مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۴، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۹۳

بررسی شکافتگی کوچک و دیگر تکینگی‌های آیندهٔ عالم و برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نظریهٔ $F(R)$

مریم آقائی آبچویه، بهروز میرزا و حمیده نادی

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

پست الکترونیکی: m.aghaei@ph.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۱۲/۲۷ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۳/۵/۱۹)

چکیده

در عالمی که نظریهٔ گرانش $F(R)$ آن را توصیف می‌کند امکان وقوع تکینگی‌هایی در آیندهٔ عالم وجود دارد. تا کنون بررسی وقوع تکینگی‌ها در نظریهٔ $F(R)$ با انتخاب تابع مشخصی برای پارامتر هابل و محاسبهٔ $F(R)$ مربوط به هر یک از تکینگی‌ها انجام شده است. اما استفاده از پارامتر هابل ذکر شده باعث ایجاد مشکلاتی در بررسی قانون دوم ترمودینامیک می‌شود. در این مقاله با استفاده از عامل مقیاس، رفتار $F(R)$ را در نزدیکی هر یک از تکینگی‌ها مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این شرایط می‌توان برقراری یا عدم برقراری قانون دوم ترمودینامیک را در نزدیکی هر یک از تکینگی‌ها بررسی کرد. در اینجا ابتدا شکافتگی کوچک را مورد بررسی قرار داده و سپس به دیگر تکینگی‌ها می‌پردازیم. نتایج نشان می‌دهد در نزدیکی تکینگی نوع اول، قانون دوم ترمودینامیک در شرایط خاصی برقرار است و در بعضی شرایط نقض می‌شود. در تکینگی‌های شکافتگی کوچک، نوع دوم، سوم و چهارم قانون دوم ترمودینامیک همواره برقرار است.

واژه‌های کلیدی: کیهانشناسی، مدل $F(R)$، تکینگی‌های آینده در کیهان‌شناسی

۱. مقدمه

اطلاعاتی که در دو دههٔ اخیر از ابرنواخترهای نوع Ia و طیف میکروموج‌های کیهانی[۱] به دست آمده است، ثابت می‌کند که در حال حاضر جهان ما به صورت شتاب‌دار در حال انبساط است [۱]. یکی از ایده‌هایی که برای توضیح این انبساط شتاب‌دار استفاده می‌شود، نظریهٔ انرژی تاریک است. مهمترین ویژگی انرژی تاریک فشار منفی آن است، بنابراین برای انرژی تاریک $\omega = p/\rho < 0$ است. در حالتی که $\omega > -1$ باشد، انرژی تاریک از نوع کوئینتسنس[۲]، و در حالتی که $\omega < -1$ انرژی تاریک از نوع شبح[۳] وجود خواهد داشت [۲]. نتایج منتشر شده از مشاهدات رصدی نه سالهٔ طیف میکروموج‌های کیهانی نشان می‌دهد در حال حاضر در عالم $\omega < -1$ و نزدیک به -1 است [۳-۶].

۱. Cosmic microwave background

۲. Quintessence

۳. Phantom

یک روش دیگر برای توضیح انبساط شتاب‌دار عالم بررسی نظریه‌های تعمیم یافتهٔ گرانش است. این نظریه‌ها علاوه بر این که با نظریهٔ تورم ابتدای عالم سازگاری دارند، گزینه‌ای برای توضیح شتاب کنونی عالم هستند ، بنابراین در این نظریه‌ها نیازی به تعریف انرژی تاریک نیست. یکی از روش‌های تعمیم نظریهٔ گرانش این است که لاگرانژی گرانشی را به صورت تابعی از R (خمش اسکالر) در نظر بگیریم (در حالی که در نظریهٔ نسبیت عام، گرانش تنها وابسته به R (خمش اسکالر) است). این روش نظریهٔ $F(R)$ نام دارد که به عنوان ساده‌ترین مدل گرانش تعمیم یافته، توجه محققان بسیاری را به خود جلب کرده است [۷]. به عنوان مثال مدل $F(R)=R+\alpha R^{۲}$ به دلیل جملهٔ $\alpha R^{۲}$ منجر به انبساط شتاب‌دار عالم می‌شود. از طرف دیگر رابطه‌ای نزدیک بین گرانش و ترمودینامیک وجود دارد، بنابراین تغییر در نظریات گرانشی باعث تغییر در روابط ترمودینامیکی متناظر با آن نظریه می‌شود.

اگر متریک فضا زمان را متریک FRW در نظر بگیریم، شتاب‌دار بودن عالم باعث ایجاد تکینگی‌هایی در جواب‌های معادلات فریدمن می‌شود، که این تکینگی‌ها در مدل گرانشی $F(R)$ هم وجود دارند. اگر a عامل مقیاس و a_s عامل مقیاس در زمان تکینگی، t_s زمان وقوع تکینگی، ρ چگالی انرژی و p فشار باشد، انواع تکینگی‌های معادلات فریدمن را می‌توان به صورت زیر دسته بندی کرد [۱]:

نوع اول (شکافتگی بزرگ)[۱] (I):

$$t\to t_s,\ a\to\infty,\ \rho\to\infty,\ |p|\to\infty\ ,$$

نوع دوم(تکینگی ناگهانی)[۲] (II):

$$t\to t_s,\ a\to a_s,\ \rho\to\rho_s,\ |p|\to\infty\ ,$$

نوع سوم (یخزدگی بزرگ)[۳] (III):

$$t\to t_s,\ a\to a_s,\ \rho\to\infty,\ |p|\to\infty\ ,$$

در ضمن پارامتر هابل و مشتق‌های آن واگرا می‌شوند.

نوع چهارم (IV):

$$t\to t_s,\ a\to a_s,\ \rho\to ۰,\ |p|\to ۰$$

در نوع چهارم مشتق‌های مشتقات مرتبهٔ دوم و بالاتر پارامتر هابل واگرا می‌شود.

شکافتگی کوچک[۴]:

$$t\to\infty,\ a\to\infty,\ \rho\to\infty,\ |p|\to\infty\ .$$

باید به این نکته توجه داشت که بعضی اثرات فیزیکی وجود دارند که تکینگی‌ها را تعدیل می‌کنند. مانند نابهنجاری همدیس [۸,۱] که در آن با نظر گرفتن شکل مناسبی برای معادلهٔ حالتِ مادهٔ غالب در عالم و باز بهنجارش تانسور انرژی تکانه، بعضی تکینگی‌ها به انواع دیگر تبدیل می‌شوند. گرانروی تودهٔ ماده نیز می‌تواند زمان بروز تکینگی را تغییر دهد [۹]. همچنین اثرات ناشی از نیروی آنتروپی باعث اضافه شدن جملاتی به معادلات فریدمن می‌شود [۱۰]، و این جملات اضافه تغییراتی را در نوع تکینگی‌ها ایجاد می‌کنند [۱۱]. حال اگر بخواهیم تکینگی‌ها و عوامل مؤثر برآن‌ها را در نظریهٔ $F(R)$ بررسی کنیم ابتدا باید تابع $F(R)$ را که باعث ایجاد هر یک از انواع تکینگی در آیندهٔ عالم می‌شود محاسبه نموده و سپس به بررسی‌های دیگر بپردازیم. در مرجع [۱۲] با در نظر گرفتن تابع خاصی برای پارامتر هابل تابع، $F(R)$ برای هر یک از تکینگی‌های نوع اول تا چهارم محاسبه، و در مرجع [۱۳] شرط برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نظریهٔ $F(R)$ بیان شده است. اما این دو محاسبه در کنار هم نتایج فیزیکی مطلوبی ارائه نمی‌کند. پارامتر هابل معرفی شده در مرجع [۱۲] به مشکلاتی در بررسی قانون دوم ترمودینامیک منجر می‌شود. در این مقاله سعی خواهیم کرد که ابتدا با در نظر گرفتن تابعیت خاصی برای عامل مقیاس، رفتار تابع $F(R)$ که باعث ایجاد تکینگی‌های مختلف می‌شود را به صورت تحلیلی یا عددی محاسبه کنیم. سپس با معرفی قانون دوم ترمودینامیک در این نظریه، به بررسی برقراری یا عدم برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی تکینگی‌های مختلف پرداخته‌ایم.

در بخش دوم به معرفی معادلات میدان در نظریهٔ گرانشی اینشتین و نظریهٔ $F(R)$ پرداخته‌ایم. در بخش سوم شرایطی را که لازم است تا در نظریهٔ $F(R)$ هم احتمال وقوع انواع

۱. Big rip
۲. Sudden singularity
۳. Big freez
۴. Little rip

تکینگی در آیندهٔ عالم وجود داشته باشد را بیان کرده‌ایم. در آخرین بخش برقراری یا عدم برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی هر یک از انواع تکینگی را بررسی کرده‌ایم.

۲. معادلات میدان در نظریهٔ $F(R)$

در یک جهان همگن، همسانگرد و تخت که رفتار آن با متریک FRW، $\left(ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + Sin^2\theta d\phi^2\right)\right)\right)$ توصیف می‌شود، معادلات اینشتین به معادلات فریدمن می‌انجامد:

$$\frac{1}{a(t)}\frac{d^2a(t)}{dt^2} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p), \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{a(t)}\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho , \qquad (2)$$

که در این معادلات ρ چگالی انرژی عالم، p فشار عالم، G ثابت جهانی گرانش، $a(t)$ عامل مقیاس و $\dot{a}(t)$ مشتق عامل مقیاس نسبت به زمان است. این معادلات با این فرض نوشته شده‌اند که ثابت کیهان‌شناسی برابر صفر باشد. حال اگر در کنش اینشتین- هیلبرت R را با تابعی از خمش اسکالر $F(R)$ جایگزین کنیم معادلات میدان گرانشی به صورت زیر خواهند بود [۱۳]:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3F'(R)}(\rho + \rho_c), \qquad (3)$$

$$\dot{H} = \frac{-4\pi G}{F'(R)}(\rho + p + \rho_c + p_c) , \qquad (4)$$

که در آن $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ و $F'(R)$ مشتق $F(R)$ نسبت به R بوده و ρ_c و p_c به ترتیب چگالی انرژی و فشار ناشی از نظریهٔ $F(R)$ هستند و با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho_c = \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{1}{2}\left(RF'(R) - F(R)\right) - 3H\dot{R}F''(R)\right) ,$$

$$p_c = \frac{1}{8\pi G}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(F(R) - RF'(R)\right) \\ \quad + \left(2H\dot{R} + \ddot{R}\right)F''(R) + \dot{R}^2F'''(R)\end{array}\right) , \qquad (5)$$

با تعریف $\rho_{eff} = \frac{\rho_c + \rho}{F'(R)} = \frac{\rho_t}{F'(R)}$ و $p_{eff} = \frac{p_c + p}{F'(R)} = \frac{p_t}{F'(R)}$ معادلات (۳) و (۴) به صورت زیر در می‌آیند:

$$3H^2 = 8\pi G\,\rho_{eff} , \qquad (6)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho_{eff} + p_{eff}) , \qquad (7)$$

حال اگر فرض کنیم در کنش مربوط به نظریهٔ $F(R)$، توابع مناسب $P(\phi)$ و $Q(\phi)$ را طوری در نظر گرفته باشیم که [۱۴]:

$$S_{F(R)} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\left(\frac{P(\phi)R + Q(\phi)}{16\pi G}\right) + L_m\right) , \qquad (8)$$

از وردش کنش رابطهٔ (۸) نسبت به φ رابطهٔ

$$\frac{dP(\phi)}{d\phi}R + \frac{dQ(\phi)}{d\phi} = 0 , \qquad (9)$$

به دست می‌آید. با حل این معادله میدان اسکالر φ به صورت $\phi = \phi(R)$ خواهد بود. با استفاده از معادلات (۸) و (۹) تابعیت $F(R)$ به صورت زیر به دست می‌آید :

$$F(R) = P\left(\phi(R)\right)R + Q\left(\phi(R)\right) . \qquad (10)$$

بنابراین اگر توابع $P(\phi)$ و $Q(\phi)$ معلوم باشند، می‌توان تابعیت صریح $F(R)$ را به دست آورد. برای این منظور کنش (۸) را نسبت به متریک وردش می‌دهیم. با وردش کنش نسبت به متریک در فضا- زمان FRW معادلات میدان به صورت زیر خواهند بود ($\phi = \phi(t)$):

$$-6H^2P(\phi) - Q(\phi) - 6H\frac{dP(\phi)}{dt} + 16\pi G\rho = 0 , \qquad (11)$$

$$2\frac{d^2P(\phi)}{dt^2} + 4H\frac{dP(\phi)}{dt} + \left(4\dot{H} + 6H^2\right)P(\phi) + Q(\phi) + 16\pi G\rho = 0 \qquad (12)$$

با حذف $Q(\phi)$ از این دو رابطه به یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم برای $P(\phi)$ دست می‌یابیم:

$$2\frac{d^2P(\phi)}{dt^2} - H\frac{dP(\phi)}{dt} + 2\dot{H}P(\phi) + 8\pi G(\rho + p) = 0 \qquad (13)$$

چون فضا- زمان را تابع متریک FRW در نظر گرفته‌ایم، انتظار داریم خمش (R) و همهٔ توابع آن تابع زمان باشند. از طرف دیگر در تعریف کنش، آن را تابعی از $P(\phi)$ و $Q(\phi)$ در نظر گرفته‌ایم، که در آنها میدان ϕ یک میدان کمکی است که

جملات جنبشی ($\dot{\varphi}$) مربوط به آن در کنش وجود ندارد. بنابراین توابع $P(\phi)$ و $Q(\phi)$ تابع زمان خواهند بود که در نتیجه میدان φ باید تابع زمان باشد. چون میدان φ یک میدان کمکی است و جملهٔ $\dot{\varphi}$ در کنش وجود ندارد، می‌توان در ابتدای محاسبات آن را باز تعریف کرد. بنابراین معادلات را با این فرض حل می‌کنیم که $\phi = t$ و

$$a(t) = \bar{a}\exp\left(\tilde{g}(t)\right). \qquad (۱۴)$$

اگر معادلهٔ حالت بین ρ و p را به صورت $p = \omega\rho$ در نظر بگیریم و حالتی را فرض کنیم که در آن محتوای ماده در عالم صفر باشد ($\rho = ۰$)، آنگاه با استفاده از معادلهٔ (۱۴) می‌توان معادلهٔ (۱۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{d^۲P(\phi)}{d\phi^۲} - \frac{d\tilde{g}(\phi)}{d\phi}\frac{dP(\phi)}{d\phi} + ۲\frac{d^۲\tilde{g}(\phi)}{d\phi^۲}P(\phi) = ۰. \qquad (۱۵)$$

اگر بتوانیم با حل معادلهٔ (۱۵)، $P(\phi)$ را به دست آوریم، $Q(\phi)$ از رابطهٔ (۱۱) قابل محاسبه خواهد بود.

$$Q(\phi) = -۶\left(\frac{d\tilde{g}(\phi)}{d\phi}\right)^۲ P(\phi) - ۶\frac{d\tilde{g}(\phi)}{d\phi}\frac{dP(\phi)}{d\phi}, \qquad (۱۶)$$

با داشتن دو تابع $P(\phi)$ و $Q(\phi)$، می‌توان $F(R)$ را بر حسب ϕ و برای هر عالمی که با تابع عامل مقیاس معادلهٔ (۱۴) تعریف شده باشد، به دست آورد. از طرفی با وردش رابطهٔ (۸) نسبت به ϕ، می‌بینیم که باید رابطهٔ $\frac{dP(\phi)}{d\phi}R + \frac{dQ(\phi)}{d\phi} = ۰$ برقرار باشد. با استفاده از این معادله و داشتن $P(\phi)$ و $Q(\phi)$، $F(R)$ بر حسب R به دست خواهد آمد.

۳. بررسی تکینگی‌های آینده در نظریهٔ $F(R)$

اگر معادلات (۱) و (۲) را معادلات حاکم بر عالم بدانیم، می‌توان عامل مقیاس را به گونه‌ای تعریف کرد که در شرایط مختلف انواع تکینگی را ایجاد کند. در مرجع [۱۲] با فرض $H = h_۰(t_s - t)^{-\beta}$ تابع $F(R)$ برای انواع تکینگی محاسبه شده است. اما این فرض در بررسی رفتارهای ترمودینامیکی نتایج فیزیکی مناسبی ارایه نمی‌کند، زیرا این تعریف برای پارامتر هابل باعث موهومی شدن رابطهٔ برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی برخی تکینگی‌ها می‌شود. از طرفی این تعریف برای پارامتر هابل شکافتگی کوچک را برای آیندهٔ عالم پیش‌بینی نمی‌کند. اما از آنجا که شکافتگی کوچک از بسیاری جهات شبیه به شکافتگی بزرگ است، با این تفاوت که زمان تکینگی به بی‌نهایت میل می‌کند، بررسی آن در نظریهٔ $F(R)$ دارای اهمیت است و تا کنون شرایط وقوع شکافتگی کوچک در نظریهٔ $F(R)$ مورد بررسی قرار نگرفته است. به این دلیل در این‌جا ابتدا تابع $F(R)$ را برای شکافتگی کوچک به دست می‌آوریم. شکافتگی کوچک با تابع عامل مقیاسی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]

$$a = a_۰\exp\left[\alpha\left(\exp(\gamma t) - ۱\right)\right], \qquad (۱۷)$$

که در آن $\alpha = \frac{۲\sqrt{۸\pi G\rho_۰}}{۳A}$ و $\gamma = \frac{A\sqrt{۳}}{۲}$ (A یک ثابت، G ثابت جهانی گرانش و $\rho_۰$ مقدار اولیهٔ چگالی انرژی هستند). با وجود این که عامل مقیاس شکافتگی کوچک و رفتار فشار و چگالی انرژی برای آن بررسی شده است، اما بررسی قانون دوم ترمودینامیک برای آن و همچنین محاسبهٔ دقیق تابع $F(R)$ برای آن مورد توجه قرار نگرفته است. ما در اینجا در نظریهٔ $F(R)$ برقراری قانون دوم ترمودینامیک را برای شکافتگی کوچک بررسی می‌کنیم.

با داشتن تابع عامل مقیاس برای هر یک از تکینگی‌ها می‌توان رفتار تابع $F(R)$ را در هر مورد به دست آورد. در اینجا محاسبات لازم برای به دست آوردن $F(R)$ را برای عامل مقیاس معادلهٔ (۱۷) انجام می‌دهیم. سپس همین روند را برای عامل مقیاس‌های مربوط به تکینگی‌های دیگر استفاده می‌کنیم.

با قرار دادن عامل مقیاس (۱۷) در معادلات (۶) و (۷) مشاهده می‌شود که ρ_{eff} و p_{eff} هر دو در یک آیندهٔ نامحدود واگرا می‌شوند. این نوع تکینگی را شکافتگی کوچک می‌نامند. حال اگر عامل مقیاس معادلهٔ (۱۷) را با معادلهٔ (۱۴) مقایسه کنیم

$$\tilde{g}(t) = \alpha\left(\exp(\gamma t) - ۱\right). \qquad (۱۸)$$

از حل معادلهٔ (۱۵) می‌توان $P(\phi)$ را به دست آورد. سپس با استفاده از معادلهٔ (۱۱) رابطهٔ مربوط به $Q(\phi)$ قابل محاسبه خواهد بود. به این ترتیب با داشتن توابع مربوط به $P(\phi)$ و $Q(\phi)$ می‌توان از معادلهٔ (۱۰) تابع $F(R)$ را به دست آورد. با استفاده از معادلات (۱۱) و (۱۵)، و با در نظر گرفتن جملاتی از جواب این معادلات که در نزدیکی تکینگی باعث بیشترین واگرایی می‌شوند، توابع $P(\phi)$ و $Q(\phi)$ به صورت زیر خواهند بود

$$P(\phi)\sim\left(۱-۲\alpha e^{\gamma\phi}+\frac{۱}{۲}\alpha^{۲}e^{۲\phi\gamma}\right), \qquad (۱۹)$$

$$Q(\phi)\sim -۳\alpha^{۲}\gamma^{۲}e^{۲\gamma\phi}\left(-۲-۲\alpha e^{\gamma\phi}+\alpha^{۲}e^{۲\phi\gamma}\right), \qquad (۲۰)$$

که معادلهٔ (۱۹) را از حل معادلهٔ (۱۵) و در نظر گرفتن واگراترین جملهٔ آن به دست آوردیم. جواب کامل معادلهٔ دیفرانسیل (۱۵) شامل دو جمله است، که با یک محاسبهٔ عددی می‌توان نسبت جملهٔ دوم به جملهٔ اول را به صورت ϕ به توان یک عدد منفی به دست آورد، که این عدد منفی به انتخاب α و γ بستگی دارد. چون در محاسبات ما ϕ همان زمان است، پس با افزایش زمان اثر جملهٔ دوم از بین می‌رود. بنابراین چون قصد داریم رفتار عالم را در نزدیکی تکینگی بررسی کنیم، می‌توانیم فقط جملهٔ اول را در نظر بگیریم. با حذف جملهٔ دوم معادلهٔ (۱۹) به دست می‌آید (علامت تقریب را به این دلیل استفاده کرده‌ایم). با استفاده از معادلهٔ (۱۹) در معادلهٔ (۱۶) به رابطهٔ (۲۰) برای $Q(\phi)$ خواهیم رسید.

حال اگر رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) را در رابطهٔ (۹) قرار دهیم، معادله‌ای به دست می‌آوریم که از آن میدان ϕ بر حسب R به دست می‌آید و در نهایت با استفاده از معادلهٔ (۱۰) و با داشتن توابع $P(\phi)$ و $Q(\phi)$ تابعیت $F(R)$ به صورت زیربه دست می‌آید:

$$F(R)=\frac{۲R^{۲}+۱۵۰R\gamma^{۲}+۲۷\gamma^{۴}}{۹۶\gamma^{۲}} -\frac{۱۲\sqrt{۳}R\gamma\sqrt{۴R+۳\gamma^{۲}}+۹\sqrt{۳}\gamma^{۳}\sqrt{۴R+۳\gamma^{۲}}}{۹۶\gamma^{۲}}. \qquad (۲۱)$$

واضح است که چون در توابع $P(\phi)$ و $Q(\phi)$ واگراترین جملات را در نظر گرفتیم، عبارت مربوط به $F(R)$ هم از همان تقریب پیروی می‌کند. برای به دست آوردن رابطهٔ فوق از معادلهٔ $\frac{dP(\phi)}{d\phi}R+\frac{dQ(\phi)}{d\phi}=۰$ استفاده کرده‌ایم. رابطهٔ (۲۱) مربوط به عالمی است که گرانش در آن با نظریهٔ $F(R)$ تعریف می‌شود و انتظار داریم در آن شکافتگی کوچک رخ دهد.

حال اگر با استفاده از معادلات (۱۷) و (۲۱) معادلات (۳) و (۴) را بازنویسی کنیم، خواهیم دید که به دلیل واگرایی H و $\dot{H}$ در زمانهای خیلی بزرگ، ρ_c و p_c در زمان‌های بزرگ واگرا خواهند شد و چون فرض کرده‌ایم ρ و p صفر باشند، بنابراین فشار و چگالی انرژی کل عالم در زمان‌های بزرگ واگرایی دارد. این نتایج با تعریفی که ما از شکافتگی کوچک داشته‌ایم تطابق دارد. بنابراین معادلات (۱۷) و (۲۱) باعث به وجود آمدن شکافتگی کوچک در آیندهٔ عالم می‌شوند. ممکن است بتوان برای معادلات (۳) و (۴) جواب‌های دیگری نیز یافت، که باعث ایجاد انواع دیگر تکینگی در آیندهٔ عالم می‌شوند [۱۲].

با محاسبه‌ای مشابه با آنچه در اینجا برای شکافتگی کوچک بیان شد می‌توان $F(R)$ را برای انواع دیگر تکینگی هم به دست آورد اما به دلیل شکل تابع عامل مقیاس مربوط به دیگر تکینگی‌ها محاسبات تنها به صورت عددی قابل انجام خواهد بود و در نتیجه تنها رفتار $F(R)$ و مشتق‌های آن قابل مشاهده خواهد بود.

۴. ترمودینامیک در نزدیکی تکینگی‌های آینده

۱.۴ ترمودینامیک در نزدیکی شکافتگی کوچک

یکی دیگر از قوانین فیزیکی که باید در نظریهٔ $F(R)$ بررسی کرد، برقراری یا عدم برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی هر یک از تکینگی‌هاست. در مرجع [۱۳] شرط برقراری قانون دوم ترمودینامیک با در نظر گرفتن نظریهٔ $F(R)$ محاسبه شده است. ما در این بخش ابتدا شرط برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نظریهٔ $F(R)$ را معرفی کرده و سپس برقراری یا عدم برقراری آن را در نزدیکی شکافتگی کوچک بررسی می‌کنیم. سپس همان روند را برای انواع دیگر تکینگی به کار می‌بریم. برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی هر یک از

تکینگی‌ها به این معناست که رخ دادن آن نوع تکینگی از نظر ترمودینامیکی امکان‌پذیر است. از طرف دیگر نقض قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی یک تکینگی نشان دهندهٔ این است که این نوع تکینگی با این که از دیدگاه نظریهٔ گرانشی امکان‌پذیر است به دلیل ملاحظات ترمودینامیکی رخ نخواهد داد و بنابراین آن را به عنوان یک مدل فیزیکی مناسب در نظر نمی‌گیریم.

برای به دست آوردن معادلات میدان گرانشی در نظریهٔ $F(R)$ قانون اول ترمودینامیک باید رفتار غیر تعادلی داشته باشد. بنابراین در رابطهٔ کلاوزیوس[۱] یک جملهٔ اضافی وجود خواهد داشت و آنتروپی در نظریهٔ $F(R)$ به صورت زیر خواهد بود [۱۳]:

$$dS=\frac{dQ}{T}+d_cS \quad , \qquad (۲۲)$$

که در آن آنتروپی افق S، به صورت $\frac{AF'(R)}{۴G}$ تعریف می‌شود و d_cS جملاتی است که در اثر وجود تابع $F(R)$ در کنش به دست می‌آید. باید توجه داشت که در نظریهٔ گرانش اینشتین $F'(R)=۱$ بوده، و بنابراین جملهٔ d_cS در سمت راست رابطهٔ (۲۲) وجود نخواهد داشت. Q نشان دهندهٔ گرما و T دمای افق است. با در نظر گرفتن عامل مقیاس (۱۷)، آنتروپی و مشتق اول آن به شکل زیر به دست خواهند آمد:

$$S=\frac{\pi}{۲G\alpha^{۲}\gamma^{۲}}(۲e^{-۲\gamma t}+\alpha^{۲}-۴\alpha e^{-\gamma t}) \quad , \qquad (۲۳)$$

که چون γ مثبت است، S و $\dot{S}$ کمیت‌های مثبت هستند. اما باید توجه داشت که رفتار آنتروپی و مشتق آن بستگی به کنش گرانشی دارد که از آن استفاده می‌کنیم.

برای محاسبهٔ قانون دوم ترمودینامیک در هر نظریهٔ گرانشی باید از معادلهٔ گیبس استفاده کنیم. معادلهٔ گیبس برای تمام محتوای ماده و انرژی داخل افق به صورت [۱۶] :

$$T_t dS_t=d(\rho_tV)+p_tdV \qquad (۲۴)$$

است که در آن S_t و T_t به ترتیب آنتروپی و دمای کل داخل افق هستند. از طرف دیگر برای آنتروپی روی افق داریم [۱۳] :

$$T\,dS+T\,d_cS=-dE_t+W_tdV \quad , \qquad (۲۵)$$

در این معادله‌ها آنتروپی و دمای مربوط به افق ظاهری عالم را با S و T نشان داده‌ایم و dE و dV تغییرات انرژی و حجم افق است و از طرف دیگر داریم $T_t=bT$. با توجه به روابط (۲۴) و (۲۵) قانون دوم ترمودینامیک با معادلهٔ زیر تعریف خواهد شد [۱۶]:

$$\dot{S}+\frac{\partial(d_cS)}{\partial t}+\dot{S}_t\geq ۰. \qquad (۲۶)$$

اگر در رابطه‌های (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) از تعریف انرژی کل E_t و چگالی کل کار W_t استفاده کنیم که به صورت $E_t=V\rho_t$ و $W_t=\frac{۱}{۲}(\rho_t-p_t)$ است، قانون دوم ترمودینامیک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۱-b)\dot{\rho}_tV+\left(۱-\frac{b}{۲}\right)(\rho_t+p_t)\dot{V}\geq ۰. \qquad (۲۷)$$

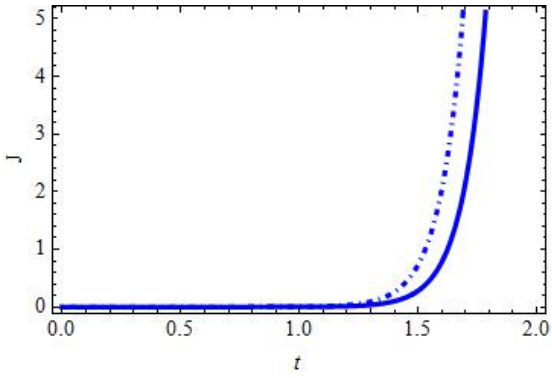
با استفاده از معادلات (۳) و (۴) و با توجه به این که حجم با رابطهٔ $V=\frac{۴}{۳}\pi R_H^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi\frac{۱}{H^{۳}}$ تعریف می‌شود، قانون دوم ترمودینامیک در معادلهٔ (۲۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود [۱۳]:

$$\frac{۱}{۲G}\frac{۱}{H^{۴}}J\geq ۰,$$
$$J=(۱-b)H^{۳}\dot{R}F''(R)+۲(۱-b)H^{۲}\dot{H}F'(R)+(۲-b)\dot{H}^{۲}F'(R) \qquad (۲۸)$$

در رابطهٔ (۲۸) اگر بین افق و داخل آن تعادل گرمایی وجود داشته باشد، $b=۱$ خواهد بود. بنابراین برقراری یا عدم برقراری قانون دوم ترمودینامیک در تکینگی‌ها بستگی به مثبت یا منفی بودن J دارد. رابطهٔ (۲۷) شرط برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نظریهٔ $F(R)$ است و نشان می‌دهد که آنچه برای آیندهٔ عالم پیش‌بینی می‌کنیم، از دیدگاه ترمودینامیکی احتمال وقوع دارد، یا رخ دادن آن به دلیل نقض قوانین ترمودینامیکی امکان‌پذیر نیست. تا اینجا سعی کرده‌ایم روابط مربوط به تابعیت $F(R)$، آنتروپی و مشتق آنتروپی نسبت به زمان را در شکافتگی کوچک محاسبه کنیم. با داشتن این توابع و با توجه به رابطهٔ (۲۸) در موقعیتی هستیم که می‌توانیم برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی شکافتگی کوچک را بررسی کنیم. مشاهده می‌شود که برای معادلهٔ (۲۱) و با عامل مقیاس معادلهٔ (۱۷) که منجر به شکافتگی کوچک

---

۱. Clausius



شکل ۱. نمودار J بر حسب زمان به ازای $b=1/5$ (خط نقطه‌چین) و $b=7/10$ (خط ممتد). قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی شکافتگی کوچک برقرار است. این نتیجه مستقل از مقدار پارامترهای موجود در روابط است.

می‌شود، J مثبت بوده و بنابراین قانون دوم ترمودینامیک برقرار است. این نتیجه برای تمام مقادیر مجاز b ($0<b\leq 1$) برقرار است. نتیجهٔ بررسی برقراری معادلهٔ (۲۸) در نزدیکی شکافتگی کوچک در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

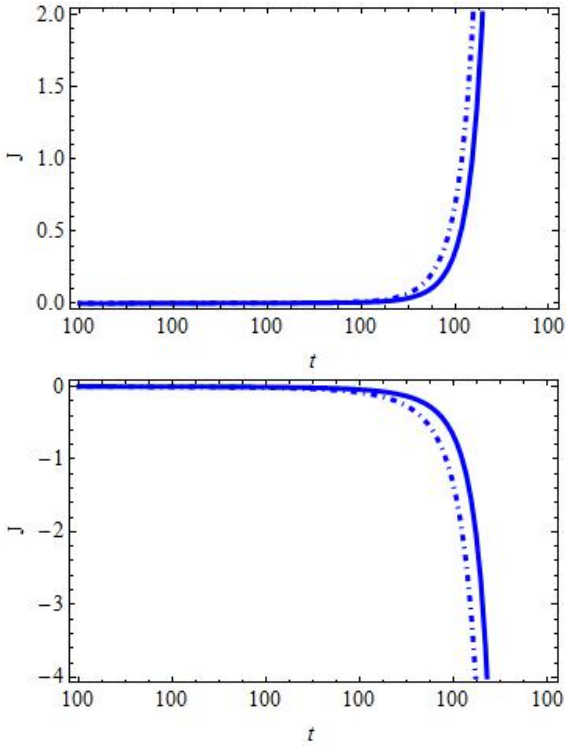
۲.۴. ترمودینامیک در نزدیکی سایر تکینگی‌ها

به دلیل مشکلاتی که در پارامتر هابل $H=h_0(t_s-t)^{-\beta}$ وجود دارد، عامل مقیاس را به گونه‌ای تعریف کرده‌ایم که بدون نقض قوانین ترمودینامیک بتوان وقوع هر یک از تکینگی‌ها را به عنوان گزینه‌ای برای آیندهٔ عالم در نظر گرفت. در واقع بجای تعریف یک تابعیت واحد برای عامل مقیاس انواع تکینگی (که تنها تغییر یک پارامتر نوع تکینگی را تغییر می‌دهد)، برای هر یک از تکینگی‌ها تابع عامل مقیاس خاصی در نظر می‌گیریم.

۱.۲.۴. تکینگی نوع اول

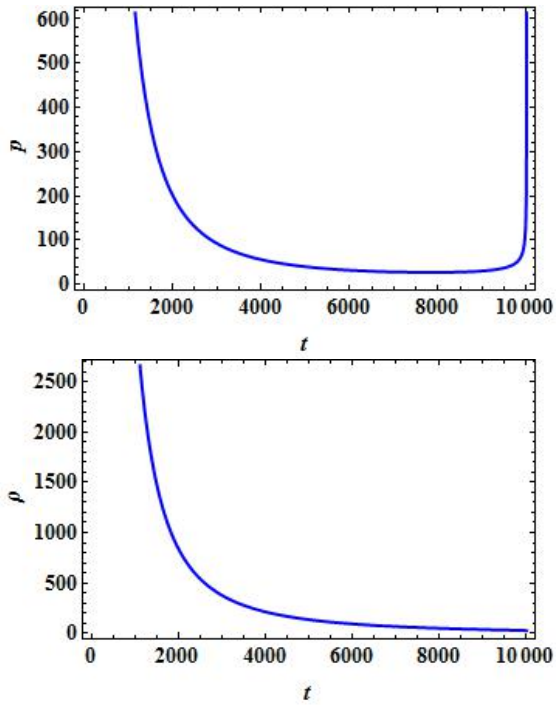
اگر بخواهیم تابع عامل مقیاس را به گونه‌ای معرفی کنیم که در $t=0$ عامل مقیاس مقدار صفر داشته باشد و در یک آیندهٔ محدود عامل مقیاس به بی‌نهایت میل کند، می‌توان عامل مقیاس را به صورت زیر نوشت [۱]:

$$a(t)=a_0\left(\frac{t}{t_s-t}\right)^n, \qquad n>0 \qquad (۲۹)$$



شکل۲. نمودار J بر حسب زمان به ازای $b=1/5$ (خط نقطه‌چین) و $b=7/10$ (خط ممتد) و $n=2$، $t_s=100$، $P(99/999)=0/1$ و $\dot{P}(99/999)=0/1$ (شکل پایینی) و $n=0/9$ (شکل بالایی). برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی شکافتگی بزرگ وابسته به شرایط اولیه‌ای است که در نظر گرفته می‌شود. در شکل‌های بالا شرایط اولیه یکسان است، اما تغییر در مقدار n نتیجه را تغییر داده است.

با استفاده از عامل مقیاس (۲۹) در معادلات (۱۵)، (۱۶) و (۲۸) مشاهده می‌شود که برای تکینگی نوع اول برقراری یا عدم برقراری قانون دوم ترمودینامیک وابسته به شرایط اولیه است. با انتخاب شرایط اولیهٔ متفاوت، مقادیری از n وجود خواهد داشت که در آن قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود. به عبارت دیگر با ثابت نگه داشتن n و تغییر شرایط اولیه، ممکن است حالتی را انتخاب کنیم که در آن قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود، یا از طرف دیگر با ثابت نگه داشتن شرایط اولیه و تغییر دادن n، ممکن است بتوان حالتی را یافت که در آن قانون دوم ترمودینامیک نقض شود. شرایط اولیه‌ای که برای بررسی قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی تکینگی‌ها نیاز داریم، مربوط به مقدار نهایی تابع $P(\phi)$ و مشتق آن نسبت به زمان است. نتیجهٔ محاسبات برای تکینگی نوع اول در شکل ۲ آمده است.



شکل ۳. فشار و چگالی انرژی در تکینگی نوع دوم به ازای $n=۱/۵$ و $q=۰/۵$.

نقض قانون دوم ترمودینامیک به این معناست که عامل مقیاس انتخاب شده مناسب نبوده است. واضح است که هر عامل مقیاس انتخابی با کلیهٔ شرایط فیزیکی مطابقت ندارد. در اینجا قانون دوم ترمودینامیک به عنوان یک شرط مهم برای انتخاب یک عامل مقیاس مناسب (یا به عبارت دیگر انتخاب صحیح n) مورد استفاده قرار گرفته است.

۲.۲.۴. تکینگی نوع دوم

تکینگی نوع دوم شرایطی را توصیف می‌کند که بر اساس ان عامل مقیاس باید در زمان $t=۰$ مقدار صفر و در یک آیندهٔ محدود مقداری محدود داشته باشد، در حالی که فشار واگرا می‌شود و چگالی انرژی محدود باقی می‌ماند. عامل مقیاسی با تابع زیر این شرایط را ایجاد می‌کند [۱۷]

$$a(t)=۱+(a_s-۱)\left(\frac{t}{t_s}\right)^q-\left(۱-\frac{t}{t_s}\right)^n,\quad ۱<n<۲,\ ۰<q<۱ \qquad (۳۰)$$

که در آن a_s عامل مقیاس در لحظهٔ تکینگی و t_s زمان رخ دادن تکینگی هستند. همان‌طور که بیان شد در این حالت باید محاسبات را به صورت عددی انجام داد. نتایج نشان می‌دهد که قانون دوم ترمودینامیک برای تکینگی نوع دوم به ازای تمام مقادیر پارامترهای موجود و با شرایط اولیهٔ مختلف، برقرار است. نتیجهٔ بررسی قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی تکینگی نوع دوم در شکل ۳ و ۵ قابل مشاهده است.

۳.۲.۴. تکینگی نوع سوم

تکینگی نوع سوم شرایطی را توصیف می‌کند که بر اساس آن عامل مقیاس باید در زمان $t=۰$ مقدار صفر و در یک آیندهٔ محدود، مقداری محدود داشته باشد. در حالی که فشار و چگالی انرژی واگرا می‌شود. عامل مقیاسی با تابع زیر این شرایط را ایجاد می‌کند [۱۷]

$$a(t)=۱+(a_s-۱)\left(\frac{t}{t_s}\right)^q-\left(۱-\frac{t}{t_s}\right)^n,\quad ۰<n<۱,\ ۰<q<۱ \qquad (۳۱)$$

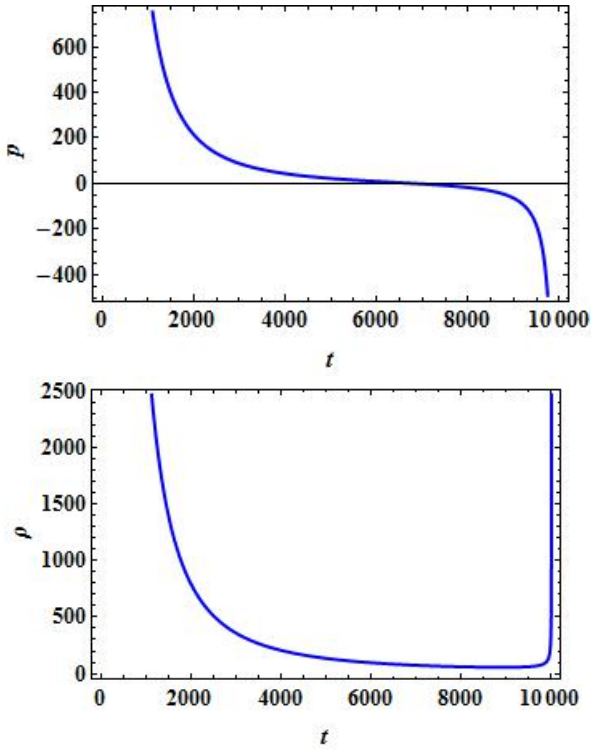
همان طور که بیان شد در این حالت باید محاسبات را به صورت عددی انجام داد. نتایج نشان می‌دهد که قانون دوم ترمودینامیک برای تکینگی نوع سوم به ازای تمام مقادیر پارامترهای موجود و در شرایط اولیهٔ مختلف، برقرار است. نتیجهٔ بررسی قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی تکینگی نوع سوم در شکل ۴ و ۵ قابل مشاهده است.

۴.۲.۴. تکینگی نوع چهارم

تکینگی نوع چهارم شرایطی را توصیف می‌کند که بر اساس آن عامل مقیاس باید در زمان $t=۰$ مقدار صفر و در یک آیندهٔ محدود، مقداری محدود داشته باشد. در حالی که فشار و چگالی انرژی هم به سمت صفر میل می‌کند. عامل مقیاسی با تابع زیر این شرایط را ایجاد می‌کند [۱۸]:

$$a(t)=c_۰(t_s-t)^\eta+c_۱(t_s-t)^\delta+c_۲(t_s-t)^\lambda+\ldots\ldots, \qquad (۳۲)$$
$$\eta<\delta<\lambda<\ldots\ldots,\qquad \eta=۰,\ \delta\geq ۲,\ \lambda>\delta$$

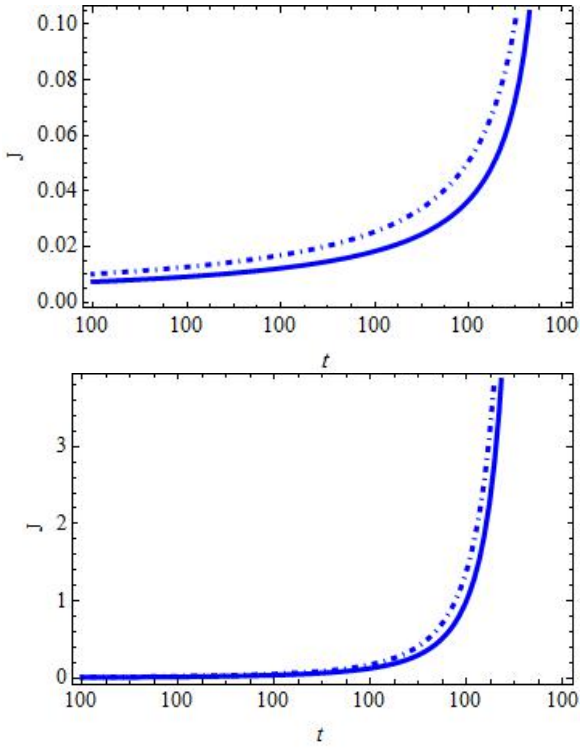
نتایج نشان می‌دهد که قانون دوم ترمودینامیک برای تکینگی نوع چهارم به ازای تمام مقادیر پارامترهای موجود و در شرایط اولیهٔ مختلف، برقرار است. نتیجهٔ بررسی قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی تکینگی نوع چهارم در شکل ۶ قابل مشاهده است. نتایج ذکر شده برای تمامی مقادیر مجاز b ($۰<b\leq ۱$) برقرار است.



شکل ۴. فشار (بالا) و چگالی انرژی (پایین) در تکینگی نوع سوم به ازای $n = ۰/۵$ و $q = ۰/۵$.

۵. نتیجه‌گیری

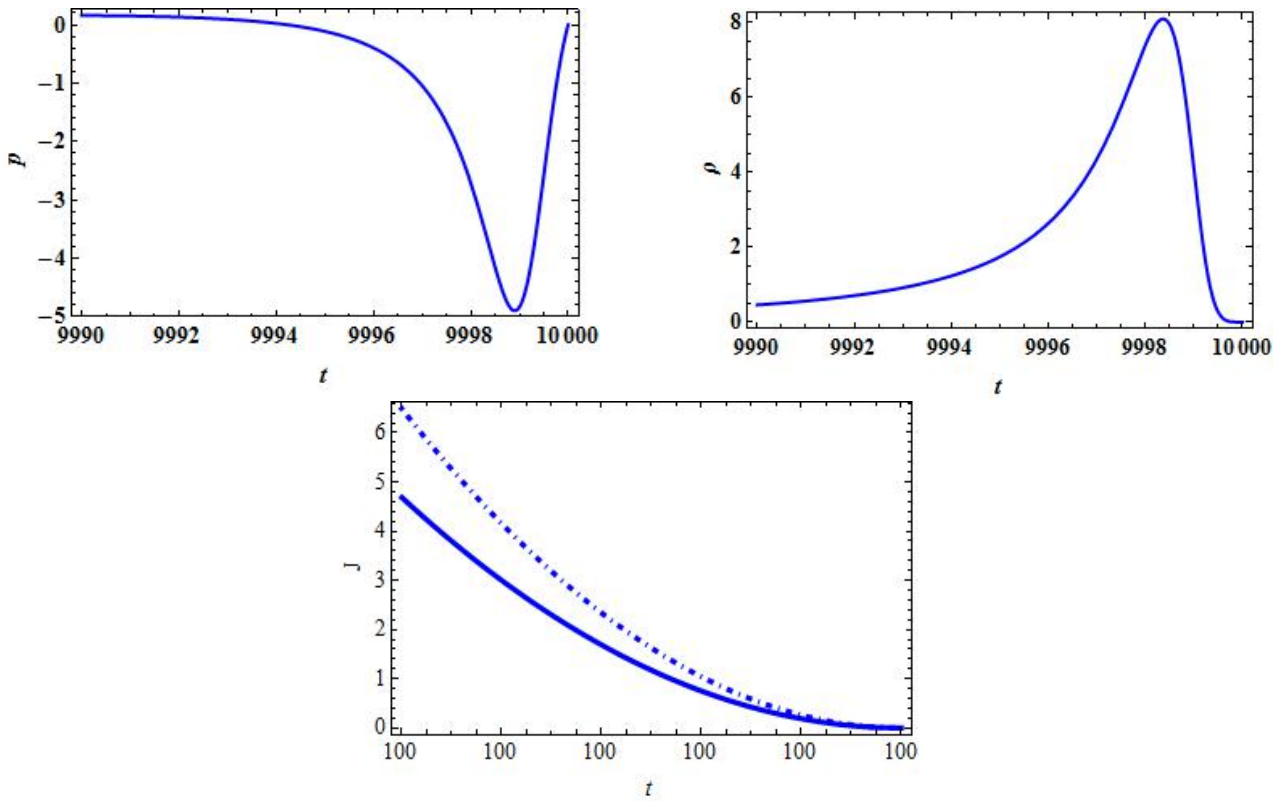
نظریهٔ گرانشی $F(R)$ به عنوان یک نظریهٔ گرانشی تعمیم یافته توانایی توضیح تورم ابتدای عالم و شتاب کنونی عالم را دارد. همچنین در عالمی که با گرانش $F(R)$ توصیف می‌شود احتمال وقوع انواع مختلف تکینگی در آیندهٔ عالم وجود دارد. در این مقاله به طور خاص تابع $F(R)$ را به صورت تحلیلی و به گونه‌ای به دست آوردیم که وقوع شکافتگی کوچک را در آیندهٔ عالم نشان می‌دهد و در مرحلهٔ بعد همان روش را برای بررسی انواع دیگر تکینگی، به صورت عددی استفاده کردیم. سپس به محاسبهٔ شرط برقراری قانون دوم ترمودینامیک در نظریهٔ $F(R)$ پرداختیم. بررسی این شرط برای شکافتگی کوچک نشان می‌دهد که وقوع شکافتگی کوچک و تکینگی نوع دوم، سوم و چهارم قانون دوم ترمودینامیک را نقض نمی‌کند. در نزدیکی تکینگی نوع اول با در نظر گرفتن شرایط اولیهٔ مناسب قانون دوم ترمودینامیک برقرار خواهد بود، اما با تغییر دادن مقدار n و ثابت نگه داشتن شرایط اولیهٔ،



شکل ۵. نمودار J بر حسب زمان به ازای $b = ۱/۵$ (خط نقطه‌چین) و $b = ۷/۱۰$ (خط ممتد)، در نزدیکی تکینگی نوع دوم (شکل بالایی)، و در نزدیکی تکینگی نوع سوم (شکل پایینی). قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی تکینگی نوع دوم و سوم برقرار است.

مقادیری از n وجود خواهند داشت که به ازای آنها قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود. در عین حال با ثابت نگه داشتن مقدار n و تغییر شرایط اولیه ممکن است بتوان شرایط اولیه‌ای یافت که در آن قانون دوم ترمودینامیک نقض نشود. نقض قانون دوم ترمودینامیک به این معناست که عامل مقیاس انتخاب شده مناسب نبوده است. واضح است که هر عامل مقیاس انتخابی با کلیه ی شرایط فیزیکی مطابقت ندارد.

قانون دوم ترمودینامیک در نزدیکی تکینگی نوع چهارم برقرار است. در اینجا قانون دوم ترمودینامیک به عنوان یک شرط مهم برای انتخاب یک عامل مقیاس مناسب مورد استفاده قرار گرفته است. باید توجه داشت که معرفی مواد جدید می‌تواند این مشکل را حل کند، اما این دقیقاً به معنای انتخاب مقدار دیگری برای n یا به عبارتی انتخاب جدیدی برای عامل مقیاس است. اما این نکته قابل ذکر است که اگر در یک نظریهٔ کلاسیکی و در فشار و چگالی انرژی کم قانون دوم



شکل۶. فشار و چگالی انرژی در تکینگی نوع چهارم به ازای $\eta = 0$، $\delta = 3$ و $\lambda = 4$ (شکل‌های بالایی) و نمودار J بر حسب زمان به ازای $b = 1/5$ (خط نقطه چین) و $b = 7/10$ (خط) (شکل پایین).

ترمودینامیک برقرار باشد اما در فشار و چگالی انرژی بسیار بالا (حد کوانتومی)، قانون دوم ترمودینامیک نقض شود، آنگاه ممکن است تصحیحات کوانتومی نقش مهمی داشته باشند. از آنجا که در فشار و چگالی انرژی بسیار بالا ماده رفتار کوانتومی از خود نشان می‌دهد، می‌توان انتظار داشت که در این حالت تصحیحات کوانتومی باعث سازگاری نظریه با قانون دوم ترمودینامیک شوند. در مسئلهٔ بررسی شده در این مقاله حتی در حالت کلاسیک نیز قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود و بنابراین تصحیحات کوانتومی تأثیری در رفع این مشکل ندارند. به عبارت دیگر تصحیحات کوانتومی نمی‌توانند حالت کلاسیکی یک سیستم را تغییر دهند. بنابراین در حالتی که نقض قانون دوم ترمودینامیک در محدودهٔ فشار و انرژی کلاسیک ماده رخ می‌دهد، تنها با انتخاب عامل مقیاس(یا ماده) مناسب می‌توان برقراری قانون دوم ترمودینامیک را تضمین کرد

مراجع

1. S Nojiri, S D Otintsov, and S Tsujikawa, *Phys. Rev.* D **71** (2005) 06304.
2. S J M Houndjo, *Europhys. Lett*. **92** (2010) 10004.
3. G F Hinshaw *et al*., *Astrophy. J. Supl. Ser*. **208** (2013) 19.
4. M Chevallier and D Polarski, *Int. J. Mod. Phys*. D **10** (2001) 213.
5. E V Linder, *Phys. Rev. Lett*. **90** (2003) 091301.
6. E Komatsu *et al*. *Astrophys. J .Suppl*. **192** (2011) 18.
7. T P Sotoriou, and V Faraoni, *Rev. Mod. Phy*. **82** (2010), 451.
8. S J M Houndjo, *Europhys. Lett*. **92** (2010) 10004.
9. I Brevik and O Grobunova, *Eur. Phys. J.* C **56** (2008) 425.
10. D A Easson, P H Frampton, and G F Smoot, *Phys. Lett*. B **696** (2011) 273.
11. M Aghaei Abchouyeh and B Mirza, *Iran. J. Phys. Res*. **11**, 4 (2012), 339.
12. K Bamba, "*The Casimir Effect and Cosmology*", Tomsk State Pedagogical University (2008) 142.
13. K Bamba, C Geng, *Phys. Lett*. B **679**, (2009) 282.

14. K Bamba, S Nojiri, and S D Odintsov, JCAP **10** (2008) 045.
15. A V Astashenok, S Nojiri, S D Odintsov, and A V Yurov, *Phys. Lett.* B **709** (2012) 396.
16. S F Wu, B Wang, G H Yang, and P M Zhang, *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 235018.
17. J D Barrow, *Class. Quantum Grav*. **21** (2004) L79.
18. L Fernández-Jambrina, *Journal of Physics*: *Conference Series* **314** (2011) 012061.