مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۷، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۶

ذره در چاه کوانتومی با دیوارهٔ متحرک

رضا ترابی و زهرا رضائی

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه تفرش، تفرش

پست الکترونیکی: rezatorabi@aut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۹/۲۰ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۵/۸/۲۵)

چکیده

در این مقاله مسأله یک ذرهٔ کوانتومی در چاه پتانسیل بی نهایت یک بعدی با دیوارهٔ متحرک را بررسی می‌کنیم. بر پایه رهیافت هامیلتونی مؤثر و با استفاده از مفاهیم تبدیلات پیمانه‌ای نشان می‌دهیم که اثر دیوارهٔ متحرک به صورت یک عامل فاز اضافی در تابع موج ظاهر می‌شود که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد.

واژه‌های کلیدی: شرایط مرزی وابسته به زمان، چاه پتانسیل بی‌نهایت، تبدیلات پیمانه‌ای، فاز دیراک

۱. مقدمه

در مکانیک کوانتومی، مسأله ذره در جعبه از جمله مسائلی است که به صورت تحلیلی حل می‌شود. به علت سادگی این مسأله، بسیاری از دستگاه‌های کوانتومی پیچیده با آن تقریب زده می‌شوند. برای مثال، در اپتوالکترونیک[۱] و ابزارهایی مانند لیزرهای چاه کوانتومی[۲]، کاربرد دارد. همچنین برای مدل کردن یک شبکه در مدل کرونیگ- پنی[۳] از مسأله چاه کوانتومی استفاده می‌شود. در اینجا هدف ما مطالعه مسأله یک ذره در چاه پتانسیل بی‌نهایت یک بعدی با شرایط مرزی وابسته به زمان (دیوارهٔ متحرک) می‌باشد.

دینامیک یک ذرهٔ کوانتومی در چاه بی‌نهایت یک بعدی با دیواره‌های متحرک با رهیافت‌های گوناگونی مطالعه شده است [۱ – ۱۶]. اولین مقاله در این مجموعه از مقالات [۱] به کار دوشر[۴] و رایس[۵] در ۱۹۶۹ باز می‌گردد. آنها مسأله را توسط مجموعه‌ای کامل از توابع که پاسخ‌های دقیق معادلهٔ شرودینگر وابسته به زمان هستند، بررسی نمودند. مقاله آنها هم به عنوان مرجعی برای روش‌های تقریبی [۲] و هم به عنوان یک مثال مقایسه‌ای برای سایر مطالعات دقیق [۳ و ۴]، یک منبع اصلی محسوب می‌شود. در [۵ و ۶] این مسأله در زمینهٔ شتاب فرمی

۱. Optoelectronics
۲. Quantum well lasers
۳. Kronig-Penny
۴. Doescher
۵. Rice

کوانتومی[1] به کار گرفته شده است. یک رهیافت جامع‌تر و به لحاظ ریاضی غنی‌تر برای این مسأله، در سری مقاله‌های [۷ – ۹] اتخاذ شده است. یک دیدگاه متفاوت هندسی نیز برای این مسأله توسط پرشوگین[2] و پرونین[3] در [۱۰] ارائه شده است که با رهیافت‌های دیگر متفاوت است. در این رهیافت، با استفاده از هندسه دسته تارها[4] نشان داده می‌شود که برای دستگاهی با شرایط مرزی وابسته به زمان، می‌بایست هامیلتونی اصلی به یک هامیلتونی مؤثر تغییر یابد. آنها مسأله ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی وابسته به زمان را به مسأله‌ای با شرایط مرزی ثابت اما با یک هامیلتونی مؤثر جدید تبدیل نموده و سپس با استفاده از نظریهٔ اختلال، به بررسی مسأله در حضور این هامیلتونی مؤثر پرداختند. در این مقاله ما هامیلتونی مؤثر معرفی شده در [۱۰] را به کار می‌گیریم و نشان می‌دهیم که شرایط مرزی وابسته به زمان منجر به ظهور یک عامل فاز در تابع موج ذره می‌شود که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد. عامل‌های فاز در بسیاری حوزه‌های فیزیک ظاهر شده وکاربردهای مختلفی دارند [۱۷ – ۲۴].

براساس هامیلتونی مؤثر ارائه شده در [۱۰] مسأله یک ذره در چاه پتانسیل بی‌نهایت با دیواره متحرک، متناظر با مسأله یک ذره در پتانسیل پیمانه‌ای خواهد شد. از آنجا که دیراک نشان داد تابع موج یک ذرهٔ متحرک در یک میدان الکترومغناطیسی خارجی (به عنوان نمونه‌ای از یک میدان پیمانه‌ای)، علاوه بر عامل فاز دینامیکی متعارف فاز دیگری به دست می‌آورد [۲۲]، بنابراین در این مسأله نیز، این فاز اضافی را یک عامل فاز دیراک می‌نامیم. کاربرد فاز دیراک تنها به حوزهٔ الکترومغناطیس محدود نمی‌شود و در بسیاری از حوزه‌های دیگر فیزیک مانند گردابه‌های آکوستیکی[5] و الکترون‌ها در محیط‌هایی با دررفتگی پیچشی[6] نیز کاربرد دارد [۲۳و ۲۵].

در این مقاله ابتدا در بخش دوم، چگونگی ظهور هامیلتونی

۱. Quantum Fermi acceleration
۲. Pereshogin
۳. Pronin
۴. Fiber bundle
۵. Acoustic vortex
۶. Screw dislocation

مؤثر در این مسأله را با استفاده از رهیافت [۱۰] به طور مختصر مرور می‌کنیم. سپس در بخش سوم، عامل فاز دیراک را به دست آورده و در نهایت در بخش چهارم، به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

۲. هامیلتونی مؤثر ذره در چاه بی‌نهایت با دیوارهٔ متحرک

ذره‌ای را در یک چاه پتانسیل بی‌نهایت با دیوارهٔ متحرک در نظر بگیرید. ضابطهٔ پتانسیل ذره به صورت

$$V(x)=\begin{cases} 0 & x\in[0,L(t)] \\ \infty & \text{سایر} \end{cases}$$

است که $L(t)$ عرض چاه می‌باشد. دینامیک کوانتومی ذره‌ای به جرم m با معادلهٔ شرودینگر

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t), \qquad (۱)$$

داده می‌شود که $\psi(x,t)$ تابع موج ذره است و در شرایط مرزی

$$\psi(0,t)=\psi(L(t),t)=0,$$

صدق می‌کند. تابع موج $\psi(x,t)$ می‌تواند بر حسب توابع موج پایهٔ $u_n(x,t)$ به صورت $\psi(x,t)=\sum_n C_n(t)u_n(x,t)$ بیان شود که $C_n(t)$ ها توابع ناشناخته‌ای هستند. شرط متعامد بودن ویژه‌توابع هامیلتونی به صورت

$$\int_0^{L(t)} u_m^* u_n dx=\delta_{mn}, \qquad (۲)$$

است که بیان می‌دارد $u_n(x,t)$ها در ناحیهٔ $[0,L(t)]$ تعریف می‌شوند.

برای حل معادلهٔ شرودینگر (۱) می‌بایست اثر عملگر $\frac{\partial}{\partial t}$ بر $u_n(x,t)$ را در نظر بگیریم. تعریف سادهٔ مشتق جزئی به صورت

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{u_n(x,t+\delta t)-u_n(x,t)}{\delta t} \qquad (۳)$$

است. اما در استفاده از این عبارت می‌بایست دقت شود زیرا طبق معادلهٔ (۲)، $u_n(x,t+\delta t)$ و $u_n(x,t)$ در ناحیه‌های متفاوتی تعریف می‌شوند [۱۰]. این مشکل از وابسته به زمان بودن شرایط مرزی بر می‌آید. پرشوگین[7] و پرونین[8] در [۱۰]

۷. Pereshogin
۸. Pronin

برای تعریف دقیق مشتق جزئی از هندسهٔ دسته تارها استفاده کردند. آنها نشان دادند که می‌توان در معادلهٔ شرودینگر، مشتق زمانی معمولی را به کار برد به شرطی که هامیلتونی اولیه را با هامیلتونی مؤثری به شکل زیر جایگزین نمود

$$\boldsymbol{H}_{\text{eff}} = \frac{\boldsymbol{p}^{۲}}{۲m} + \frac{\dot{L}}{۲L}\left(\boldsymbol{xp} + \boldsymbol{px}\right), \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \boldsymbol{H}_{\text{eff}}\,|\psi\rangle. \tag{۴}$$

در هامیلتونی مؤثر (۴)، $\boldsymbol{p}$ عملگر تکانه، L اندازهٔ دیواره و $\dot{L} = dL/dt$ سرعت دیواره است. به بیان دیگر، با معرفی یک هامیلتونی مؤثر جدید می‌توان مسأله پیچیدهٔ ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی وابسته به زمان را به مسأله ساده و متعارف ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی ثابت، کاهش داد و به حل آن پرداخت.

۳. فاز دیراک ذرهٔ کوانتومی

به منظور محاسبه تابع موج ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی وابسته به زمان معرفی شده در بخش قبل، ابتدا هامیلتونی مؤثر (۴) را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم

$$\boldsymbol{H}_{\text{eff}} = \frac{۱}{۲m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{m\dot{L}}{L}\boldsymbol{x}\right)^{۲} - \frac{\dot{L}^{۲}}{۲mL^{۲}}\boldsymbol{x}^{۲}.$$

از آنجا که فقط حرکت آهستهٔ دیواره را در نظر می‌گیریم، می‌توان جملهٔ آخر را که از مرتبه $\dot{L}^{۲}$ است نادیده گرفت و هامیلتونی مؤثر به شکل زیر بازآرایی می‌شود

$$\boldsymbol{H}_{\text{eff}} = \frac{۱}{۲m}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A})^{۲}, \tag{۵}$$

که

$$\boldsymbol{A}(x,t) = -\frac{m\dot{L}}{L}\boldsymbol{x}. \tag{۶}$$

این یک نمونه از ظهور میدان پیمانه‌ای در یک دستگاه کوانتومی است. اثر شرط مرزی متحرک به عنوان یک پتانسیل پیمانه‌ای در هامیلتونی ظاهر می‌شود که به سرعت دیواره بستگی دارد. در واقع، ظهور این پتانسیل پیمانه‌ای در مسأله، بهایی است که برای ثابت کردن شرایط مرزی پرداخته‌ایم. اکنون مسأله ما معادل با مسأله ذره در حضور یک پتانسیل برداری می‌شود که ما را قادر می‌سازد تا از مفاهیم تبدیلات پیمانه‌ای برای به دست آوردن تابع موج بهره گیریم.

پیش از محاسبهٔ تابع موج، توجه به این نکته ضروری است که تصحیح وارد به ویژه‌مقادیر انرژی در حالت حرکت آهسته دیواره، کوچک است. در واقع مطابق آنچه در [۱۰] آمده است، می‌توان به سادگی نشان داد که اولین تصحیح ناشی از حرکت دیواره برای ویژه مقادیر انرژی از مرتبهٔ $\dot{L}^{۲}$ است در حالی که تصحیح مرتبهٔ اول به تابع موج از مرتبهٔ $\dot{L}$ است. بنابراین در حالت حرکت آهستهٔ دیواره و در حد جابه‌جایی‌های کوچک، می‌توان از تصحیح وارد بر انرژی ذره صرف‌نظر نمود و فقط تغییر تابع موج را در نظر گرفت. از سوی دیگر به علت حرکت آهستهٔ دیواره، قضیهٔ بی‌دررو[۱] [۲۶] نیز معتبر است. طبق این قضیه، اگر ذره در حالت کوانتومی n باشد، در هنگام حرکت آهستهٔ دیواره در همان حالت کوانتومی n باقی خواهد ماند.

برای یافتن تابع موج، دو معادلهٔ شرودینگر مستقل از زمان در فضای مختصات را در نظر بگیرید که دارای انرژی مشابه هستند اما یکی از آنها شامل میدان پیمانه‌ای A است. این دو معادله عبارتند از

$$\boldsymbol{p}^{۲}\psi_{۱n}(x) = ۲mE\psi_{۱n}(x)\,, \tag{۷}$$

و

$$\left(\boldsymbol{p} - A\right)^{۲}\psi_{۲n}(x) = ۲mE\psi_{۲n}(x). \tag{۸}$$

که $\boldsymbol{p} = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$ می‌باشد. معادله‌های (۷) و (۸) به ترتیب برای ذره‌ای در چاه پتانسیل بی‌نهایت با شرایط مرزی ثابت و ذره‌ای در چاه پتانسیل بی‌نهایت با دیواره‌های متحرک نوشته می‌شوند. مطابق آنچه پیشتر گفته شد، هدف ما یافتن پاسخی برای معادله (۸) با استفاده از برقراری رابطه بین $\psi_{۱n}$ و $\psi_{۲n}$ می‌باشد. این رابطه ما را قادر خواهد ساخت تا تابع موج یک ذره در چاه پتانسیل با دیواره‌های متحرک را با داشتن تابع موج یک ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی مستقل از زمان یا همان دیوارهٔ ثابت، به دست آوریم. بدین منظور فرض می‌کنیم $A = d\Lambda/dx$ و ادعا می‌کنیم که این ارتباط به صورت

۱. Adiabatic theorem

$$\psi_{2n}(x) = e^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}\psi_{1n}(x), \tag{۹}$$

است. با قرار دادن (۹) در (۸) به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$\left(\boldsymbol{p}-\frac{d\Lambda}{dx}\right)^{2} e^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}\psi_{1n}(x) = 2mEe^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}\psi_{1n}(x),$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} & e^{-i\Lambda(x)/\hbar}\left(\boldsymbol{p}-\frac{d\Lambda}{dx}\right)e^{i\Lambda(x)/\hbar}e^{-i\Lambda(x)/\hbar} \\ & \left(\boldsymbol{p}-\frac{d\Lambda}{dx}\right)e^{i\Lambda(x)/\hbar}\psi_{1n}(x) = 2mE\psi_{1n}(x). \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱۰) و (۷) در می‌یابیم که درستی ادعای مطرح شده در (۹) زمانی اثبات می‌شود که نشان دهیم $e^{-i\Lambda(x)/\hbar}\left(\boldsymbol{p}-\frac{d\Lambda}{dx}\right)e^{i\Lambda(x)/\hbar} = \boldsymbol{p}$. این موضوع را می‌توان با نوشتن عملگر تکانه به صورت $\boldsymbol{p}=-i\hbar\frac{d}{dx}$ و اثر دادن دو سمت تساوی بر روی یک تابع دلخواه، ثابت نمود. حال طبق رابطه (۹) و با استفاده از این واقعیت که $A = d\Lambda/dx$، خواهیم داشت

$$\psi_{2n}(x) = \exp\left\{\int(\frac{i}{\hbar}Adx\right\}\psi_{1n}\;\; x). \tag{۱۱}$$

بنابراین پاسخ‌های ψ_{1n} و ψ_{2n} با عامل فاز $e^{i\gamma}$ به یکدیگر مربوط می‌شوند که

$$\gamma = \frac{1}{\hbar}\int Adx \tag{۱۲}$$

فاز دیراک نامیده می‌شود. به این ترتیب اثر دیواره متحرک به صورت یک عامل فاز دیراک در تابع موج ظاهر می‌شود که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد. از آنجا که تابع موج برای ذره‌ای در یک چاه یک بعدی با دیوارهٔ ثابت $\psi_{1n}(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})$ می‌باشد، با به کارگیری پتانسیل پیمانه‌ای (۶) در معادلهٔ (۱۱) به رابطهٔ زیر برای تابع موج ذره در چاه با دیوارهٔ متحرک می‌رسیم

$$\psi_{2n}(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})\exp\{-i\frac{m\dot{L}}{2\hbar L}x^{2}\}. \tag{۱۳}$$

به این ترتیب تفاوت تابع موج ذره در چاه یک بعدی در حالت دیوارهٔ ثابت و متحرک در عامل فاز $\exp\{-i\frac{m\dot{L}}{2\hbar L}x^{2}\}$ می‌باشد که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد.

۴. نتیجه‌گیری

در این نوشتار به بررسی معادلهٔ شرودینگر و تابع موج یک ذرهٔ کوانتومی در چاه پتانسیل بی‌نهایت با دیواره متحرک پرداختیم. اثر شرط مرزی وابسته به زمان به صورت یک پتانسیل پیمانه‌ای در هامیلتونی ظاهر شد. این مسأله مشابه مسأله ذره در حضور یک پتانسیل برداری مغناطیسی می‌باشد. با استفاده از مفاهیم تبدیلات میدان پیمانه‌ای، نشان دادیم که در تابع موج ذره یک فاز دیراک ظاهر می‌شود که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد.

مراجع

1. S W Doescher and M H Rice, *Am. J. Phys*. **37** (1969) 1246.
2. D N Pinder, Am. *J. Phys*. **58** (1990) 54.
3. S T Dembinski, A J Makowski, and P Peplowski, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **28** (1995) 1449.
4. M G E da Luz and B K Cheng, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **25** (1992) 2033.
5. P Seba, *Phys. Rev*. A **41** (1990) 2306.
6. C Scheiniger and M Kleber. *Physica* D **50** (1991) 391.
7. A J Makowski and S T Dembinski, *Phys. Lett*. A **154** (1991) 217.
8. A J Makowski and P Peplowski, *Phys. Lett*. A **163** (1992) 142.
9. A J Makowski, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **25** (1992) 3419.
10. P Pereshogin and P Pronin, *Phys. Lett*. A **156** (1991) 12.
11. A Munier, J R Burgan, M Feix, and E Fijalkow, *J. Math. Phys*. **22** (1981) 1219.
12. M V Berry and G Klein, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **17** (1984) 1805.
13. D M Greenberger, *Physica* B **151** (1988) 374.
14. A Devoto and B Pomorisac, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **25** (1992) 241.
15. A Mostafazadeh, *J. Phys*. A **32** (1999) 8325.
16. V V Dodonov, A B Klimov, and D E Nikonov, *J. Math. Phys*. **34** (1993) 3391.

17. A Shapere and F Wilczek, "*Geometric Phases in Physics*", World Scientific (1989).
18. M Mehrafarin and R Torabi, *Phys. Lett*. A **373** (2009) 2114.
19. R Torabi and M Mehrafarin, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **95** (2012) 277.
20. P J Leek, J M. Fink, A Blais, R Bianchetti, M Göppl, J M Gambetta, D I Schuster, L Frunzio, R J Schoelkopf, and A Wallraff, *Science* **318** (2007) 1889.
21. A A Abdumalikov, J M Fink, K Juliusson, M Pechal, S Berger, A Wallraff, and S Filipp, *Nature* **496** (2013) 482.
22. P A M Dirac, *Proc. Roy. Soc*. A **133** (1931) 60.
23. K Yu Bliokh and Yu P Bliokh, *Ann. Phys*. **319** (2005) 13.
24. R Torabi and Z Rezaei, *Phys. Lett*. A **337** (2013) 1668.
25. R Torabi, *Physica* B **407** (2012) 2109.
26. A Messiah, "*Quantum Mechanics*", North-Holland, Amsterdam (1966).