مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۶، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۵

هامیلتونی‌های پیمانه‌ای شده برای ذرهٔ آزاد بر رویه‌هایی در فضای پیکربندی و فاز

مهدی دهقانی

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

پست الکترونیکی: dehghani@sci.sku.ac.ir

(دریافت مقاله ۱۳۹۱/۳/۳۱ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی ۱۳۹۴/۱۰/۲)

چکیده

روشی برای پیمانه‌ای کردن دستگاه‌های نوع دوم که شامل دو قید در ساختار رشته‌ای هستند، ارائه می‌دهیم. در این روش با افزودن تکانهٔ نظیر متغیر وس زومینو به قید اولیه و شرط نوع اول شدن، یک هامیلتونی جدید و نوع اول می‌سازیم. قیدهای اولیه را به دو شکل اتحاد در فضای پیکربندی و اتحاد در فضای فاز در نظر گرفته و تلاش می‌کنیم شکل عمومی هامیلتونی‌های آنها را به دست بیاوریم.

واژه‌های کلیدی: گسترش فضای فاز، قید نوع دوم، تقارن پیمانه‌ای، انتقال استاکلبرگ

۱..مقدمه

معادلات ماکسول، هنگامی که برحسب مجموعهٔ پتانسیل‌های الکترومغناطیس نوشته شوند، به عنوان اولین نظریه منسجم فیزیکی برای توصیف یکی از برهم‌کنش‌های چهارگانهٔ طبیعت دارای تقارن پیمانه‌ای هستند. حتی پس از کوانتش این برهم‌کنش و وارد کردن نقش علت‌های تولید برهم‌کنش الکترومغناطیس (بار $U(1)$ لپتون‌ها) نظریه حاصل دارای تقارن پیمانه‌ای است. این تقارن منشأ پایستگی بار الکتریکی در نظریهٔ کوانتمی الکترودینامیک و باعث هموار و متناهی شدن رفتار آن در فاصله‌های کمتر از ابعاد اتم‌ها است. ارتباط تقارن پیمانه‌ای با رفتار هموار یک نظریه در فاصله‌های کوچک (در مقیاس همان نظریه) را توفت و دیگران نشان داده‌اند [۱– ۵]. بنابراین پیدا کردن نظریه‌های پیمانه‌ای، به واسطهٔ اهمیت آنها در توصیف مناسب و عاری از رفتار تکین، برای برهم‌کنش‌های اساسی طبیعت و دیگر برهم‌کنش‌ها، مثلاً ارائهٔ نظریه برای پدیده‌های مغناطیسی در فیزیک مادهٔ چگال، همواره از اهداف اصلی فیزیک نظری بوده است. این اهمیت تا به آنجا بوده است که یکی از اجزای اصلی هر نظریهٔ بنیادی در فیزیک تقارن پیمانه‌ای و تقارن‌های فضا زمان است که حتی این تقارن دوم را هم در بسیاری از جاها به زبان تقارن پیمانه‌ای بیان می‌کنند. هرگاه

تقارن پیمانه‌ای در مدلی وجود داشته باشد، مانند هر تقارن دیگر، انتقال دستگاه با مولد آن تبدیل پیمانه‌ای دستگاه را ناوردا نگاه می‌دارد. در حالت ایده‌آل اگر این نوع از درجهٔ آزادی به صورت ساده یک مختصه، یا میدان در یک نظریه با تعداد بی‌نهایت درجهٔ آزادی، باشد آن وقت این مولد به راحتی شناخته شده و در عمل تکانهٔ نظیر آن مختصه (میدان) است. با این حال بخشیدن غنای پیمانه‌ای به یک مدل در قالب ترکیبی از درجه‌های آزادی آن و یا حتی افزودن درجهٔ آزادی جدید و گسترش فضای فاز انجام می‌شود و یافتن مولد نیز کاری سرراست نخواهد بود.

نظریهٔ دستگاه‌های مقید به واسطهٔ حدس، تاکنون تأیید شدهٔ، دیراک کمک می‌کند تا هم یک دستگاه را پیمانه‌ای کنیم و هم در صورت نیاز تابع مولد آن را بیابیم. در دسته‌بندی دیراک اتحادهایی که در فضای فاز بین مختصات وجود دارند به دو دستهٔ اساسی تقسیم می‌شوند. دستهٔ اول آنهایی هستند که همانند یک مختصه یا تکانهٔ بدون هم‌دست در فضای فاز حضور دارند. این موجودات، دستگاه فیزیکی را با هم‌دست خود منتقل می‌کنند بدون آن که آن را تغییر دهند (ناوردایی تحت انتقال). این‌ها همان قیدهای نوع اول هستند که بنابرحدس دیراک مولد نوعی تبدیل پیمانه‌ای در فضای فاز یا در شکل کوانتمی شده در فضای حالت‌های کوانتمی، فضای هیلبرت یا فضای فوک، می‌شوند. دستهٔ دوم، زوج اتحادهایی هستند که به کمک هم و با بازآرایی آنها به کمک قضیهٔ داربو زوج مختصه و تکانه‌هایی از دستگاه اولیه را کم کرده و ما را به فضای فاز فیزیکی می‌رسانند. این زوج‌ها در اصل مربوط به هیچ درجهٔ آزادی در دستگاه نیستند و باید حذف شوند. وقتی که اینها به شکل سادهٔ مختصه و تکانه نباشند، حذف کردنشان به راحتی امکان‌پذیر نیست، ولی دیراک با معرفی کروشه خود روش کم کردن آنها را به ما یاد داده است.

گفتیم قیدهای نوع اول نشان دهنده نوعی تقارن در دستگاه فیزیکی است. این تقارن ایجاب می‌کند که بی‌نهایت حل مربوط به یک حالت فیزیکی داشته باشیم. برای انتخاب یک جواب یکتا برای یک حالت یکتا از بین بی‌نهایت جواب آنها را باید در یک اتحاد علاوه بر قید نوع اول صدق داد. این اتحاد هر عبارت دلخواهی در فضای فاز نیست. پیدا کردن این اتحاد جدید این گونه است که باید هم یوغ کانونی قید نوع اول دستگاه باشد. این نقطهٔ ارتباط بین قیدهای نوع اول و دوم است. ارتباطی که به کمک آن می‌توان درجه‌های آزادی به ظاهر زائد در یک مدل را به تقارن‌های آن تبدیل کرد.

قیدهای نوع دوم را می‌توان همان قیدهای نوع اول نیز تصور کرد که کسی با یک انتخاب و اعمال مناسب هم‌دست نظیرش (تثبیت پیمانه) یکی از بی‌نهایت حالت یکسان دستگاه را برگزیده است. البته عکس آن نیز امکان‌پذیر است، می‌توان نوع دوم‌ها را با افزودن مختصه‌هایی جدید به شکل مختصه‌های بی‌تکانه و یا تکانه‌های بی‌مختصه درآورد و یک نظریهٔ نوع اول (پیمانه‌ای) ساخت. این نوع نگاه اساس روش‌هایی مانند BFT و فدیف- جکیو [۶ و ۷] است که در آنها با گسترش فضای فاز به یک دستگاه اولیه با قیدهای نوع دوم تقارن پیمانه‌ای می‌بخشند. به این گسترش نیز غوطه‌وری می‌گویند. در این مقاله به کمک روشی که معرفی می‌کنیم با افزودن یک مجموعه از یک تکانه و تابعی از مختصهٔ آن به هامیلتونی از یک ردهٔ عام از دستگاه‌های نوع دوم دستگاه پیمانه‌ای می‌سازیم.

اساس روش انتقال استاکلبرگ که برای پیمانه‌ای کردن به کار می‌بریم، این است که می‌توان یک میدان پیمانه‌ای را به طریق آشنای جفت‌شدگی کمینه به تکانه و جملهٔ جنبشی یک نظریه اضافه کرد [۸ و۹] و در نتیجه یک هامیلتونی ناوردای پیمانه‌ای تحت مولدی که تکانهٔ نظیر متغیر جدید است، پیدا کرد. استاکلبرگ این کار را برای دستگاهی انجام داد که از ابتدا پیمانه‌ای ولی میدان پیمانه‌ای آن بدون جرم بود [۸]. او با افزایش جملهٔ جرمی مناسب تقارن را هنوز نگه می‌داشت. از این ایده استفاده می‌کنیم و برای مدل ذرهٔ آزاد که به نوعی یک تقارن پیمانه‌ای بدیهی دارد این عملیات را تکرار می‌کنیم. اضافه کردن مختصات پیمانه‌ای به مختصات ذرهٔ آزاد بدون هیچ پیش زمینه‌ای به نظر بدیهی و مصنوعی می‌رسد. اما این کار را در چارچوب یک دستگاه مقید نوع دوم انجام می‌دهیم. یعنی ذره به واقع در تمام فضای پیکربندی اولیه‌اش کاملاً آزاد نیست و

درجه‌های آزادی آن کمتر از مقدار در نظر گرفته شده است. این درجه‌های آزادی اضافی که مربوط به قیدهای نوع دوم هستند را به درجهٔ آزادی پیمانه‌ای تبدیل می‌کنیم. به این منظور قید اولیه‌ای را، که می‌دانیم در ادامه سازگاری نوع دوم می‌شود، یک تکانه در نظر گرفته و با افزودن تکانهٔ متغیر جدید تمامی آن را به یک تکانه که مولد تبدیل پیمانه‌ای- بگویید قید نوع اول- است، تبدیل می‌کنیم. سپس با استفاده از شرط نوع اول شدن تغییر و تصحیح در هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم. تعداد قیدهای نوع دوم همواره زوج است. پس راحت‌ترین دستگاه نوع دوم شامل دو تا قید نوع دوم است. این دو قید می‌توانند در عرض هم و از تکینگی نگاشت لژاندر حاصل شده باشند، که در این صورت به وجود آمدن یکی به دیگری مربوط نیست و یا در طول هم باشند که به معنی آن است که قید ثانویه از سازگاری قید اولیه حاصل شده است. این دستهٔ دوم از قیدهای نوع دوم ساختار رشته‌ای دارند. برنامهٔ نوع اول سازی خود را برای چنین دستگاهی به کار می‌بندیم، چون در آن تنها یک قید را نوع اول می‌کنیم و دومین قید پس از نوع اول شدن اولیه، اصلاً به وجود نمی‌آید. انجام این کار برای چهار قید نوع دوم یا بیشتر به راحتی انجام‌پذیر نیست و در حال حاضر مشغول انجام محاسبات و ساختن فرمول‌بندی آن هستیم.

۲. ذرهٔ آزاد بر روی رویه در فضای پیکربندی

قبل از ارائهٔ مدل‌های خود نمادگذاری متغیرها و توابع مربوط به مسئله را معرفی می‌کنیم. مجموعه مختصات توصیف کنندهٔ دستگاه را با نماد برداری $\vec{q}$ نشان می‌دهیم. این شکل نوشتن به معنای یک آرایهٔ d تایی از مختصات دینامیکی مسئله است. به هر کدام از مختصه‌ها یک تکانهٔ کانونی در فضای فاز منتسب است بنابراین تکانه‌های مزدوج به بردار $\vec{q}$ را نیز در یک آرایه قرار داده و آن را با $\vec{p}$ نمایش می‌دهیم. این دو نیم‌فضا به همراه هم فضای فاز دستگاه مورد نظر را می‌سازند. بردارهای پایه هر دو نیم‌فضا اما یکسان هستند، به گونه‌ای که ضرب دو بردار از دو نیم‌فضای مختلف معنی دارد. به خصوص ضرب نقطه‌ای بردارهای مربوط به نیم‌فضاهای مختلف برای محاسبهٔ کروشهٔ پواسون توابع به کمک می‌آید تا کمی این عبارت‌ها را به شکل بسته و موجز بنویسیم. نمادهای ∇ و ∇_p به ترتیب به معنای گرادیان در نیم‌فضاهای مختصات و تکانه‌ها است. یک دستگاه مقید با قیدهای نوع دوم، که با شهود عام و ابتدایی ما از قید نیز هم‌خوان است، یک ذرهٔ آزاد محدود بر روی یک سطح است. این سطح می‌تواند تخت یا خمیده باشد و با یک تابع هموار از مختصات فضای پیکربندی، $f(\vec{q})=0$، توصیف می‌شود. اجزای اصلی تعیین کنندهٔ دینامیک این دستگاه با عبارت‌های هامیلتونی، قیدها و جبر بین آنها داده می‌شود

$$H_c=\frac{1}{2}\vec{p}.\vec{p},\quad T_1=f(\vec{q})\,,\qquad\qquad (1)$$
$$T_2(\vec{q},\vec{p})=\vec{p}.\nabla f,\quad \{T_1,T_2\}=\nabla f.\nabla f\ .$$

اتحاد اولیهٔ T_1 باید در همه زمان‌ها برقرار باشد و این شرط قید ثانویهٔ $T_2=\{T_1,H_c\}$ را می‌سازد. از شکل این قید دیده می‌شود که همیشه $T_2 \not\approx T_1$ و همان طور که در عبارت‌های بالا دیده می‌شود دو قید اولیه و ثانویه نسبت به هم نوع دوم هستند و بنابراین سازگاری قید دوم منجر به تعیین ضریب نامعین لاگرانژ می‌شود که قید اولیه را به هامیلتونی کانونی اضافه کرده بود. این دو قید در یک زنجیرهٔ قیدی از سازگاری همدیگر به دست آمدند. بنابراین اگر یکی را دستکاری کنیم دیگری نیز متأثر می‌شود. هدف این است که قید اولیه تبدیل به نوع اول شود تا ثانویه به وجود نیاید.

اکنون می‌خواهیم از این مدل سادهٔ نوع دوم یک مدل پیمانه‌ای بسازیم. برای این کار درخواست این است که قید اولیه T_1 با اضافه شدن یک تکانهٔ جدید که متناظر با تکانهٔ متغیر اضافه شده به فضای فاز است، به یک قید نوع اول تبدیل شود و البته قید ثانویه نیز در سازگاری تولید نشود. این شرط در معادلهٔ زیر آمده است

$$\tilde{T}_1=T_1+®,\quad \{\tilde{T}_1,\tilde{H}_c\}\approx 0\,.\qquad\qquad (2)$$

فرض این است که عدد گراسمانی متغیرهای جدید با متغیرهای قبل با هم برابرند و همهٔ درجه‌های آزادی مسئله بوزونی هستند. یک حل پیشنهادی برای هامیلتونی آن است که چند جمله‌ای که

تابعی از متغیر وس زومینوی همیوغ به ® است بـه هـامیلتونی قبل اضافه شود. یعنی در فضایی بزرگ‌تر اثر محـدود بـودن ذره در فضا به صورت یک تابع پتانسیل در بیاید

$$\tilde{H}_c = H_c + \sum_{n=1}^{\infty} h^{(n)}(q,p)^{-n} \ . \qquad (۳)$$

متغیرهای وس زومینو بیشتر برای ابرمتقارن کردن یک مدل وارد و معرفی می‌شوند. در اینجا چون در پی افزایش تقارن با افزودن درجۀ آزادی به مدل هستیم باز هم همین لفظ را برای متغیرهای جدید خود به کار برده‌ایم. در دیگر جاهای ایـن مقالـه بـه ایـن متغیرها، متغیر پیمانه‌ای ساز می‌گوییم.

از حل مجموعه معـادلات (۲) و (۳) تنهـا دو تصـحیح بـه هامیلتونی اضافه می‌شود که همان جملات معروف وس زومینـو هستند. مدل پیمانه‌ای شده بـه ظـاهر بـاز هـم یـک ذرۀ آزاد در فضای فازی بزرگ‌تر است. این فرآیند در معادلات زیر خلاصـه شده است

$$\begin{aligned} &\tilde{H}_c = H_c + {}^{-}\,\vec{p}.\nabla f + \tfrac{1}{2}{}^{-2}\nabla f.\nabla f \ , \\ &\tilde{H}_c = \frac{1}{2}\,\vec{\tilde{p}}.\vec{\tilde{p}}, \quad \vec{\tilde{p}} = \vec{p} + {}^{-}\nabla f, \quad \tilde{T}_1 = f + ® \ . \end{aligned} \qquad (۴)$$

جفت‌شدگی کمینه که در مقدمه به آن اشاره شد و تکانـۀ مولـد تبدیل پیمانه‌ای به خوبی در سـطر دوم معـادلات بـالا مشـاهده می‌شود. پتانسیل برداری نیـز از عمـود رویـه‌ای کـه ذره بـر آن محدود است به دست می‌آید. اگر بعد فضای پیکربنـدی مـدلی که با آن شروع کردیم d باشد با در نظـر گـرفتن دو قیـد نـوع دومی که داشـتیم تعـداد درجـه‌هـای آزادی ذره در فضـای فـاز کاهش‌یافته $2d-2$ می‌شود. اکنون کـه از روی ایـن مـدل یـک مدل با تقارن پیمانه‌ای ساختیم، یک زوج کانونی به درجـه‌هـای آزادی مدل اضافه شده اما این مدل ساخته شده یـک قیـد نـوع اول خواهد داشت، که دلالت براین می‌کند که تمام حل‌هـای آن در این اتحاد صدق کنند و یک جواب یکتا وقتی پیدا مـی‌شـود که یک اتحاد سازگار با این آزادی پیمانه‌ای به نام شـرط تثبیـت پیمانه در نظر بگیریم. پس درجه‌های آزادی ایـن مـدل یـا بعـد فضای فاز کاهش‌یافتـه آن نیـز $2d-2+2-2$ اسـت. البتـه ایـن استدلال برای شـکل کلاسـیک نظریـه آورده شـد، در صـورت کوانتمی از روی معادلۀ شرودینگری که با $\tilde{H}_c$ نوشته مـی‌شـود حالت‌های $\hat{\tilde{H}}_c|\cdot\rangle = E|\cdot\rangle$ دستگاه را می‌سازیم و از بین آنهـا حالت‌هایی که در شرط $\hat{\tilde{T}}_1|\cdot\rangle_{phys} = 0$ صـدق مـی‌کننـد را بـه عنوان حالت فیزیکی انتخاب می‌کنیم.

با قید نوع اول پیدا شده می‌توان هر وردشـی از متغیرهـای مسئله را محاسبه کرد. واضح است که $¢® = 0$، بنـابراین $\dot{®} = 0$ و از این معادله همراه بـا اتحـاد قیـدی $\tilde{T}_1 = 0$ مـی‌تـوان متغیـر پیمانه‌ای‌ساز و تکانۀ آن را حذف و در همان فضـای فـاز اولیـۀ یک نظریۀ پیمانه‌ای داشته باشیم. با انجام این کار هامیلتونی ذره آزاد به صورت زیر در می‌آید

$$\tilde{H}_c = H_c - \frac{1}{2}(\vec{p}.\nabla f)^2(\nabla f.\nabla f)^{-1}. \qquad (۵)$$

در شکل کلاسیک، این رابطه می‌گوید که با انتخاب رویـه‌هـایی در فضای پیکربندی می‌توان رابطـۀ انـرژی- تکانـۀ ذره را بـه دلخـواه تنظیم کرد. اگر رویه یک ابرصفحۀ تخت با معادلۀ $f(\vec{q}) = \vec{a}.\vec{q}$ در فضای پیکربندی باشد، جملۀ اضافه شده بـه مـدل هماننـد در نظـر گـرفتن ذره بـه عنـوان ذره‌ای بـاردار در میـدان مغناطیسـی ثابـت می‌شود. اگر رویۀ مورد نظر یک کره باشد، استفاده از این روش بـه کوانتش کانونی مدل اسکایرم می‌انجامد کـه در مرجـع [۱۰] آمـده است. یک سؤال جالب توجه این است که آیا رویـه‌ای وجـود دارد که پس از غوطـه‌وری آن رابطـۀ پاشـندگی ذره بـه شـکل نسـبیتی $\sqrt{\vec{p}^2+1}$ در بیاید. بـه بیـانی دیگـر آیـا رویـه‌ای وجـود دارد کـه غوطـه‌ور کـردن آن در فضـایی بـزرگ‌تـر معـادل بـا فضـا زمـان مینکوفسکی بشود؟ با کمی توجه به رابطۀ (۶) و کمی سعی و خطا دیده می‌شود که چنین حلی وجود ندارد و این صرفاً بـه خـاطر آن است که تابع f فقط تابع متغیرهـای $\vec{q}$ اسـت. مـی‌دانـیم کـه قیـد نسبیت خاص در فضای پیکربنـدی بـه صـورت $\dot{\vec{q}}^2 = 1$ اسـت. در نتیجه با گسترش فضای فاز توسط متغیرهای پیمانه‌ای‌ساز نمی‌توان متریک اقلیدسی را به متریـک مینکوفسـکی تبـدیل کـرد. در ادامـه رویۀ اولیه را به شکلی عمومی‌تر در فضای فاز می‌گیـریم و دوبـاره نظریۀ پیمانه‌ای متناظر را می‌سازیم.

۳. ذرۀ آزاد برروی رویه در فضای فاز

علاوه بر تلاش به جواب دادن سوالی که در انتهای بخـش قبـل

مطرح شد، می‌خواهیم طریقهٔ عمومی اضافه شدن جملات پیمانه‌ای‌ساز به یک مدل نوع دوم را ارائه دهیم. قید اولیه در فضای فاز اتحادی در فضای پیکربندی به صورت $g(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ است که پس از نگاشت لژاندر به تابعی در فضای فاز $f(\vec{q},\vec{p})$ ترجمه می‌شود. قیدها، سازگاری و نوع دوم شدنشان در مجموعه معادلات زیر خلاصه شده است

$$H_c = \frac{۱}{۲}\vec{p}.\vec{p}, \quad T_۱ = f(\vec{q}), \quad T_۲ = \vec{p}.\nabla f, \qquad (۶)$$
$$\{T_۱,T_۲\} = \nabla f.\nabla f + \nabla f.((\vec{p}.\nabla_p)\nabla_p f) - \nabla_p f.((\vec{p}.\nabla)\nabla f).$$

با نگاه به شکل قید ثانویه می‌فهمیم که اگر قید اولیه دارای شکل تابعی مانند $f \sim \exp(\frac{q_i}{p_i})$ باشد، دستگاه نوع اول می‌شود. همچنین با توجه به شکل کروشهٔ پواسون دو قید ممکن است این عبارت متناسب با قیدهای تا این مرحله بشود و به دستگاهی با تعداد بیشتر از دو تا نوع دوم و یا دو قید نوع اول برسیم. یک مثال برای چنین حالتی با $f \sim \vec{q}.\vec{p}$ به وجود می‌آید. این دو رده از قیدها را کنار می‌گذاریم. اگرچه در اینجا قید اولیه تابعی از تکانه‌ها نیز هست، دیده می‌شود که دستگاه ناسازگار و قید اولیه بدون معنی می‌شود، اگر که $\nabla f = ۰$ باشد. پس مجبوریم شرط $\nabla f \neq ۰$ را انتخاب کنیم که با این شرط دستگاه حتماً نوع دوم است.

از این معادلات واضح است که چون شرط قیدی نسبیتی $\dot{\vec{q}}^۲ = ۱$ در فضای پیکربندی به تابعی که تنها به تکانه‌ها وابسته است ترجمه می‌شود، این قید تنها یک قید اولیهٔ نوع اول است و از این روش (انتقال استاکلبرگ) نمی‌توان به پاشندگی نسبیتی رسید. به خاطر وابستگی توابع قیدی به همه متغیرهای فضای فاز کروشه پواسون کمیت‌ها را در صورتی که شکل ساده‌تری نداشته باشند، صریحاً می‌نویسیم. همانند مورد قبل با گسترش فضای فاز و درخواست پیمانه‌ای شدن معادلات (۲) را داریم. حل پیشنهادی خود را نیز به صورت (۳) در نظر می‌گیریم و به معادلهٔ عمومی زیر برای چندجمله‌ای‌های متغیر پیمانه‌ای‌ساز، می‌رسیم

$$۰ = T_۲ + \sum_{n=۱}^{\infty}\{T_۱, h^{(n)}\}^{-n} - \sum_{n=۱}^{\infty} n h^{(n)-n-۱}. \qquad (۷)$$

از حل این مجموعه از معادلات که از صفر قرار دادن ضرایب جمله‌های $^{-n}$ به صورت مستقل به دست می‌آید، به جواب عمومی زیر برای توابع $h^{(n)}$ می‌رسیم

$$h^{(n)} = \frac{۱}{n!}\{f,\{f,\{...\{f,H_c\}...\}\}\}. \qquad (۸)$$

به این ترتیب هامیلتونی پیمانه‌ای‌شده با قیدهای ابتدایی نوع دوم در فضای فاز دارای یک بسط بی‌نهایت جمله‌ای بر حسب متغیر پیمانه‌ای‌ساز می‌شود. این بسط در حالت‌های خاص و بدیهی دارای تعداد متناهی جمله است

$$\tilde{H}_c = H_c + \sum_{n=۱}\frac{۱}{n!}\{f,\{f,\{...\{f,H_c\}...\}\}\}^{-n}, \qquad (۹)$$

که با توجه به اتحاد بیکرها و سدورف و به شرط آن که تابع f حقیقی مقدار باشد، می‌توان یک عبارت بسته صورت برای آن به شکل زیر پیشنهاد داد

$$\tilde{H}_c = e^{-f} \otimes H_c \otimes e^{--f}, \qquad (۱۰)$$

که در آن علامت $\otimes$ بین هر دو تابع به معنای آن است که باید کروشهٔ پواسون بین آن دو تابع محاسبه شود. اهمیت این شکل نوشتن در آن است که اگر بتوان تابع نمایی را محاسبه کرد، آن وقت به دست آوردن هامیلتونی پیمانه‌ای‌شده تنها با محاسبهٔ دو کروشه پواسون میسر می‌شود، هرچند که این امکان‌پذیری مستلزم به دست آمدن جملهٔ عمومی (۸) است.

از آنجا که بسط برحسب متغیر پیمانه‌ای‌ساز دارای همه توان‌های این متغیر است نمی‌توان در حالت عمومی این متغیر را از شرط پیمانه‌ای بودن مدل برحسب متغیرهای فضای فاز اولیه حل کرد، مگر در حالت‌هایی که این بسط برحسب تابع‌های شناخته شده که عکس آنها نیز شناخته شده‌اند قابل نوشتن باشد. با این حال این شکل به دست آمده برای هامیلتونی کمک می‌کند تا برای شرط‌های مختلف در فضای فاز پاشندگی‌های متفاوتی پیدا کنیم.

یک مثال برای ساختن هامیلتونی‌های جدید با این فرمول‌بندی انتخاب قید اولیه به شکل $f = \vec{q}.\vec{g}(\vec{p})$ است. جملهٔ عمومی (۸) به صورت زیر به دست می‌آید

$$h^{(n)} = \nabla_p .\nabla_g \nabla_g ... \nabla_g \vec{p}(\vec{g}.\ ) \qquad (۱۱)$$
$$\nabla_g . \equiv \vec{g}.\nabla_p ,$$

که عملگرهای نرده‌ای $\nabla_g .$ در سطر اول به تعداد $(n-۱)$ بار

اثر می‌کنند. با داشتن شکل صریح $\vec{g}(\vec{p})$ ایـن عملگـر محاسـبه شده، $h^{(n)}$ به دست آمده و هامیلتونی دستگاه پیمانـه‌ای سـاخته می‌شود. البته هر قیدی را نمی‌توان به شکل بالا جداسازی کـرد. به خصوص اگر تابع برداری $\vec{g}(\vec{p})$ تنها یک مؤلفه داشته باشـد قید اولیه به یک مختصه یا تابعی از تکانه‌هـا کـاهش مـی‌یابـد و دستگاه از همان ابتدا لزوماً نوع دوم نیست.

۴. نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله با روش انتقال استاکلبرگ از یک دستگاه با قیدهای نوع دوم در ساختار تک رشته‌ای، دستگاهی پیمانـه‌ای سـاختیم. تک‌رشتهٔ قیدی تنها شامل دو قید بود که با نوع اول‌سـازی تنهـا قید اولیهٔ نوع اول شده در آن باقی می‌ماند. بـا ایـن وجـود اگـر بتوان قید اولیه در رشته را نوع اول کرد اصلاً قیدهای بعدی بـه وجود نمی‌آیند. بنابراین تعداد قیدهای داخل یک رشته اصلا در انجام فرآیندی که انجام دادیم مهم نیست. برای دستگاهی با تنها یک قید نوع اول بـه راحتـی مـی‌تـوان تـابع مولـد پیمانـه‌ای را ساخت در حالی که ساختن تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای حتی برای دستگاه‌هایی کـه دارای دو نـوع اول آبلـی نیـز هسـتند، چنـدان سرراسـت نیسـت. مزیـت دیگـر ایـن روش نسـبت بـه دیگـر روش‌های پیمانه‌ای کردن (مانند غوطه‌وری‌هـایBFT و فـدیف جکیو) آن است که حداقل ممکـن (تنهـا یـک زوج متغیـر) بـه متغیرهای فضای فاز برای پیمانه‌ای کردن اضافه می‌شـود. نشـان دادیم که اگر قید اولیه تنها تـابعی از مختصـات باشـد، تنهـا دو جمله (یک بسط متناهی) برای پیمانه‌ای کردن مـدل لازم اسـت. در حالتی که قید اولیه تابعی از هر دو نوع متغیر فضای فاز باشد پیمانه‌ای کردن مدل به بهـای افـزودن تمـامی تـوان‌هـای متغیـر پیمانه‌ای‌ساز، به هامیلتونی تمام می‌شود، به گونه‌ای که نمی‌تـوان به راحتی عبارتی بسته صورت برای هـامیلتونی پیمانـه‌ای شـده نوشت و یا متغیر پیمانه‌ای‌سـاز را حـذف کـرد. امـا ایـن باعـث می‌شود که پاشندگی‌های متنوعی، ناشی از انتخـاب رویـه‌هـا در فضای فاز برای محدود کردن ذره، برای ذره پیدا کنیم. این یکی از پیشنهادهایی است که برای کارهای بعدی ارائه مـی‌دهـیم. بـا تعمیم روشی کـه بـرای دسـتگاه تـک رشـته‌ای معرفـی کـردیم می‌توان دستگاه‌های نوع دوم چندرشته‌ای را هـم نـوع اول کـرد به شرطی که رشته‌های آنها متقاطع نباشـد. یعنـی قیـدهای یـک رشته به دیگری مربوط نباشد و رشته‌ها از هم مستقل باشند.

مراجع

1. J C Ward, *Phys. Rev*. **78** (1950) 182.
2. Y Takahashi, *Nuovo Cim*. **6** (1957) 370.
3. M Veltman, *Nucl. Phys*. B **21** (1970) 288.
4. G ’t Hooft, *Nucl. Phys*. B **35** (1971) 167.
5. G ’t Hooft, and M Veltman, *Nucl. Phys*. B **44** (1972) 189.
6. I A Batalin, E S Fradkin and T E Fradkina, *Nucl. Phys*. B **279** (1987) 514.
7. S Hong, *Mod. Phys. Lett*. A **20** (2005) 2455.
8. E C G Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* **30** (1957) 209.
9. H Ruegg, and M Ruiz-Altaba, *Int. J. Mod. Phys*. A **19** (2004) 3265.
10. J A Neto, *Phys. Lett*. B **571** (2003) 105.