

بررسی درهم تنیدگی و انتقال از دور حالت های همدوس دوتایی درهم تنیده نوسانگر هماهنگ

اردشیر رابعی، اردلان فتاحی زاده

دانشکده علوم، دانشگاه رازی، باغ ابریشم، کرمانشاه

پست الکترونیکی: rabeie@razi.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۳/۱۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۵/۲۶)

چکیده

در این مقاله حالت های همدوس درهم تنیده دوتایی نوسانگر هماهنگ را با استفاده از رونوشت حالت های همدوس نوسانگر هماهنگ ایجاد می نماییم. نشان خواهیم داد که اگر این حالت های درهم تنیده، در محیط خلاء جاسازی شود، درهم تنیدگی آنها کاهش می یابد، اما نه به طور کامل. همچنین به منظور بررسی ترانسانی، هماندهی مطلوب این حالت ها را مورد ارزیابی قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: حالت های همدوس، درهم تنیدگی کوانتومی، ترانسانی کوانتومی

۱. مقدمه

در این مقاله به بررسی درهم تنیدگی^۱ و ترانسانی^۲ حالت های همدوس دوتایی درهم تنیده نوسانگر هماهنگ خواهیم پرداخت. انگیزه بررسی حالت های همدوس^۳ این است که این حالت ها بسادگی ایجاد می شوند و برای استفاده مطمئن هستند [۱ و ۲].

درهم تنیدگی کوانتومی یک پدیده مکانیک کوانتومی بدون تفسیر کلاسیکی است که حالت های کوانتومی دو یا چند دستگاه، مجبورند با ارجاع به یکدیگر توصیف شوند، حتی اگر

دستگاه های منفرد، جدا شده باشند [۳]. درهم تنیدگی کوانتومی فهم پردازش اطلاعات کوانتومی شامل انتقال از دور، رمزنگاری^۴ و محاسبات کوانتومی^۵ را ممکن می سازد [۴ و ۵]. حالت های همدوس درهم تنیده بعنوان منبع در ترانسانی کوانتومی یا در شبکه های کوانتومی استفاده می شوند [۶]. در این کار در بخش اول، مروری کوتاه بر نسخه برداری ناقص حالت های همدوس خواهیم داشت. سپس در بخش دوم حالت های همدوس درهم تنیده دوتایی نوسانگر هماهنگ را با استفاده از رونوشت ناقص^۶ حالت های همدوس نوسانگر هماهنگ

۴.Quantum cryptography

۵.Quantum computation

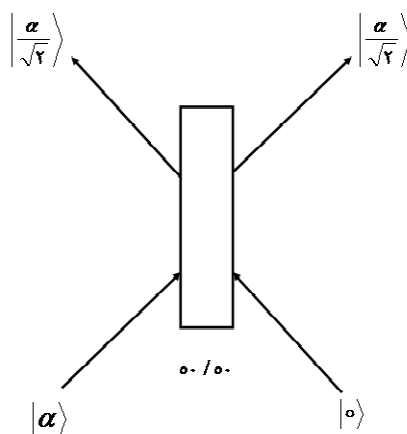
۶.Imperfect cloning

۱. Entanglement

۲.Teleportation

۳.Coherent states

حال اگر دوباره دو حالت خروجی $\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle$ و $\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle$ وارد شکافنده پرتوی $50/50$ متعادل شده دیگری شوند، دو حالت همدوس $|\alpha\rangle$ و $|0\rangle$ اولیه، حالت‌های خروجی جدید خواهند بود، بدون این که حالت‌های اولیه مختل شده باشند. این مختل نشدن حالت‌ها نشان‌دهنده جنبه غیرتخریبی حالت‌های همدوس است.



شکل ۱. شکافنده پرتوی $50/50$ که در یک روش خطی دو میدان ورودی را به دو میدان خروجی تبدیل می‌کند.

۳. حالت‌های همدوس درهم‌تنیده نوسانگر هماهنگ

با استفاده از رونوشت ناقص حالت‌های همدوس برای حالت $|Q_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle)$ که N ضریب بهنجارش و $|\alpha\rangle$ و $|-\alpha\rangle$ دو حالت همدوس نوسانگر هماهنگ با دامنه‌های α و $-\alpha$ هستند، داریم:

$$|Q_\alpha\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle) \otimes |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\left| -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \right). \quad (2)$$

این دو حالت، حالت‌های همدوس درهم‌تنیده نوسانگر هماهنگ هستند. اگر دو حالت همدوس $|Q_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle)$ و $|0\rangle$ وارد شکافنده پرتوی $50/50$ متعادل شده، مطابق شکل ۱ شوند، حالت‌های خروجی بصورت زیر خواهند بود:

۴. نابودی کانال اندازه‌ای از درهم‌تنیدگی

زمانی که کانال درهم‌تنیده زمانی که کانال‌ها نامرتب می‌شوند و هر کدام یک حالت آمیخته با عملگر چگالی $\rho(\tau)$ (زمان ارتباطی^۴ را بیان می‌کند) می‌شود. برای دانستن وابستگی زمانی $\rho(\tau)$ باید معادله اصلی زیر را حل کنیم [۸]:

$$\hat{L}_\rho = -\sum_i \gamma_i (a_i^\dagger \rho + \rho a_i^\dagger) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \hat{J}_\rho + \hat{L}_\rho, \quad \hat{J}_\rho = \gamma \sum_i a_i \rho a_i^\dagger,$$

۲. رونوشت ناقص حالت‌های همدوس

در مرجع [۷] نشان داده شده است که می‌توان حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ $|\alpha\rangle$ با دامنه α را به طور ناقص نسخه‌برداری کرد:

$$|\alpha\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \otimes \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle, \quad (1)$$

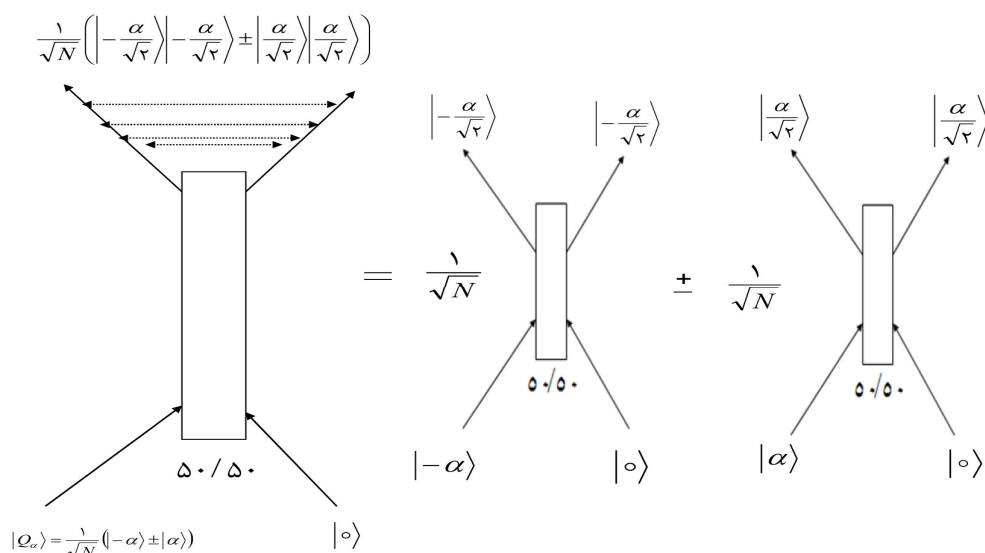
که در آن $|0\rangle$ خلاء بهنجار شده است. اگر دو حالت همدوس $|\alpha\rangle$ و $|0\rangle$ وارد شکافنده پرتوی $50/50$ متعادل شده در شکل ۱ شوند، حالت‌های خروجی $\left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle$ و $\left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle$ را خواهیم داشت.

۳.Embedded

۴.Decoherence time

۱.Mixed channel

۲.Optimal fidelity



شکل ۲. شکافنده پرتوی ۵۰/۵۰ متعادل شده: اثر ساده بر روی حالت‌های همدوس - حالت‌های همدوس برهم‌نهیده: درهم‌تنیدگی درین مدهای خروجی.

زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\Psi_+(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_\Theta}} \left(\cos(\Theta) \left| \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle - \sin(\Theta) \left| -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \right), \quad (7)$$

$$|\Psi_-(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_\Theta}} \left(-\sin(\Theta) \left| \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle + \cos(\Theta) \left| -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \right), \quad (8)$$

که:

$$N_\Theta = \cos^2(\Theta), \quad \sin(\Theta) = \exp(-t^2 \alpha^2) \quad (9)$$

با استفاده از رابطه‌های (۷) و (۸) می‌توان عبارات زیر را برای بیان $\rho^\zeta(\tau)$ برحسب پایه‌های متعامد بدست آورد:

$$\left| \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle = \cos(\Theta) |\Psi_+(\tau)\rangle + \sin(\Theta) |\Psi_-(\tau)\rangle, \quad (10)$$

$$\left| -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle = \sin(\Theta) |\Psi_+(\tau)\rangle + \cos(\Theta) |\Psi_-(\tau)\rangle, \quad (11)$$

شرط لازم و کافی جداپذیر بودن دستگاه دوقسمتی دوبعدی، مثبت بودن انتقالات پاره‌ای ماتریس چگالی ρ^{T_2} است [۸]، یعنی انتقالات پاره‌ای ماتریس چگالی ρ را در نظر بگیرید. ماتریس چگالی ρ جدای نشدنی است، اگر ρ^{T_2} یک یا چند ویژه مقدار منفی باشد [۱۰]. اندازه درهم‌تنیدگی E بصورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$E = -2 \sum_i \lambda_i^-, \quad (12)$$

که در آن λ_i^- یک یا چند ویژه مقدار منفی ρ^{T_2} هستند و $0 \leq E \leq 1$ با استفاده از رابطه‌های (۶)، (۱۰) و (۱۱) می‌توان

که در آن γ نرخ نابودی انرژی است. حل این معادله بصورت زیر می‌باشد:

$$\rho(\tau) = e^{[(J_\rho + \hat{L}_\rho)\tau]} \rho(0), \quad (4)$$

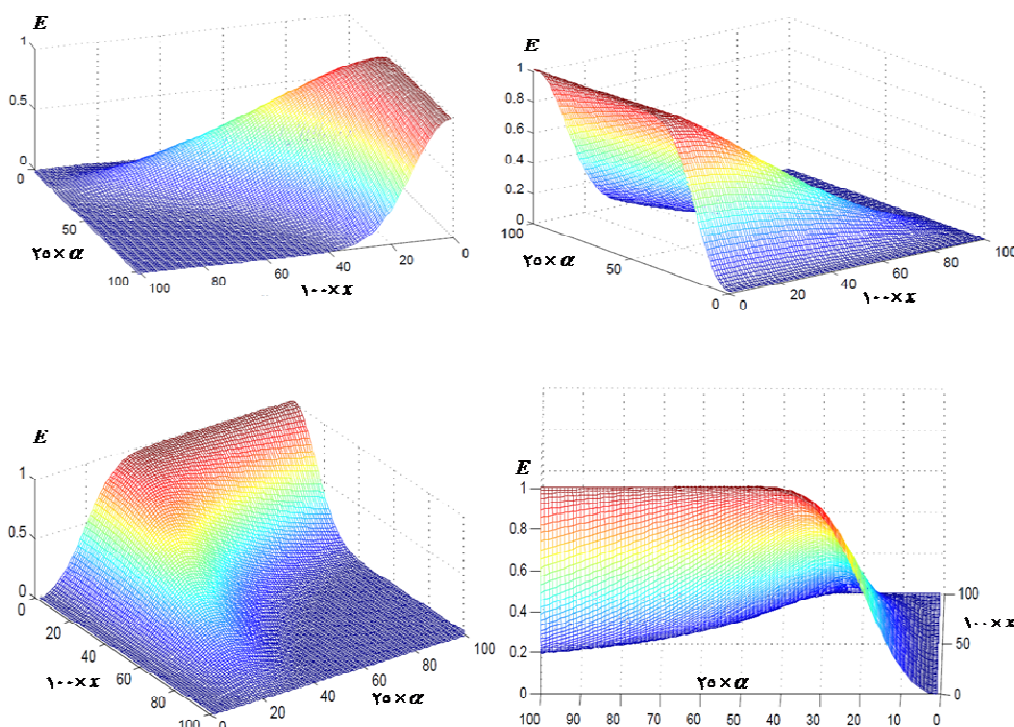
که در آن:

$$e^{[(J_\rho + \hat{L}_\rho)\tau]} |\alpha\rangle \langle \beta| = \langle \beta | \alpha \rangle^{-t^2} |\alpha t\rangle \langle \beta t|. \quad (5)$$

و داریم $t = e^{-(\frac{1}{2})\gamma\tau}$. برای قسمت‌های بعدی، زمان برهم‌کنش بهنجار $x = \sqrt{1-t^2}$ را معرفی می‌کنیم. با استفاده از حل رابطه (۳) برای کانال درهم‌تنیده ————— کردیم که بصورت زیر درآمد:

$$\begin{aligned} \rho^\zeta(\tau) = & \frac{1}{N} \left[\left| -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \left\langle -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \left\langle -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \right. \\ & + e^{-2\alpha^2 x^2} \left| \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \left\langle -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \left\langle -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \\ & + \left| \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \left\langle \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \left\langle \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \\ & \left. + e^{-2\alpha^2 x^2} \left| -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle -\frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \left\langle \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \left\langle \frac{t\alpha}{\sqrt{2}} \right| \right], \end{aligned} \quad (6)$$

وابستگی زمانی پایه‌های متعامد را همانند مرجع [۹]، بصورت



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار اندازه درهم‌تنیدگی E بر حسب زمان بهنجارش x و دامنه $0 \leq \alpha \leq 4$ (نمودار در چهار زاویه مختلف نشان داده شده است).

$$B = \frac{(\cos^\gamma(\Theta)\sin(\Theta) + \cos(\Theta)\sin^\gamma(\Theta)) \left(1 + e^{-\gamma\alpha^\gamma x^\gamma}\right)}{N},$$

$$C = \frac{\left(\left(\cos^\gamma(\Theta) + \sin^\gamma(\Theta)\right) e^{-\gamma\alpha^\gamma x^\gamma} + \gamma \cos^\gamma(\Theta)\sin^\gamma(\Theta)\right)}{N},$$

$$D = \frac{\gamma \cos^\gamma(\Theta)\sin^\gamma(\Theta) \left(1 + e^{-\gamma\alpha^\gamma x^\gamma}\right)}{N}, \quad (14)$$

اندازه‌ای از درهم‌تنیدگی با وابستگی زمانی هم به صورت زیر خواهد شد:

$$E = -\gamma(D - C) \quad (15)$$

همان طور که از نمودار شکل ۳ (نموداری است که در چهار زاویه مختلف نشان داده شده است) آشکار است، در زمان اولیه حالت $\langle \gamma \rangle$ ، با افزایش دامنه در بازه $0 \leq \alpha \leq 4$ ، درهم‌تنیدگی آن افزایش می‌یابد و با بزرگ‌تر شدن بیشتر دامنه، حالت درهم‌تنیدگی بیشینه دارد ($E(\tau=0)=1$). حالت آمیخته $\rho^\zeta(\tau)$ در همه زمان‌های برهمکنش $\tau < \infty$ و برای همه دامنه‌ها در بازه $0 \leq \alpha \leq 4$ ، درهم‌تنیده باقی می‌ماند.

$\rho^\zeta(\tau)$ را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho^\zeta(\tau) = \begin{pmatrix} A & B & B & C \\ B & D & D & B \\ B & D & D & B \\ C & B & B & A \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \left(\rho^\zeta(\tau)\right)^{T_\gamma} = \begin{pmatrix} A & B & B & D \\ B & D & C & B \\ B & C & D & B \\ D & B & B & A \end{pmatrix}$$

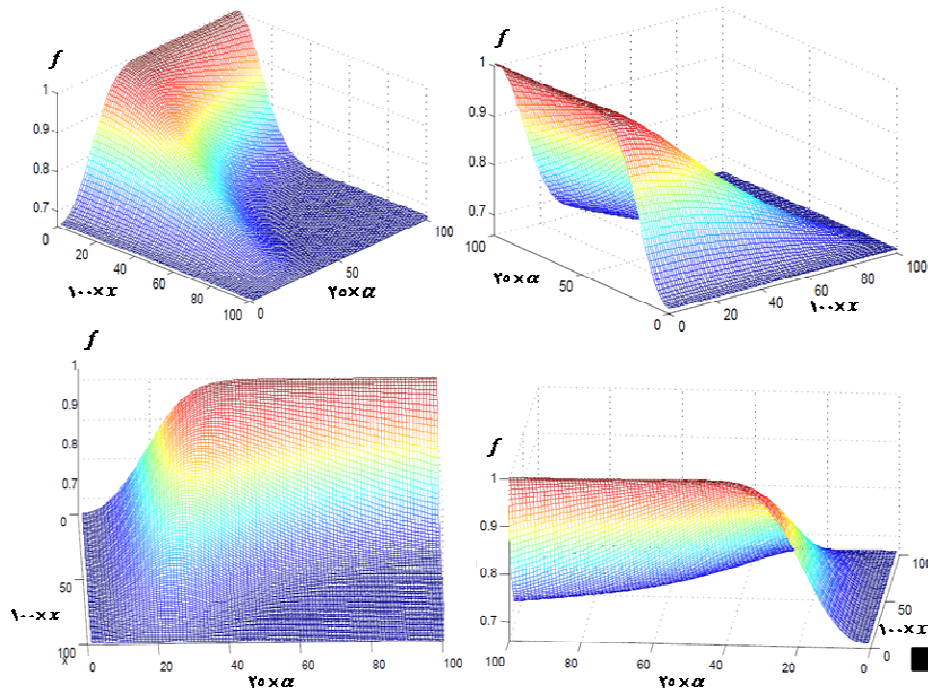
داریم:

$$N = \gamma \left(1 + e^{-\gamma\alpha^\gamma}\right),$$

$$\sin(\Theta) = \sqrt{\frac{1 - (1 - e^{-\gamma t^\gamma \alpha^\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma}},$$

$$\cos(\Theta) = \sqrt{\frac{1 + (1 - e^{-\gamma t^\gamma \alpha^\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma}},$$

$$A = \frac{\left(\cos^\gamma(\Theta) + \sin^\gamma(\Theta) + \gamma \cos^\gamma(\Theta)\sin^\gamma(\Theta)e^{-\gamma\alpha^\gamma x^\gamma}\right)}{N},$$



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار هماندهی مطلوب $f(\rho^\kappa(\tau))$ برحسب زمان بهنجارش x و دامنه $0 \leq \alpha \leq 4$ (نمودار در چهار زاویه مختلف نشان داده شده است).

$$f(\rho^\kappa(\tau)) = \frac{2(A+C)+1}{3}. \quad (17)$$

همان طور که از نمودار شکل ۴ آشکار است، هماندهی مطلوب $f(\rho^\kappa(\tau))$ برای کانال کوانتومی $\rho^\kappa(\tau)$ در همه زمانهای برهمکنش $\tau < \infty$ و برای همه دامنه‌ها در بازه $0 \leq \alpha \leq 4$ ، بزرگ‌تر از حد کلاسیکی $\frac{2}{3}$ است و برای انتقال از دور کوانتومی مناسب است.

بوس و ودرال فهمیدند که نه تنها درهم‌تنیدگی، بلکه آمیختگی کانال‌های کوانتومی روی ترارسانی کوانتومی تاثیر دارد [۱۲]. آمیختگی یک حالت ρ به وسیله آنتروپی خطی $S(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho^2)$ می‌تواند کوانتیده شود. برای کانال همدوس درهم‌تنیده داریم:

$$S(\rho^\kappa(\tau)) = 1 - 2(A^2 + 2B^2 + C^2 + 2D^2), \quad (18)$$

همان طور که از نمودار بالا آشکار است در ابتدا کانال آمیختگی کمتری دارد و سپس آمیختگی آن افزایش می‌یابد درحالی‌که هرچه دامنه آن در بازه $0 \leq \alpha \leq 4$ ، بزرگ‌تر باشد، آمیختگی بیشتری دارد، که سریعتر هم افزایش می‌یابد و سپس به این دلیل که کانال با خلأ برهمکنش می‌کند، کانال برای $\tau \rightarrow \infty$

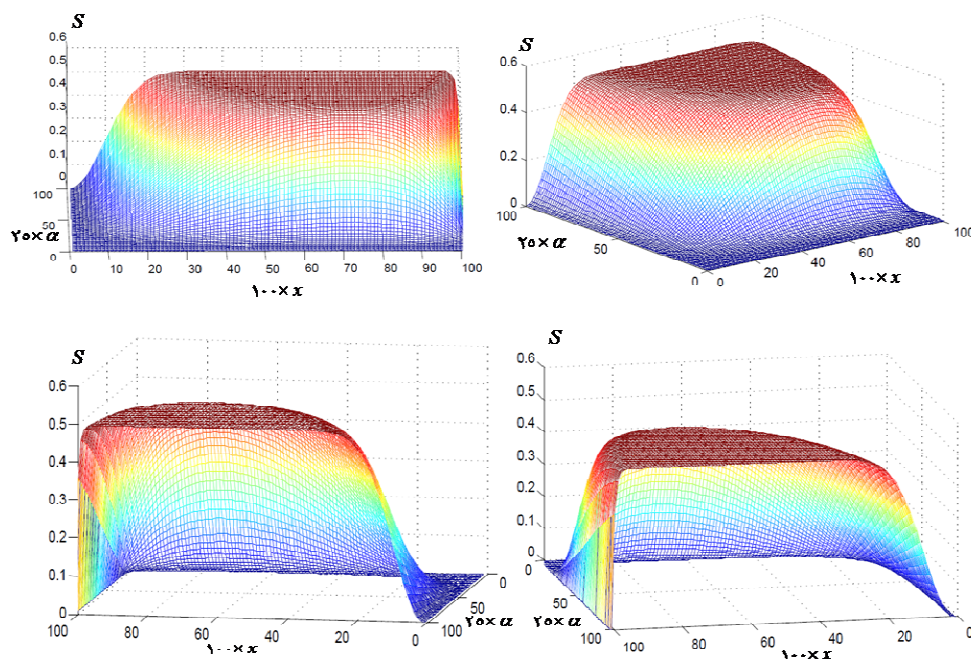
۵. بررسی انتقال از دور با یک کانال آمیخته

هماندهی مطلوب ترارسانی در یک طرح کلی به وسیله نگهدارنده رد عملگرهای کوانتومی جایگزیده و ارتباطات کلاسیکی با یک کانال با نسبتی بیشینه از کانال بصورت زیر بیان می‌شود [۹ و ۱۱]:

$$f(\rho) = \frac{F(\rho)N' + 1}{N' + 1}, \quad (16)$$

که در آن $f(\rho)$ هماندهی مطلوب برای کانال کوانتومی ρ ، $F(\rho)$ نسبت بیشینه از کانال و N' بعد فضای هیلبرت $C^{N'} \otimes C^{N'}$ مربوطه است. $F(\rho)$ بصورت $\max \langle \phi | \rho | \phi \rangle$ تعریف می‌شود که بیشینه از میان همه حالت‌های درهم‌تنیده بیشینه $N' \times N'$ است.

هر کانال 2×2 ، زمانی که هماندهی مطلوب $f(\rho)$ کوچک‌تر از حد کلاسیکی $\frac{2}{3}$ است ($F(\rho) \leq 1/2$)، برای ترارسانی کوانتومی بی‌فایده می‌شود. هماندهی مطلوب برای کانال کوانتومی $\rho^\kappa(\tau)$ به صورت زیر است:



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار آمیختگی $S(\rho^k(\tau))$ بر حسب زمان بهنجارش x و دامنه $0 \leq \alpha \leq 4$ (نمودار در چهار زاویه مختلف نشان داده شده است).

جاسازی شود، درهم‌تندگیشان کاهش می‌یابد اما نه به طور کامل و هماندهی مطلوب آنها همیشه بزرگ‌تر از حد کلاسیکی $2/3$ است که برای ترارسانی کوانتومی مناسب است. بنابراین به نظر می‌رسد که حالت‌های همدوس، نه تنها بصورت نظری بلکه به صورت تجربی، نقش مهمی را در نظریه اطلاعات کوانتومی داشته باشند.

آمیختگی آن نزول می‌کند، و تبدیل به دو مد خلأ می‌شود که یک حالت خلأ^۱ است.

۶. نتایج

حالت‌های همدوس درهم‌تنیده دوتایی نوسانگر هماهنگ با استفاده از رونوشت حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ می‌تواند ایجاد شود. این حالت‌های درهم‌تنیده اگر در محیط خلأ

مراجع

1. D Popov, I Zahari, Vjeckoslav Sajfert, I Luminosu, and D Popov, *Int. J. Theor. Phys.* **47** (2008) 1441.
2. E Andersson, M Curty, and I Jex, *Physical Review A* **74** (2006) 022304
3. M Le Ballac, "A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation", Cambridge University press (2006).
4. C H Bennett, G Brassard, C Crépeau, R Jozsa, A Peres, and W K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895.
5. A Barenco, D Dutch, A Ekert, and R Jozsa, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 4085.
6. BC Sanders, *Journal of Physics A: Mathematical and*
7. K Fujii, "Coherent States and some Topics in Quantum Information Theory", quant-ph/0207178
8. S J D Phoenix, *Phys. Rev. A* **41** (1990) 5132.
9. H Jeong, M S Kim, and J Lee, *Physical Review A* **64** (2001) 052308
10. J Lee and M S Kim, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4236; J Lee, M S Kim, Y -J Park, and S Lee, *J. Mod. Opt.* **47** (2000) 2151
11. R Horodecki, P Horodecki, and M Horodecki, *Phys. Rev. A* **60** (1999) 1888.
12. S Bose and V Vedral, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 040101.

¹ Pure state