

استخراج انرژی الکتریکی از نوسانات مکانیکی کاتوره‌ای توسط سامانه‌های الکترومکانیکی خطی و ناخطی: مقایسه نوفه‌های گوناگون

زهرا اعتصامی و میرفائز میری

دانشکده فیزیک، دانشگاه تهران، تهران

پست الکترونیکی: zahra.etesami@ut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۱/۱۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۴/۶)

چکیده

در این مقاله به بررسی تولید انرژی الکتریکی از نوفه‌های مکانیکی گاوسی سفید، گاوسی رنگی، تلگرافی و نوفه با فاز و دامنه کاتوره‌ای، توسط سامانه‌های الکترومکانیکی خطی و ناخطی می‌پردازیم. نشان می‌دهیم توان الکتریکی تولیدی در یک سامانه خطی با یک یا دو درجه آزادی، وقتی ورودی سامانه نوفه گاوسی سفید است، بیشترین است. پاسخ سامانه با دو درجه آزادی در مقایسه با سامانه با یک درجه آزادی، در ناحیه بسامدی بزرگ‌تری گسترده است. سامانه ناخطی در مقایسه با سامانه خطی، توان تولیدی بالاتری دارد.

واژه‌های کلیدی: تولید انرژی، سامانه الکترومکانیکی، نوفه، سامانه‌های خطی و ناخطی

۱. مقدمه

مکانیکی موجود در محیط کمک بگیریم. در این راستا، سامانه‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی^۱ توجهات زیادی را به خود معطوف داشته‌اند. چنین سامانه‌هایی شامل یک بخش مکانیکی و یک بخش الکتریکی هستند که به کمک یک مبدل الکترومکانیکی به یکدیگر جفت شده‌اند [۳]. به طور کلی دو کارکرد عمده برای این سامانه‌ها معرفی می‌شوند که عبارتند از: (الف) دریافت یک سیگنال ورودی از یک مدار الکتریکی و تبدیل آن به یک حرکت در بخش مکانیکی سامانه. (ب) تبدیل

نیاز روزافزون دنیا به چشمه‌های نوین انرژی، ایده تبدیل حرکات مکانیکی طبیعی به انرژی الکتریکی را بیش از پیش مورد توجه قرار داده است [۱ و ۲]. این مسئله به گسترش فناوری‌های مربوط به استخراج انرژی الکتریکی از انرژی باد، زمین‌گرایی و همچنین امواج دریا انجامیده است. از سوی دیگر، بسیاری از وسایل الکتریکی که به طور روزمره به کار می‌روند مانند تلفن‌های همراه، تبلت‌ها و رایانه‌های قابل حمل، برای کار به انرژی زیادی نیاز ندارند. برای چنین وسایلی با توان مصرفی پایین در بازه میلی وات، کافی است از انرژی‌های

۱. Micro/Nanoelectromechanical Systems (MEMS/NEMS)

یک مولد با دو درجه آزادی ناخطی خاص را در نظر گرفته و توان تولیدی آن را به دست می آوریم.

۲. مدل

بخش مکانیکی سامانه‌های الکترومکانیکی به طور عمده شامل یک بخش نوسان‌کننده است. در بسیاری از موارد از پیزوالکتریک‌ها به عنوان بخش نوسان‌کننده کمک گرفته می‌شود [۷ و ۱۷]. این بخش می‌تواند به صورت یک سامانه ساده جرم و فنر در نظر گرفته شود. بخش مکانیکی به کمک یک مبدل الکترومکانیکی به بخش الکتریکی سامانه جفت می‌شود. بخش الکتریکی شامل یک مقاومت است که به آن مقاومت بار گفته می‌شود. حرکات بخش مکانیکی از طریق مبدل، جریانی را در مقاومت بار بوجود می‌آورد. از افت پتانسیل تولید شده درون مقاومت بار می‌توان برای شارژ کردن دستگاه‌های الکتریکی سود جست. به شکل ۱ نگاه کنید.

شکل ۱ (الف) یک سامانه الکترومکانیکی متشکل از یک جرم و فنر را نشان می‌دهد. معادله حرکت جرم نوسان‌کننده به صورت $M \frac{d^2 X}{dt^2} + B \frac{dX}{dt} + G(X, \phi) + KX = \Sigma(T)$ نوشته می‌شود که در آن X ، T و ϕ به ترتیب عبارتند از موقعیت جسم نوسان‌کننده، زمان و ولتاژ تولید شده در دو سر مقاومت بار. در این رابطه M جرم نوسانگر، B ضریب اصطکاک، K سختی فنر و $G(X, \phi)$ مربوط به جفت‌شدگی بخش مکانیکی با بخش الکتریکی است که در ساده‌ترین حالت به شکل $G(X, \phi) = \alpha\phi$ نوشته می‌شود. جمله $\Sigma(T)$ نشان‌دهنده نوبه مکانیکی است که از محیط به نوسانگر وارد می‌شود. در این معادله حرکت، ابعاد هر یک از ضرایب عبارتند از

$$B = \left[\frac{M}{T} \right], \quad \alpha = \left[\frac{q}{L} \right], \quad K = \left[\frac{M}{T^2} \right]$$

با انتخاب M, q, ϕ, X, T به ترتیب به عنوان ضرایب بی‌بعد سازی برای زمان، طول، ولتاژ، بار و جرم، معادله حرکت به شکل زیر در می‌آید

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{BT_0}{M_0} \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha\phi T_0^2}{M_0 X_0} V + \frac{KT_0^2}{M_0} x = \frac{T_0^2}{M_0 X_0} \Sigma(T_0 t),$$

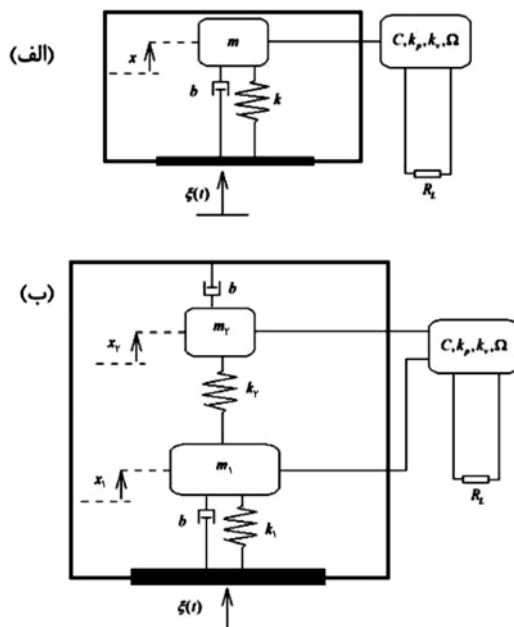
در این معادله، x و V به ترتیب نشان دهنده زمان، طول،

یک حرکت مکانیکی به یک سیگنال الکتریکی. از این انرژی الکتریکی می‌توان برای شارژ انواع دستگاه‌های الکتریکی سود جست.

گام بعدی، یافتن چشمه مناسب انرژی مکانیکی برای تبدیل به انرژی الکتریکی است. استخراج انرژی الکتریکی از حرکات مکانیکی دوره‌ای، به فراوانی بررسی شده است [۴ و ۵]. سیگنال گاوسی به عنوان مدلی برای حرکات کاتوره‌ای مکانیکی نیز مورد توجه قرار گرفته است [۶ - ۱۰]. مرجع [۶] تولید انرژی الکتریکی از نوسانات گاوسی سفید و مرجع [۸] نوسانات گاوسی رنگی را بررسی کرده‌اند. مراجع [۱۱-۱۳] اثرات دینامیک ناخطی مولد را بر توان خروجی سامانه برای ورودی نوبه گاوسی سفید مطالعه می‌کنند.

استخراج انرژی از نوبه‌های گاوسی سفید و رنگی در سامانه‌های الکترومکانیکی ناخطی چندان مطالعه نشده است. افزون بر آن، بسیاری از حرکات کاتوره‌ای مکانیکی موجود در پیرامون ما، به شکل یک سیگنال گاوسی نیستند. ضربه‌های مداومی که از پای عابری به کف یک سالن وارد می‌شود [۱۴]، لرزش‌های یک پل که ماشین‌ها از روی آن می‌گذرند [۱۵] و نوسانات ساختاری پوسته زمین [۱۶]، تنها برخی از نمونه‌های حرکات کاتوره‌ای پیرامون ما هستند که توزیعی ناگاوسی دارند. هر یک از این لرزش‌های کاتوره‌ای مکانیکی می‌توانند برای استخراج انرژی الکتریکی به کار روند.

در این مقاله، نخست با در نظر گرفتن نوبه‌های گوناگون مکانیکی، توان خروجی یک سامانه الکترومکانیکی با یک درجه آزادی را به دست می‌آوریم. از آنجایی که چنین سامانه‌ای دارای یک بسامد ویژه است، تابع پاسخ آن تنها در بازه بسامدی کوچکی مقدار قابل توجهی دارد، در حالی که نوبه فرودی در حوزه بسامدی بزرگی گسترده است. یک راه چیرگی بر مشکل عدم استفاده از تمام قدرت نوبه، افزودن تعداد درجات آزادی سامانه است [۵]. بدین منظور یک مولد الکترومکانیکی با دو درجه آزادی را در نظر می‌گیریم. در پایان، از آنجایی که بسیاری از مولدهای الکترومکانیکی شامل اجزای ناخطی هستند و پاسخ سامانه‌های ناخطی متفاوت از سامانه‌های خطی است،



شکل ۱. نمای یک سامانه الکترومکانیکی تولید انرژی با (الف) یک درجه آزادی و (ب) دو درجه آزادی.

$$\frac{dV}{dt} = k_p \frac{dx}{dt} - \Omega V. \quad (2)$$

برای حل معادلات خطی (۱) و (۲) از تبدیلات فوریه کمک می‌گیریم. اگر $\dot{x}(\omega)$ و $V(\omega)$ به ترتیب تبدیلات فوریه توابع $\dot{x}(t)$ و $v(t)$ باشند، داریم

$$\begin{cases} (-im\omega)\dot{x}(\omega) = -b\dot{x}(\omega) - k\left(\frac{-1}{i\omega}\right)\dot{x}(\omega) - k_v V(\omega) + \xi(\omega), \\ (-i\omega)V(\omega) = k_p \dot{x}(\omega) - \Omega V(\omega). \end{cases} \quad (3)$$

با حل معادلات بالا، $\dot{x}(\omega)$ و $V(\omega)$ به ترتیب به شکل $\dot{x}(\omega) = H(\omega)\xi(\omega)$ و $V(\omega) = \Gamma(\omega)\xi(\omega)$ به دست می‌آیند. در این روابط، توابع $H(\omega)$ و $\Gamma(\omega)$ به شکل زیر تعریف شده‌اند

$$H(\omega) = \left[b - im\omega + i\left(\frac{k}{\omega}\right) + \frac{k_p k_v}{\Omega - i\omega} \right]^{-1}, \quad (4)$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{H(\omega)}{\Omega - i\omega}, \quad (5)$$

توان خروجی این سامانه، عبارت است از توان مصرفی مقاومت بار. شکل بی‌بعد توان خروجی عبارت است از $P = \frac{\langle V^2(t) \rangle}{R_L}$ (که در آن میانگین‌گیری روی نوبه است). می‌شود P را به صورت زیر هم نوشت

$$P = \frac{1}{2\pi R_L} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 C_{\xi\xi}(\omega) d\omega, \quad (6)$$

ولتاژ و جرم بی‌بعد شده هستند. اکنون با نام‌گذاری ضرایب معادله حرکت به شکل $m = \frac{M}{M_s}, b = \frac{BT_s}{M_s}, k_v = \frac{\alpha\phi T_s}{M_s X_s}, k = \frac{KT_s}{M_s}$ این معادله به صورت بدون بعد زیر در می‌آید.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c(x, V) + kx = \xi(t), \quad (1)$$

در این رابطه $c(x, V)$ جمله مربوط به نیروی واکنشی است که در اثر تبدیل حرکت مکانیکی به جریان الکتریکی، به جرم وارد می‌شود. در ساده‌ترین حالت این می‌توان جمله را به شکل $c(x, V) = k_v V$ نوشت که در آن، ولتاژ بی‌بعد شده $V(t)$ و ولتاژ بی‌بعد شده تولیدی در دوسر مقاومت بار و $k_v > 0$ یک ضریب است.

معادله دینامیکی ولتاژ تولیدی در دو سر مقاومت بار از رابطه $\Xi = \frac{1}{r_L C_L} \frac{d\phi}{dt} = F(X, \phi) - \Xi\phi$ است که C_L ظرفیت خازنی مربوط به بخش الکتریکی است و r_L عبارت است از مقاومت بار. با انتخاب مناسب ضرایب بی‌بعد سازی، معادله مربوط به ولتاژ تولید شده به صورت

$$\Omega = \frac{1}{R_L C_L} \text{ در می‌آید که در آن داریم } \frac{dV}{dt} = f\left(\frac{dx}{dt}, V\right) - \Omega V$$

فرض می‌کنیم $f\left(\frac{dx}{dt}, V\right) = k_p \frac{dx}{dt}$ پس، معادله بی‌بعد شده تحول بخش الکتریکی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}
 C_{\xi\xi}^{\text{GWhite}}(\omega) &= 2D, \\
 C_{\xi\xi}^{\text{GColored}}(\omega) &= \frac{2a\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}, \\
 C_{\xi\xi}^{\text{Dichotomous}}(\omega) &= \frac{2D_\gamma\lambda_\gamma}{\lambda_\gamma^2 + \omega^2}, \\
 C_{\xi\xi}^{\text{RARP}}(\omega) &= \frac{DA}{\gamma} [\delta(\omega + \omega_A) + \delta(\omega - \omega_A)].
 \end{aligned} \quad (8)$$

با جایگذاری هر یک از توابع مشخصه به دست آمده از رابطه (۸) در معادله (۶)، توان خروجی سامانه برای نوفه‌های ورودی گوناگون به دست می‌آید. برای داشتن مقایسه‌ای درست بین توان‌های خروجی، ضرایب گوناگون نوفه‌های گوناگون می‌بایست طوری تعیین شوند که شدت نوفه‌ها یعنی مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi(t)\xi^*(\tau) \rangle dt$ با هم برابر باشد.

در ادامه به بررسی یک سامانه مولد انرژی با دو درجه آزادی می‌پردازیم. انتظار داریم به دلیل افزایش تعداد بسامدهای ویژه یک سامانه با دو درجه آزادی، نسبت به سامانه‌ای با تنها یک درجه آزادی، تابع پاسخ سامانه بسامدهای گسترده‌تری را در بر گیرد. این سامانه از دو جرم و فنر جفت شده تشکیل شده است (به شکل ۱ (ب) نگاه کنید). دینامیک سامانه مولد انرژی از معادلات بی‌بعد شده زیر پیروی می‌کند

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + k_v V + k_r (x_1 - x_2) &= \xi(t), \\
 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b \frac{dx_2}{dt} - k_r (x_2 - x_1) - k_v V &= 0, \\
 \frac{dV}{dt} &= k_p \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - \Omega V.
 \end{aligned} \quad (9)$$

در معادله (۹) k_1 و k_2 عبارتند از ضرایب فنرها، m_1 و m_2 جرم‌های متصل به فنرها و x_1 و x_2 به ترتیب موقعیت جرم ۱ و ۲. $\xi(t)$ نوفه کاتوره‌ای مکانیکی است که به سامانه وارد می‌شود و V ولتاژ تولیدی در مقاومت بار است.

به کمک تبدیلات فوریه دستگاه معادله بالا را می‌توان حل کرد. توان خروجی مولد از معادله (۶) به دست می‌آید. با حل معادلات (۹)، $V(\omega)$ به شکل $V(\omega) = \Gamma(\omega)\xi(\omega)$ به دست می‌آید که تابع $\Gamma(\omega)$ به شکل زیر تعریف شده است

$$\Gamma(\omega) = \frac{A_1 - B}{A_1 A_2 - B^2}, \quad (10)$$

که در آن

در رابطه بالا $C_{\xi\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \langle \xi(t)\xi^*(\tau) \rangle dt$ توان طیفی نوفه یا تبدیل فوریه خودهمبستگی زمانی نوفه است. برای به دست آوردن توان تولیدی نوفه‌های گوناگون به کمک معادله (۶) لازم است توابع مشخصه آنها را به دست بیاوریم. در ادامه توابع مشخصه نوفه‌های گاوسی سفید، گاوسی رنگی، نوفه تلگرافی و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای^۱ محاسبه می‌شوند. یادآوری می‌کنیم که نوفه تلگرافی تنها دو مقدار می‌پذیرد و در زمان‌های کاتوره‌ای، میان این دو مقدار گذر می‌کند [۱۸] و [۱۹]. این زمان‌ها توزیعی پواسونی دارند. نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای به شکل $\xi(t) = A \cos(\omega_A t + \varphi)$ تعریف می‌شود. در این رابطه، A و φ متغیرهای کاتوره‌ای هستند. توزیع φ را در بازه $[0, 2\pi]$ یکنواخت در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A توزیعی گاوسی داشته باشد به شکلی که $\langle A \rangle = 0$ و $\langle A^2 \rangle = D_A$ باشد. پس، خودهمبستگی زمانی نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای به صورت $\langle \xi(t)\xi^*(\tau) \rangle = \frac{D_A}{\gamma} \cos(\omega_A t)$ در می‌آید. خودهمبستگی زمانی نوفه‌های گاوسی سفید^۲، گاوسی رنگی^۳، تلگرافی^۴ و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای به ترتیب به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{aligned}
 \langle \xi(t)\xi^*(\tau) \rangle_{\text{GWhite}} &= 2D\delta(t), \\
 \langle \xi(t)\xi^*(\tau) \rangle_{\text{GColored}} &= ae^{-\lambda|\tau|}, \\
 \langle \xi(t)\xi^*(\tau) \rangle_{\text{Dichotomous}} &= \lambda_\gamma D_\gamma e^{-\lambda_\gamma|\tau|}, \\
 \langle \xi(t)\xi^*(\tau) \rangle_{\text{RARP}} &= \frac{DA}{\gamma} \cos[\omega_A \tau].
 \end{aligned} \quad (V)$$

در این روابط D شدت نوفه گاوسی سفید، a شدت نوفه گاوسی رنگی، λ ضریب افت همبستگی نوفه گاوسی رنگی، D_γ شدت و λ_γ ضریب افت همبستگی نوفه تلگرافی، و در پایان D_A همبستگی دامنه نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای است.

با گرفتن تبدیلات فوریه از معادلات (۷)، توابع مشخصه نوفه‌های گوناگون به صورت زیر به دست می‌آید

۱. Random Amplitude Random Phase (RARP)

۲. Gaussian-White

۳. Gaussian-Colored

۴. Dichotomous

در ادامه به حل عددی معادله تحوولی که ورودی آن یک نوفه گاوسی رنگی است و به شکل زیر نوشته می‌شود می‌پردازیم

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon(t) \quad (13)$$

در معادله (۱۳)، $\varepsilon(t)$ نوفه گاوسی رنگی با میانگین صفر و خودهمبستگی زمانی $\langle \varepsilon(t)\varepsilon(t') \rangle = D\lambda \exp(-\lambda|t-t'|)$ است. برای حل عددی این معادله، یک معادله دیفرانسیل دیگر که تحول زمانی نوفه رنگی را مشخص کند، معرفی می‌کنیم. این معادله عبارت است از $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\lambda\varepsilon + \lambda\xi(t)$ که در آن $\xi(t)$ یک نوفه گاوسی سفید با میانگین صفر و خودهمبستگی زمانی $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ است. معادلات مربوط به تحول سامانه و نوفه می‌بایست همزمان حل شوند. با گسسته‌سازی زمانی، موقعیت سامانه و مقدار نوفه در زمان Δt از روابط زیر به دست می‌آیند

$$x(\Delta t) = x_0 + \frac{1}{\gamma} \Delta t (F_1 + F_2),$$

$$\varepsilon(\Delta t) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\gamma} \Delta t (H_1 + H_2) + (2D\lambda^2 \Delta t)^{1/2} \psi.$$

در این روابط داریم

$$F_1 = f(x_0, \varepsilon_0),$$

$$F_2 = f(x_0 + \Delta t F_1, \varepsilon_0 + \Delta t H_1 + (2D\lambda^2 \Delta t)^{1/2} \psi),$$

$$H_1 = h(\varepsilon_0)$$

$$H_2 = h(\varepsilon_0 + \Delta t H_1 + (2D\lambda^2 \Delta t)^{1/2} \psi).$$

در روابط بالا x_0 و ε_0 به ترتیب موقعیت سامانه و مقدار نوفه در لحظه صفر را نشان می‌دهند. ψ یک عدد کاتوره‌ای با توزیع گاوسی است که میانگین و واریانس آن برابر $\langle \psi \rangle = 0$ و $\langle \psi^2 \rangle = 1$ است.

۳. نتایج و بحث

$|\Gamma(\omega)|^2$ برای سامانه شکل ۱ به ازای ضرایب تبدیل گوناگون k_p و k_v در شکل ۲ نشان داده شده است. ضرایب سامانه عبارتند از $m=10$ ، $k=10$ ، $b=1$ ، $C_L=2$ و $R_L=0.5$. ضرایب مربوط به نوفه‌ها به این شکل تعیین شده‌اند $D=1$ ، $a=2$ ، $\lambda=2$ ، $D_\gamma=1$ ، $\lambda_\gamma=1$ ، $D_A=1$ و $\omega_A=1$. توان

$$A_1(\omega) = b - im_1\omega + i\left(\frac{k_1}{\omega}\right) + \frac{k_p k_v}{\Omega - i\omega} + i\left(\frac{k_v}{\omega}\right),$$

$$A_2(\omega) = b - im_2\omega + i\left(\frac{k_2}{\omega}\right) + \frac{k_p k_v}{\Omega - i\omega},$$

$$B(\omega) = \frac{k_p k_v}{\Omega - i\omega} + i\left(\frac{k_v}{\omega}\right). \quad (11)$$

از آنجایی که تحول سامانه‌های ناخطی می‌تواند با سامانه‌های خطی تفاوت زیادی داشته باشد، در ادامه یک مولد انرژی با دو درجه آزادی ناخطی خاص را بررسی می‌کنیم. معادلات حرکت مربوط به این مولد به شکل زیر نوشته می‌شود

$$m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + k_1 x_1 + \kappa_1 x_1^3 + k_v V,$$

$$+ k_2 (x_2 - x_1) - \kappa_2 (x_2 - x_1)^3 = \xi(t),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 - k_2 (x_2 - x_1) + \kappa_2 (x_2 - x_1)^3 - k_v V = 0,$$

$$\dot{V} = k_p (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \Omega V. \quad (12)$$

در معادله (۱۲)، κ_1 و κ_2 به ترتیب عبارتند از ضرایب ناخطی مربوط به فنر ۱ و ۲ (به شکل ۱ (ب) نگاه کنید). $\xi(t)$ مربوط به نوسانات مکانیکی کاتوره‌ای است که آن را گاوسی در نظر می‌گیریم. برای به دست آوردن توان تولیدی این مولد، لازم است معادلات دینامیکی حرکت همزمان حل شوند که این کار به کمک روش تبدیلات فوریه امکان‌پذیر نیست. برای حل عددی معادلات کاتوره‌ای جفت شده (۱۲) از روش رونگ کوتای کاتوره‌ای معرفی شده در مرجع [۲۰] کمک گرفتیم. در این روش، برای حل عددی معادله دیفرانسیل عمومی $\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t)$ که در آن $\xi(t)$ نوفه گاوسی سفید با میانگین صفر و خودهمبستگی زمانی $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ گرفته می‌شود. بدین ترتیب، موقعیت با گذشت زمان Δt از رابطه زیر به دست می‌آید

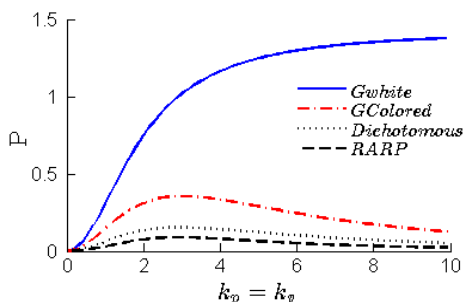
$$x(\Delta t) = x_0 + \frac{1}{\gamma} \Delta t (F_1 + F_2) + (2D\lambda^2 \Delta t)^{1/2} \psi,$$

که در آن داریم

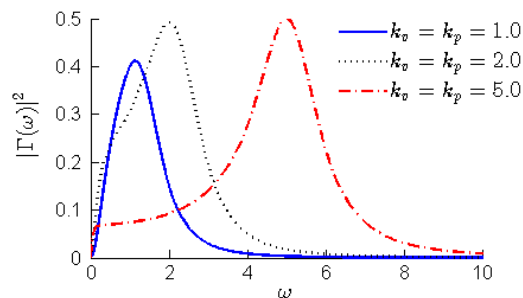
$$F_1 = f(x_0)$$

$$F_2 = f(x_0 + \Delta t F_1 + (2D\lambda^2 \Delta t)^{1/2} \psi).$$

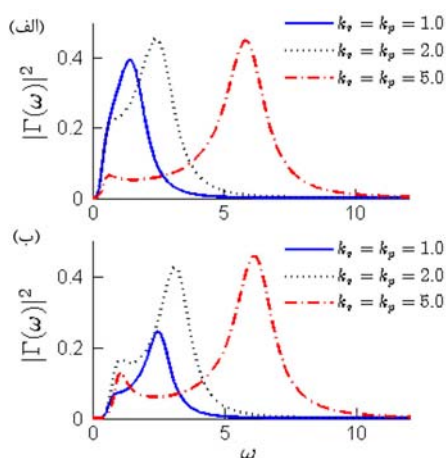
در روابط بالا x_0 موقعیت در لحظه صفر را نشان می‌دهد. ψ یک عدد کاتوره‌ای با توزیع گاوسی است با $\langle \psi \rangle = 0$ و $\langle \psi^2 \rangle = 1$.



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) بستگی توان تولیدی سامانه مولد انرژی به ضرایب جفت‌شدگی دو بخش الکتریکی و مکانیکی برای $k = 4/0$ و $C_L = 2/0$ ، $R_L = 0/2$.



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) بستگی بسامدی $|\Gamma(\omega)|^2$ برای ضرایب تبدیل گوناگون در سامانه‌ای با یک درجه آزادی.

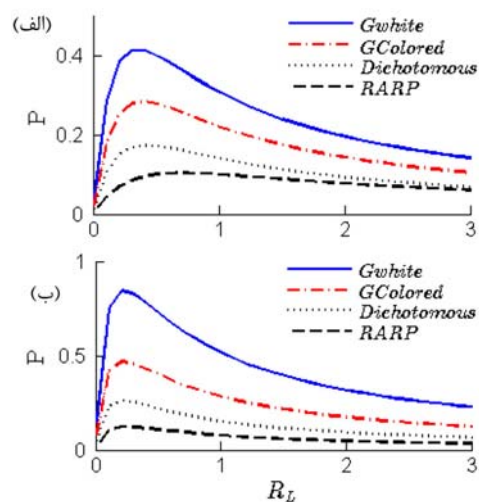


شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) بستگی بسامدی $|\Gamma(\omega)|^2$ برای ضرایب تبدیل گوناگون (الف) $k_1 = 1/0$ و $k_2 = 0/5$ و (ب) $k_1 = 4/0$ و $k_2 = 1/5$.

ضرایب دیگر سامانه، مانند ضرایب جفت‌شدگی، نیز روی محل بیشینه توان خروجی تأثیرگذارند.

برای بررسی اثر ضرایب جفت‌شدگی دو بخش مکانیکی و الکتریکی بر توان خروجی به شکل ۴ نگاه کنید. در این شکل، ضرایب جفت‌شدگی دو بخش الکتریکی و مکانیکی برابر یکدیگر در نظر گرفته شده‌اند، به بیان دیگر $k_p = k_v$ می‌بینیم که توان تولیدی برای نوفه‌های گاوسی رنگی، تلگرافی و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای دارای یک بیشینه هستند.

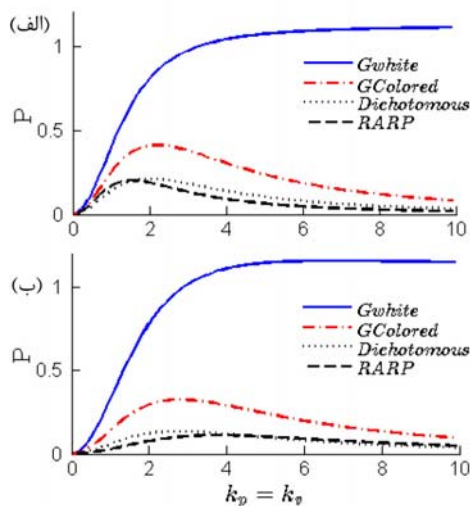
شکل ۵ بستگی بسامدی $|\Gamma(\omega)|^2$ را برای ثابت‌های گوناگون سامانه شکل ۱ (ب) نشان می‌دهد. ضرایب این سامانه عبارتند از $C_L = 2$ و $R_L = 0/5$ ، $b = 1$ ، $m_1 = 3/0$ ، $m_2 = 1/0$.



شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) توان تولیدی سامانه یک درجه آزادی برای نوفه‌های ورودی گوناگون. (الف) $k_p = 1$ و $k_v = 1$ و (ب) $k_p = 2$ و $k_v = 2$.

خروجی سامانه ۱ (الف) بر حسب مقاومت بار برای نوفه‌های گوناگون در شکل ۳ نشان داده شده است.

همان طور که از شکل ۳ پیدا است، استفاده از نوفه گاوسی سفید به عنوان ورودی، به تولید بیشترین توان خروجی توسط مولد می‌انجامد. نوفه گاوسی رنگی پس از نوفه گاوسی سفید بیشترین توان خروجی را داراست و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای کمترین توان تولیدی را در میان نوفه‌های گوناگون دارد. توان خروجی بر حسب مقاومت بار برای تمام نوفه‌ها دارای یک بیشینه است که جای این بیشینه برای نوفه‌های گوناگون متفاوت است. با این وجود، از مقایسه شکل‌های ۳ (الف) و ۳ (ب) می‌توان دریافت که افزون بر نوع نوفه،



شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) بستگی توان تولیدی سامانه مولد انرژی به ضرایب جفت‌شدگی دو بخش الکتریکی و مکانیکی برای (الف) $k_1 = 1$ و $k_2 = 0.5$ ، $R_L = 0.2$ ، $C_L = 2$ ، برای (ب) $k_1 = 1.5$ و $k_2 = 4$ ، $R_L = 0.2$ ، $C_L = 2$.

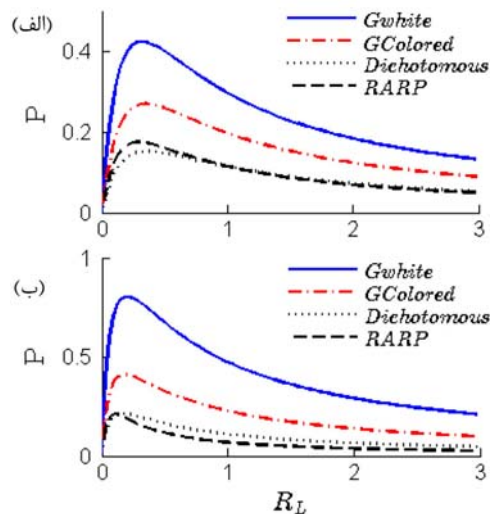
از این شکل پیداست، توان تولیدی برای نوفه‌های گاوسی رنگی، تلگرافی و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای دارای یک بیشینه هستند. اما توان تولیدی نوفه گاوسی سفید با افزایش $k_p = k_v$ افزایش یافته و به یک مقدار حدی میل می‌کند.

در ادامه به مطالعه مولد انرژی ناخطی می‌پردازیم. ضرایب مسئله و نوفه‌ها مشابه سامانه با دو درجه آزادی خطی هستند و داریم $k_p = 1$ و $k_v = 1$.

شکل ۸ نشان می‌دهد که وجود جملات ناخطی در معادلات حرکت مولد، به افزایش ناچیز توان خروجی می‌انجامد. برای به دست آوردن میزان تأثیر دینامیک ناخطی، پارامتر $\chi(R_L, \kappa_1, \kappa_2)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi(R_L, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{P_{VD\text{-nonlinear}} - P_{VD\text{-linear}}}{P_{VD\text{-linear}}} \times 100 \quad (14)$$

در معادله (۱۴) $P_{VD\text{-nonlinear}}$ و $P_{VD\text{-linear}}$ به ترتیب عبارتند از توان خروجی سامانه با دو درجه آزادی خطی و ناخطی. پارامتر $\chi(R_L, \kappa_1, \kappa_2)$ درصد افزایش توان خروجی سامانه با دو درجه آزادی ناخطی را نسبت به سامانه با دو درجه آزادی خطی مشخص می‌کند. برای نوفه گاوسی رنگی در مقاومت بار بی‌بعد شده $R_L = 0.3$ ، توان سامانه ناخطی ۱.۶ درصد بیشتر از



شکل ۸. (رنگی در نسخه الکترونیکی) توان تولیدی سامانه با دو درجه آزادی برای نوفه‌های ورودی گوناگون. (الف) $k_p = 1$ و $k_1 = 1$ و $k_2 = 2$ ، $C_L = 0.5$ ، برای (ب) $k_1 = 1.5$ و $k_2 = 4$ ، $C_L = 0.5$ ، $k_p = 1$.

ضرایب مربوط به نوفه‌ها بیشتر معرفی شده‌اند. از مقایسه شکل ۵ با شکل ۲ مشخص است که افزودن یک درجه آزادی به سامانه، موجب گسترده شدن پاسخ سامانه در حوزه بسامد شده است. توجه کنید وقتی $k_p = 1$ و $k_v = 1$ تابع پاسخ سامانه با یک درجه آزادی، تابع پاسخ تا بسامد بی‌بعد حدود $\omega = 3$ مقدار قابل توجهی دارد. در حالی که تابع پاسخ مربوط به سامانه با دو درجه آزادی، تا حدود $\omega = 5$ مقدار قابل توجهی را داراست.

در ادامه در شکل ۶ توان خروجی به ازای نوفه‌های گوناگون ورودی به سامانه دوم را با هم مقایسه می‌کنیم. ضرایب مسئله عبارتند از $k_1 = 1$ و $k_2 = 0.5$. همان‌طور که از شکل ۶ پیداست، برای این سامانه نیز نوفه گاوسی سفید دارای بالاترین توان تولیدی است. با این وجود توان خروجی دو نوفه تلگرافی و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای، برای سامانه با دو درجه آزادی به هم نزدیک‌تر شده‌اند.

بستگی توان تولیدی مولد با دو درجه آزادی به ضرایب جفت‌شدگی بین دو بخش الکتریکی و مکانیکی در شکل ۷ نشان داده شده است. فرض کرده‌ایم $k_p = k_v$. همان‌گونه که

رنگی رشد بیشتری از خود نشان می‌دهد.

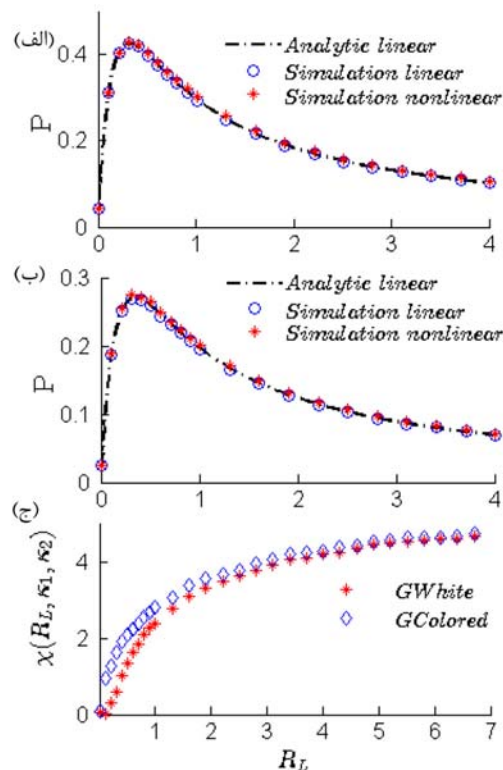
۴. جمع بندی و نتیجه گیری

شکل ۲ نشان می‌دهد که پاسخ بسامدی سامانه با یک درجه آزادی در یک بسامد خاص به مقدار بیشینه می‌رسد. مقدار این بسامد افزون بر جرم وزنه نوسان‌کننده و ثابت فنر متصل به آن، به ضرایب جفت‌شدگی دو بخش الکتریکی و مکانیکی نیز وابسته است.

با توجه به شکل ۳ می‌توان دید که توان تولیدی سامانه با یک درجه آزادی به ازای یک مقاومت بار بیشینه می‌شود. اندازه این مقاومت بار علاوه بر نوع نوفه ورودی، به مؤلفه‌های دیگر سامانه مانند ضرایب جفت‌شدگی نیز وابسته است. برای نمونه در شکل ۳ (ب) با دو برابر شدن ضرایب جفت‌شدگی، توان تولیدی در مقاومت بار کوچک‌تری بیشینه می‌شود. از سویی، افزایش ضرایب جفت‌شدگی به افزایش توان تولیدی سامانه می‌انجامد. به عنوان مثال به ازای $k_p = 1$ و $k_v = 1$ بیشینه توان تولیدی بی‌بعد شده از نوفه گاوسی سفید، گاوسی رنگی، تلگرافی و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای به ترتیب برابر است با ۰/۴۱، ۰/۲۸، ۰/۱۷ و ۰/۱۰. با دو برابر کردن ضرایب جفت‌شدگی، توان تولیدی برای همان نوفه‌ها به ترتیب به مقادیر ۰/۸۵، ۰/۴۶، ۰/۲۶ و ۰/۱۳ ارتقا پیدا می‌کند.

همان گونه که در شکل ۴ پیداست، برای سه نوفه گاوسی رنگی، تلگرافی و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای، با افزایش $k_p = k_v$ توان تولیدی، نخست افزایش یافته و سپس کاهش پیدا می‌کند. این در حالی است که توان تولیدی از نوفه گاوسی سفید با افزایش $k_p = k_v$ نخست به تندی و سپس به آهستگی افزایش پیدا می‌کند. محاسبات عددی نشان می‌دهند که توان تولیدی نوفه گاوسی سفید با افزایش $k_p = k_v$ به سمت یک مقدار حدی میل می‌کند. این مقدار حدی برای ضرایب نمایش داده شده در شکل ۴ برابر ۱/۴۳ است.

شکل ۵ پاسخ بسامدی سامانه دو درجه آزادی مولد انرژی را نشان می‌دهد. در شکل ۵ (الف) که ضرایب فنر $k_1 = 1$ و $k_2 = 0.5$ هستند، به ازای ضرایب گوناگون جفت‌شدگی



شکل ۸ (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه توان تولیدی سامانه با دو درجه آزادی خطی و ناخطی برای (الف) نوفه گاوسی سفید و (ب) نوفه گاوسی رنگی. (ج) $X(R_L, \kappa_1, \kappa_2)$ برای نوفه گاوسی سفید و نوفه گاوسی رنگی. ضرایب ناخطی فنرها عبارتند از $\kappa_1 = 0.05$ و $\kappa_2 = 0.05$.

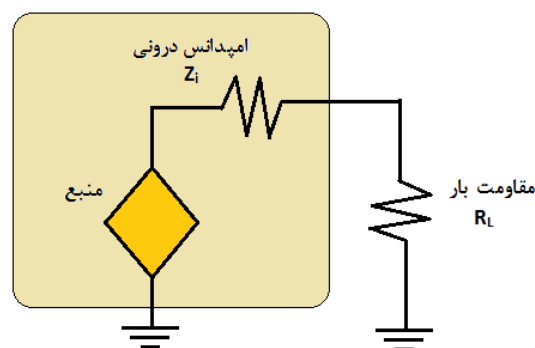
توان خروجی سامانه خطی است. X به ازای $R_L = 20$ در حدود ۳/۴ درصد به دست می‌آید. برای هر دو سیگنال گاوسی سفید و رنگی، X با مقدار مقاومت بار رابطه مستقیم دارد. شکل ۸ (ج)، X را برای دو نوفه گوناگون گاوسی سفید و رنگی نشان می‌دهد.

از شکل ۸ (ج) مشخص است که با ورود جملات ناخطی به دینامیک سامانه، X در مقاومت بار کوچک برای نوفه گاوسی رنگی بیشتر از نوفه گاوسی سفید است. با این وجود شکل ۸ (الف) و (ب) نشان می‌دهند که توان تولیدی سامانه برای نوفه گاوسی سفید همچنان بیشتر از توان تولیدی برای نوفه گاوسی رنگی است. با افزایش مقاومت بار، X مربوط به نوفه گاوسی سفید در مقایسه با X مربوط به نوفه گاوسی

گاوسی سفید، گاوسی رنگی، تلگرافی و نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای به ترتیب برابر است با $۰٫۴۳$ ، $۰٫۲۷$ ، $۰٫۱۷$ و $۰٫۱۵$ با دوبرابر کردن ضرایب جفت‌شدگی، توان تولیدی برای همان نوفه‌ها به ترتیب به مقادیر $۰٫۸۰$ ، $۰٫۴۲$ ، $۰٫۲۱$ و $۰٫۲۱$ ارتقا پیدا می‌کند.

در شکل ۷ می‌بینیم که با افزایش $k_p = k_v$ ، توان تولیدی برای نوفه گاوسی سفید به یک مقدار حدی میل می‌کند. این مقدار حدی برای ضرایب شکل ۷ (الف) و (ب) برابر با $۱٫۱$ است. تفاوت دو شکل ۷ (الف) و (ب) در اینجاست که توان تولیدی از نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای در شکل ۷ (الف) برای $k_p = k_v < ۲٫۰$ از توان تولیدی نوفه تلگرافی بزرگ‌تر می‌شود. اما توان تولیدی نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای در شکل ۷ (ب) برای $k_p = k_v > ۶٫۰$ از توان تولیدی نوفه تلگرافی بزرگ‌تر می‌شود.

با توجه به معادله‌های (۵)، (۶) و (۱۰) می‌توان تولیدی سامانه‌های یک بعدی و دوبعدی را بهینه‌سازی کرد. با رسم توان تولیدی به دست آمده از این روابط در شکل‌های ۳، ۴، ۶ و ۷ می‌توان بیشینه شدن توان تولیدی به ازای ضرایب مسئله را دید. به بیان دیگر، با تنظیم ضرایب گوناگون سامانه تولید انرژی، می‌توان بیشترین توان ممکن را از نوفه ورودی برداشت نمود. می‌توانیم مولد را معادل سامانه‌ای در نظر بگیریم که شامل یک مقاومت بار و یک منبع است. این منبع دارای یک امپدانس درونی Z_i است (به شکل ۹ نگاه کنید). از آنجایی که سامانه مولد انرژی شامل دو قسمت مکانیکی و الکتریکی جفت‌شده است، ضرایب گوناگون سامانه در تعیین امپدانس درونی معادل نقش ایفا می‌کنند. بر اساس قضیه همخوانی امپدانس^۱، برای بیشینه شدن توان مصرفی مقاومت بار، می‌بایست مقاومت بار با امپدانس مدار درونی برابر باشد. شکل‌های ۳ و ۶ نشان می‌دهند توان تولیدی مولد الکترومکانیکی به ازای مقدار مشخصی از مقاومت بار بیشینه



شکل ۹. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مدار معادل مولد الکترومکانیکی شامل امپدانس بار سری شده با یک منبع با امپدانس درونی.

شکل ۵ (الف) ضریب فتر k_p اندازه‌ای کوچک‌تر از تمام ضرایب k_1 ، k_p و k_v دارد و بنابراین، سهم جرم دوم در تعیین بسامد ویژه سامانه کوچک‌تر از سهم جرم اول و جملات مربوط به جفت‌شدگی دو بخش الکتریکی و مکانیکی است. با افزایش ضرایب فتر در مقایسه با ضرایب جفت‌شدگی k_p و k_v ، همان‌طور که شکل ۵ (ب) نشان می‌دهد شکل کلی پاسخ بسامدی به ویژه برای ضرایب جفت‌شدگی کوچک‌تر $k_p = k_v = ۱٫۰$ ، $k_p = k_v = ۲٫۰$ با پاسخ بسامدی سامانه با یک درجه آزادی، تفاوت بیشتری پیدا کرده است.

توان نوفه با دامنه و فاز کاتوره‌ای که برای سامانه با یک درجه آزادی در حدود نیمی از توان تولیدی نوفه دوحالته بود، برای سامانه با دو درجه آزادی رشد قابل توجهی داشته و به توان تولیدی نوفه دوحالته نزدیک شده و حتی تحت شرایطی از آن بیشتر است (نگاه کنید به شکل ۶ (ب)). برای این سامانه نیز دیده شد که با افزایش ضرایب جفت‌شدگی دو بخش مکانیکی و الکتریکی، توان تولیدی در مقاومت بار کوچک‌تری به مقدار بیشینه می‌رسد (شکل ۶). برای سامانه با دو درجه آزادی نیز با توجه به شکل ۶ می‌توان دید که افزایش ضرایب جفت‌شدگی به افزایش توان تولیدی می‌انجامد. به عنوان مثال به ازای $k_p = ۱$ و $k_v = ۱$ بیشینه توان تولیدی بی‌بعد شده از نوفه

۱. Impedance matching

به ازای ضرایب فنر ناخطی $\frac{k_1}{k_2} = 0.02$ و $\frac{k_2}{k_1} = 0.05$ می‌توان توان تولیدی سامانه با دو درجه آزادی را تا حدود ۵ درصد افزایش داد. این افزایش توان تولید شده در سامانه ناخطی، χ ، در مقاومت بار کوچک، رشد بیشتری از خود نشان می‌دهد و با افزایش مقاومت بار از شیب نمودار χ کاسته می‌شود. همچنین از شکل ۸ (ج) می‌توان دریافت که مقدار افزایش توان تولیدی برای مقاومت بار بی‌بعد $R_L \geq 2.0$ تقریباً مستقل از رنگی یا سفید بودن نوفه گاوسی ورودی است. همان طور که در این بخش دیدیم، توان تولیدی مولد ناخطی الکترومکانیکی برای نوفه‌های گاوسی سفید و رنگی، بیشتر از توان تولیدی سامانه مشابه خطی است. پس، می‌توان به کمک تنظیم ضرایب یک مولد ناخطی، توان تولیدی را افزایش داد.

می‌شود. با تنظیم ضرایبی مانند ضرایب فنر، ضرایب جفت‌شدگی و دیگر ضرایب تأثیرگذار، امیدانس درونی مدار معادل تغییر می‌کند. در صورت برابر بودن این امیدانس با امیدانس مقاومت بار، توان تولیدی در مولد بیشینه می‌شود. توان تولیدی سامانه‌های خطی را به گستردگی بررسی کردیم. با این حال، از آنجایی که نیروهای ناخطی در بیشتر سامانه‌های تولید انرژی وجود دارند [۳]، بررسی چنین سامانه‌هایی لازم به نظر می‌رسد. جملات ناخطی در معادله دینامیکی این سامانه‌ها می‌توانند به دلایل ساختاری مانند وجود فنرهای ناخطی در مسئله بروز پیدا کنند. از سوی دیگر برهم‌کنش‌های مغناطیسی و الکترواستاتیکی نیز می‌توانند به بروز دینامیک ناخطی در مسئله بیانجامند. بنابراین یک مولد شامل فنرهای ناخطی با دو درجه آزادی را به دقت بررسی کردیم. شکل ۸ (ج) نشان می‌دهد که

مراجع

1. S Priya and D J Inman, "Energy Harvesting Technologies", Springer, New York (2009).
2. T J Kazmiersky and S Beeby, "Energy Harvesting Systems", Springer, New York (2011).
3. M Younis, "MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics", Springer, New York (2011).
4. R Masana and M Daqaq, *J. Appl. Phys.* **111** (2012) 044501.
5. X Tang and L Zuo, *Smart Mater. Struct.* **21** (2012) 075025.
6. H K Joo and T P Sapsis, *J. Sound Vib.* **333** (2014) 4695.
7. S C Stanton, C C Mc Gehee, and B P Mann, *Physica D* **239** (2010) 640.
8. M Lopez-Suarez, J Agusti, F Torres, R Rurali, and G Abadal, *Appl. Phys. Lett.* **102** (2013) 153901.
9. V Mendez, D Campos and W Horsthemke, *Phys. Rev. E* **88** (2013) 022124.
10. L C J Blystad, E Halvorsen, and S Husa, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **57** (2010) 908.
11. B Ando, S Baglio, F Maiorca, and C Trigona, *Sensors Actuators A* **202** (2013) 176.
12. B Ando, S Baglio, F Maiorca, and C Trigona, *Procedia Engineering*, Two dimensional bistable vibration energy harvester **47**, (2012) 1061.
13. F Cottone, H Vocca, and L Gammaitoni, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 080601.
14. V Racic and J M W Brownjohn, *Adv. Eng. Inf.* **25** (2011) 259.
15. D J Thompson and C J C Jones, *J. Sound Vib.* **231** (2000) 519.
۱۶. ی ع عابدینی، مجله پژوهش فیزیک ایران ۳، ۲ (۱۳۷۹) ۱۴۱.
16. Y Abedini, *Iranian Journal of Physics Research* **3**, 2 (2000) 141.
17. S Zhao and A Erturk, *Smart Mater. Struct.* **22** (2013) 015002.
18. J Kula, T Czernik, and J Luczka, *Phys. Lett. A* **14** (1996) 214.
19. C Van den Broeck, and P Hanggi, *Phys. Rev. A* **30** (1984) 2730.
20. R L Honeycutt, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 600.