n)\right]!}\left|n\right\rangle. \qquad (۵۱)$$

در نهایت، با بهنجار کردن $\left|\overline{\psi}(t)\right\rangle$، تنها حالت مرجح و بهنجار سامانهٔ غیرخطی مزبور به شکل زیر به‌دست می‌آید

$$\left|\psi(t)\right\rangle = N_f^{-\frac{1}{2}}(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(t)}{\sqrt{n!}\,\left[f(n)\right]!}\left|n\right\rangle. \qquad (۵۲)$$

که در آن ضریب بهنجارش $N_f(t)$ با معادلهٔ زیر بیان می‌شود،

$$N_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|z(t)\right|^{2n}}{n!\left(\left[f(n)\right]!\right)^2}\,, \qquad (۵۳)$$

بسیار جالب توجه است که حالت‌هایی که با معادلهٔ (۵۲) توصیف می‌شوند، همان حالت‌های همدوس غیرخطی معرفی شده در رابطهٔ (۵) هستند. یعنی این حالت‌ها تنها حالت‌هایی هستند که خالص باقی می‌مانند. به عبارت دیگر، حالت‌های همدوس غیرخطی تنها حالت‌های مرجح سامانهٔ کاواک اتلافی غیرخطی در دمای صفر هستند. همچنین با توجه به رابطهٔ (۴۹) دیده می‌شود که در حد $t \to \infty$ داریم $z(t) \to 0$ و بنابراین حالت همدوس غیرخطی و مرجح سامانه در زمان‌های طولانی به حالت خلا $\left|0\right\rangle$ تبدیل می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا معادلهٔ عام خطی حاکم بر اتلاف یک کاواک در دمای صفر به معادلهٔ عام تغییر شکل یافتهٔ f مرتبط با یک کاواک غیرخطی تعمیم داده شد. سپس با محاسبهٔ حالت‌های مرجح سامانهٔ غیرخطی مزبور که تحت واهمدوسی به صورت خالص باقی می‌ماندند، نشان داده شد که این حالت‌ها همان حالت‌های همدوس غیرخطی‌ای هستند که از طریق تعمیم جبری حالت‌های همدوس استاندارد به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب می‌توان حالت‌های

همدوس غیرخطی را به عنوان حالت‌های مرجح یک کاواک اتلافی غیرخطی نیز تعریف نمود. به عبارت دیگر توانسته‌ایم حالت‌های همدوس غیرخطی را به روشی فیزیکی تعریف کنیم.

مراجع

1. G J Milburn, *Phys. Lett*. A **44** (1991) 5401.
2. M Schlosshauer, "*Decoherence and the Quantum-To- Classical transition*", Springer, Berlin (2007).
3. W H Zurek, *Phys. Rev*. D **24** (1981) 1516; W H Zurek, *Phys. Rev.* D **26** (1982) 1862.
4. W H Zurek, S Habib, and J P Paz, *Phys. Rev. Lett*. **70** (1993) 1187.
5. M O Scully and M S Zubairy, "*Quantum Optics*", Cambridge University Press, Cambridge (1997).
6. S M Dutra, *J. Mod. Opt*. **45** (1998) 759.
7. R J Glauber, *Phys. Rev. Lett*. **10** (1963) 84; R J Glauber, *Phys. Rev*. **130** (1963) 2529; R J Glauber, *Phys. Rev*. **131** (1963) 2766.
8. A I Solomon, *Phys. Lett*. A **196** (1994) 29; P Shanta, S Chaturvdi, V Srinivasan, and R Jagannathan, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **27** (1994) 6433; J Katriel and A I Solomon, *Phys. Rev*. A **49** (1994) 5149; R L de Matos Filho and W Vogel, *Phys. Rev*. A **54** (1996) 4560; V I Man'ko, G Marmo, E C G Sudarshan, and F Zaccaria, *Phys. Scr*. **55** (1997) 528.
9. A Mahdifar, R Roknizadeh, and M H Naderi, *J. Phys*. A **39** (2006) 7003.
10. R Roknizadeh and M K Tavassoly, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **37** (2004) 5649.
11. J Liao, X Wang, L-A Wu, and S-H Pan, J *Opt.* B: *Quantum Semiclass. Opt*. **2** (2000) 541.
12. X-G Wang and H-C Fu, *Commun. Theor. Phys*. **35** (2001) 729.
13. S J Sivakumar, J *Phys*. A: *Math*. *Gen*. **32** (1999) 3441.
14. M H Naderi, M Soltanolkotabi, and R Roknizadeh, *J. Phys.* A: *Math. Gen*. **37** (2004) 3225.
15. E Shrodinger, *Naturwissenschaften* **14** (1926) 664.

۱۶. ع مهدی‌فر، "*ساختار هندسی حالت‌های همدوس غیرخطی*"، پایان‌نامه دکتری، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه اصفهان (۱۳۸۶).

17. A M Perelomov, "*Generalized Coherent States and Their Applications*", Springer, Berlin (1986).
18. S M Dutra, *Eur. J. Phys*. **18** (1997) 194.
19. J F Poyatos, J I Cirac, and P Zoller, *Phys. Rev. Lett*. **77** (1996) 4728; D Leibfried, R Blatt, C Monroe, and D Wineland, *Rev. Mod. Phys*. **75** (2003) 281.
20. V S Shchesnovich and D S Mogilevtsev, *Phys. Rev*. A **82** (2010) 043621.
21. A J DeMaria, D A Stetser, and H Heynau, *Appl. Phys. Lett.* **8** (1966) 174.

Iranian Journal of Physics Research, Vol. 13, No. 4, 2014

Nonlinear coherent states as the preferred states of a nonlinear dissipative cavity under decoherence

E Bakhshae and A Mahdifar

Department of Physics, Faculty of Science, Shahrekord University, Shahrekord, Iran
E-mail: mahdifar_a@sci.sku.ac.ir

(Received 7 July 2012 ; in final form 4 August 2013)

Abstract
In this paper, in order to study a nonlinear dissipative cavity a linear master equation of the cavity in generalized to a nonlinear one at zero temperature. Then, it is shown that nonlinear coherent states are the only preferred states of the system under decoherence.

Keywords: decoherence, preferred states, dissipative cavity, nonlinear coherent states

For full article, refer to the Persian section