مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۷، شمارهٔ ۵، زمستان ۱۳۹۶

شبیه‌سازی انتشار امواج گاوسی تخت شده در سیستم‌های اپتیکی ABCD با روش تبدیل پیرا محوری

زهره روستا و علیرضا کشاورز

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

پست الکترونیکی: z.roosta@sutech.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۳/۰۳ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۶/۰۲/۳۱)

چکیده

در این مقاله، انتشار امواج گاوسی تخت شده در سیستم‌های اپتیکی با روش گام مجزای فوریه به صورت عددی، روش ماتریس ABCD و روش تبدیل پیرا محوری شبیه‌سازی و مقایسه می‌شود. برای این منظور، در ابتدا به معرفی پرتو گاوسی تخت شده، محیط غیرخطی غیرموضعی قوی و روش‌های بررسی انتشار امواج پرداخته می‌شود، سپس انتشار پرتو گاوسی تخت شده در فضای آزاد و محیط غیرخطی غیرموضعی قوی با استفاده از روش‌های فوق شبیه سازی می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد که روش تبدیل پیرا محوری می‌تواند یک روش مناسب برای بررسی انتشار امواج در محیط‌های اپتیکی باشد.

واژه‌های کلیدی: انتشار امواج، پرتو گاوسی تخت شده، روش تبدیل پیرا محوری، محیط غیرخطی غیرموضعی قوی، ماتریس ABCD

۱. مقدمه

انتشار امواج الکترومغناطیسی و بررسی ویژگی مفید تابش آنها از موضوعات جالب و کاربردی فیزیک و فوتونیک است. شبیه‌سازی نحوهٔ انتشار امواج در سیستم‌های اپتیکی عمدتاً از طریق حل عددی معادلهٔ موج صورت می‌گیرد که از جمله این روش‌ها می‌توان به روش گام مجزای فوریه اشاره کرد [۱]، همچنین با استفاده از انتگرال پراش هویگنس- فرنل و شکل تغییر یافتهٔ آن با انتگرال کالینز می‌توان با داشتن ماتریس انتقال ABCD مربوط به سیستم اپتیکی، انتشار امواج را در این‌گونه سیستم بررسی کرد [۲]. ماتریس ABCD یک ماتریس ۲×۲ است که معرف ویژگی‌های اپتیکی محیط است و می‌توان از آن برای بیان اثر اپتیکی محیط بر روی پرتوهای نوری استفاده‌کرد. روش دیگر برای بررسی انتشار امواج در یک سیستم اپتیکی، روش تبدیل پیرا محوری است که تاکنون کم‌تر به آن پرداخته شده است [۳]. در این روش که در مقایسه با روش‌های دیگر ساده‌تر و کاربردی‌تر است، با داشتن تابع توزیع انتشار میدان در فضای آزاد و اعمال تبدیل پیرا محوری می‌توان توزیع میدان را پس از عبور آن از هر سیستم

اپتیکی ABCD به دست آورد. بنابراین با داشتن توزیع میدان انتشاری در فضای آزاد به راحتی می‌توان توزیع میدان انتشاری در هر محیط اپتیکی با ماتریس انتقال مشخص را شبیه‌سازی کرد.

پرتو گاوسی لیزر دارای شدت انرژی بالا در مرکز پرتو است که با فاصله گرفتن از مرکز، این شدت کاهش می‌یابد. در برخی از این کاربردها این نوع توزیع شدت ایده‌ال نیست و نیازمند توزیع شدت یکنواخت است که این نوع توزیع با داشتن پرتو گاوسی تخت شده امکان‌پذیر است [۴].

محیط غیرخطی غیرموضعی قوی محیطی است که در آن ضریب شکست یک نقطه از محیط به شدت نور در نقاط دیگر بستگی دارد. خاصیت غیرموضعی محیط ویژگی کلی بسیاری از سیستم‌های غیرخطی است که می‌تواند تأثیر قابل توجهی در بسیاری از پدیده‌ها داشته باشد.

در این مقاله، در ابتدا به معرفی پرتو گاوسی تخت شده و محیط غیرخطی غیرموضعی قوی پرداخته می‌شود، سپس روش گام مجزای فوریه و روش ماتریس ABCD با استفاده از حل انتگرال کالینز بررسی می‌شود و روش تبدیل پیرا محوری معرفی می‌شود و در نهایت انتشار پرتو گاوسی تخت شده در فضای آزاد و محیط غیرخطی غیرموضعی قوی با روش تبدیل پیرا محوری بررسی و شبیه‌سازی می‌شود و با نتایج حاصل از حل انتگرال کالینز و روش عددی گام مجزای فوریه مقایسه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که روش تبدیل پیرا محوری که معرفی و کاربرد آن یکی از اهداف اصلی این تحقیق است، یک روش مناسب برای انتشار امواج در محیط‌های اپتیکی ABCD می‌باشد.

۲. مبانی نظری

توزیع میدان شعاعی یک پرتو گاوسی تخت شدهٔ مرتبه N در صفحه $z=0$ به وسیله معادلهٔ زیر مشخص می‌شود [۵]:

$$E(r,0)=A_0\sum_{n=0}^{N}c_n^{(N)}L_n\left[\frac{2(N+1)r^2}{w_0^2}\right]\exp\left[-\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right], \quad (1)$$

که در آن w_0 اندازهٔ لکه، $A_0=E(0,0)$ و L_n تابع لاگر مرتبهٔ n و $c_n^{(N)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_n^{(N)}=(-1)^n\sum_{m=n}^{N}\frac{1}{2^m}\binom{m}{n}. \quad (2)$$

به ازای z های بزرگ‌تر از صفر، میدان شعاعی پرتو گاوسی تخت شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}E(r,z)&=A_0\frac{w_N(0)}{w_N(z)}\exp\{i[kz-\varphi_N(z)]\}\\&\times\exp\left\{\left[\frac{ik}{2R_N(z)}-\frac{1}{w_N^2(z)}\right]r^2\right\}\\&\times\sum_{n=0}^{N}c_n^{(N)}L_n\left[\frac{2r^2}{w_N^2(z)}\right]\exp[-2in\varphi_N(z)],\end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $\varphi_N(z), R_N(z), w_N(z), w_N(0)$ به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$w_N(0)=w_0/N+1, \quad (4)$$

$$w_N(z)=w_N(0)\sqrt{1+\left[\frac{\lambda z}{\pi w_N^2(0)}\right]^2}, \quad (5)$$

$$R_N(z)=z\left\{1+\left[\frac{\pi w_N^2(0)}{\lambda z}\right]\right\}, \quad (6)$$

$$\varphi_N(z)=\arctan\left[\frac{\lambda z}{\pi w_N^2(0)}\right], \quad (7)$$

میزان غیرموضعی یک سیستم غیرخطی با توجه به پهنای تابع عملکرد سیستم به چهار دستهٔ موضعی، غیر موضعی ضعیف، غیرموضعی معمولی و غیر موضعی قوی تقسیم می‌شود. اگر نسبت پهنای تابع عملکرد سیستم به پهنای پرتو عبوری از سیستم بزرگ‌تر از یک باشد، محیط غیر خطی غیرموضعی قوی است که این ویژگی در برخی از محیط‌های فیزیکی مانند بلورهای نورشکستی [۶]، بخارات جیوه [۷]، چگالش بوز اینشتین [۸] و غیره وجود دارد.

در محیط غیرخطی غیرموضعی ضریب شکست به صورت زیر تغییر می‌کند [۹ و ۱۰]:

$$\Delta n(I)=\int R(x'-x)I(x',z)dx', \quad (8)$$

که x و z مختصهٔ عرضی و انتشاری پرتو هستند و $R(x)$، تابع پاسخ متقارن و موضعی است که پهنای آن میزان غیرموضعی بودن محیط را مشخص می‌کند. با افزایش پهنای تابع پاسخ، تغییر ضریب شکست در هر نقطه، به شدت در مجاورت آن

نقطه بستگی دارد. معیار غیرموضعی بودن به صورت $\gamma = w_m/w_{\circ}$ تعریف می‌شود که w_m پهنای مشخصهٔ تابع پاسخ است. اگر $\gamma > 1$ باشد، محیط غیرخطی غیر موضعی قوی است که در این حالت تغییر ضریب شکست در هر نقطه به شدت در تمامی نقاط بستگی دارد.

توان بحرانی توانی است که در آن اندازهٔ لکهٔ گاوسی در حین انتشار ثابت می‌ماند. توان بحرانی با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$p_{cr} = \frac{1}{\gamma^2 z_{\circ}^2} = \frac{4}{k^2 \gamma^2 w_{\circ}^2}, \qquad (9)$$

که در آن k عدد موج و $z_{\circ} = \pi w_{\circ}^2/\lambda$ طول ریلی است.

انتشار پرتوهای اپتیکی پیرا محوری در محیط غیرخطی غیرموضعی قوی با معادلهٔ شرودینگر غیرخطی غیرموضعی توصیف می‌شود:

$$2ik\frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi - k^2 \gamma^2 p_{\circ}\left(x^2 + y^2\right)\phi = 0. \qquad (10)$$

با توجه به معادلهٔ حاکم بر محیط غیرخطی غیرموضعی قوی ماتریس انتقال این محیط بر حسب توان بحرانی و طول ریلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{p_{\circ}}{p_{cr}}}\frac{z}{z_{\circ}}\right) & \frac{z_{\circ}}{\sqrt{\frac{p_{\circ}}{p_{cr}}}}\sin\left(\sqrt{\frac{p_{\circ}}{p_{cr}}}\frac{z}{z_{\circ}}\right) \\ \frac{1}{z_{\circ}}\sqrt{\frac{p_{\circ}}{p_{cr}}}\sin\left(\sqrt{\frac{p_{\circ}}{p_{cr}}}\frac{z}{z_{\circ}}\right) & \cos\left(\sqrt{\frac{p_{\circ}}{p_{cr}}}\frac{z}{z_{\circ}}\right) \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

می‌توان معادله غیرخطی شرودینگر را با روش‌های معمول حل عددی مورد بررسی قرار داد. یکی از روش‌های حل عددی معادلهٔ موج، روش گام مجزای فوریه است. در این روش معادلهٔ غیر خطی شرودینگر به صورت زیر نوشته می‌شود [۱]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{S})A, \qquad (12)$$

که در آن $\hat{D} = \frac{1}{2ik}\nabla_t^2$، عملگر خطی دیفرانسیلی و $\hat{S} = -i\Delta nk$ عملگر غیرهمگن یا وابسته به مکان است. در حالت کلی پاسخ معادله به این صورت است:

$$A(x, y, z + \Delta z) = \exp[(\hat{D} + \hat{S})\Delta z]A(x, y, z), \qquad (13)$$

که در آن دو عملگر $\hat{S}$ و $\hat{D}$ مستقل از زمان هستند. در صورتی که این دو عملگر جابه‌جا نشوند با استفاده از رابطه بیکر- هاسدروف و با دقت اولین جملهٔ Δz خواهیم داشت:

$$\exp[(\hat{D} + \hat{S})\Delta z] \approx \exp(\hat{D}\Delta z)\exp(\hat{S}\Delta z), \qquad (14)$$

یعنی می‌توان با عملگرهای دیفرانسیلی و غیرهمگن به صورت مستقل برخورد کرد و نوشت:

$$A(x, y, z + \Delta z) = \exp(\hat{S}\Delta z)\exp(\hat{D}\Delta z)A(x, y, z), \qquad (15)$$

که در نهایت به این صورت نوشته می‌شود:

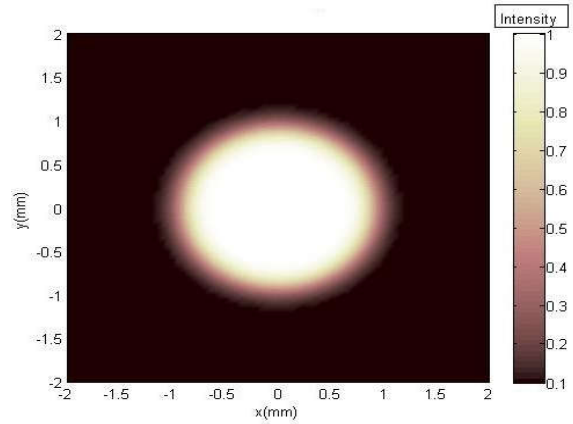
$$\begin{aligned} A(x, y, z + \Delta z) &= \exp(\hat{S}\Delta z) \\ &\times F^{-1}\{\exp\left[\frac{i(k_x^2 + k_y^2)\Delta z}{2k}\right] \\ &\times F\{A(x, y, z)\}, \end{aligned} \qquad (16)$$

که در آن k_x و k_y فضای بسامد و F و F^{-1} تابع تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه هستند. با تکرار فرایند در تمام طول بازه، میدان در مکان موردنظر به دست می‌آید [۱۱- ۱۲]. بنابراین با داشتن معادلهٔ شرودینگر غیرخطی حاکم بر محیط، تابع موج اولیه پرتو گاوسی تخت شده و به کارگیری روش گام مجزای فوریه می‌توان انتشار پرتو گاوسی تخت شده را در محیط غیرخطی غیرموضعی قوی بررسی کرد.

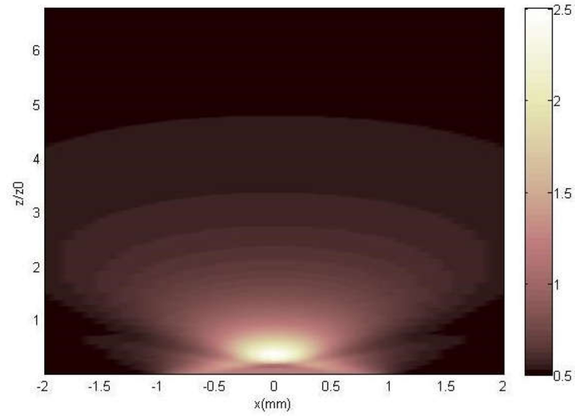
از دیگر روش‌های بررسی انتشار امواج روش ماتریس ABCD با استفاده از حل انتگرال پراش کالینز است. به ازای z های بزرگ‌تر از صفر میدان شعاعی پرتو گاوسی تخت شده طبق انتگرال تعمیم یافته پراش کالینز در محیط ABCD به صورت زیر بیان می‌شود [۲]:

$$\begin{aligned} E(r, z) &= \frac{ik}{2B}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{w_{\circ N}^{2n}}\left(\frac{1}{w_{\circ N}^2} + \frac{ikA}{2B}\right)^{-n-1} \\ &\times \exp\left(\frac{-ikD}{2B}r^2\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{\frac{k^2}{4B^2}r^2}{\frac{1}{w_{\circ N}^2} + \frac{ikA}{2B}}\right) \times L_n\left(\frac{\frac{k^2}{4B^2}r^2}{\frac{1}{w_{\circ N}^2} + \frac{ikA}{2B}}\right). \end{aligned} \qquad (17)$$

L_n تابع لاگر و A,B,C,D مؤلفه‌های ماتریس انتقال محیطی است که پرتو در آن منتشر می‌شود. بنابراین در این روش با داشتن ماتریس انتقال ABCD محیط موردنظر می‌توان انتشار پرتو گاوسی تخت شده را در آن محیط بررسی کرد.



شکل ۱. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) پرتو گاوسی تخت شده به ازای $N=10$.



شکل ۲. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) انتشار پرتو گاوسی تخت شده در فضای آزاد.

همچنین برای بررسی انتشار امواج در سیستم‌های اپتیکی می‌توان از روش تبدیل محوری استفاده کرد. در روش تبدیل پیرا محوری، میدان E پرتو منتشر شده در سیستم اپتیکی ABCD محوری به صورت زیر به دست می‌آید [۳]:

$$E(r,z)=\frac{1}{A}\exp\left(\frac{ikCr^{2}}{2A}\right)E_{free}\left(\frac{r}{A},\frac{B}{A}\right), \tag{۱۸}$$

که $E_{free}(r,z)$ میدان در فضای آزاد، k عدد موج و A,B,C,D مؤلفه‌های ماتریس انتقال سیستم اپتیکی است. بنابراین با داشتن معادلهٔ انتشار پرتو گاوسی تخت شده در فضای آزاد و ماتریس انتقال مربوط به محیط غیرخطی غیرموضعی قوی می‌توان با استفاده از روش تبدیل پیرا محوری انتشار پرتو گاوسی تخت شده را در محیط غیرخطی غیرموضعی قوی بررسی و شبیه‌سازی کرد.

۳. شبیه‌سازی

در پرتوهای گاوسی تخت شده، $N=0$ توزیع متناظر با پرتو TEM_{00} معمولی با اندازهٔ لکهٔ w_0 را می‌دهد. با افزایش N، پرتو گاوسی تخت شده خواهیم داشت. پرتوی گاوسی تخت شده به ازای $N=10$ در شکل ۱ رسم شده است.

در این مقاله، انتشار پرتو گاوسی تخت شده دایروی به ازای $N=10$ در نظر گرفته شده و اندازهٔ لکهٔ $w_0=1\ mm$ و $\lambda=1064\ nm$ انتخاب شده است.

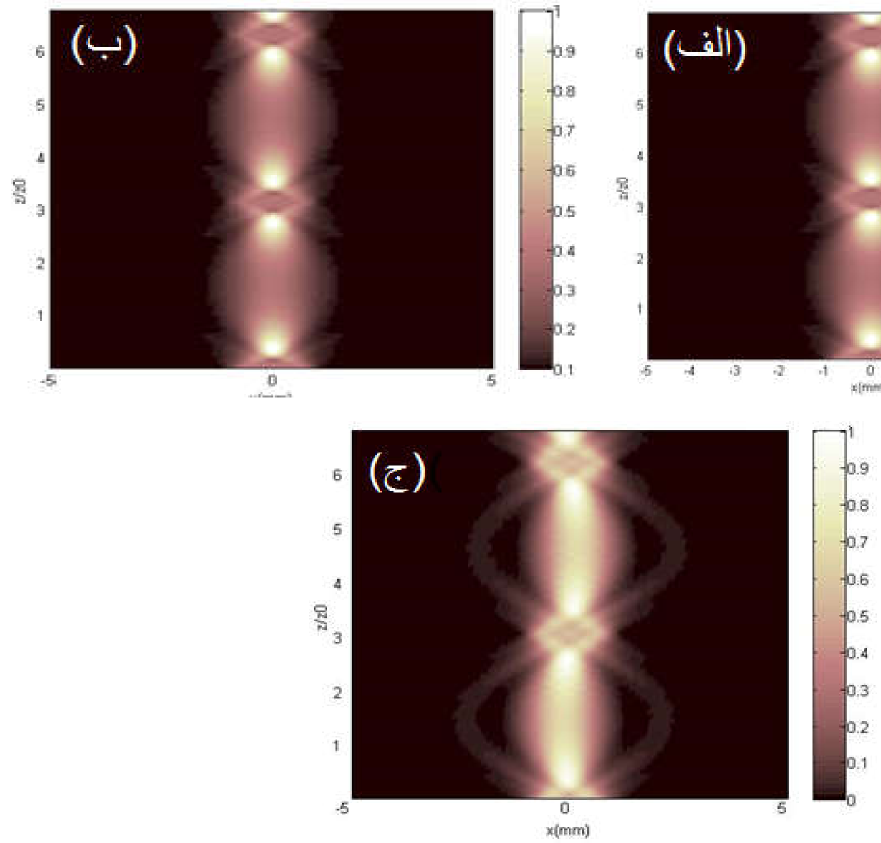
شکل ۲ انتشار پرتوگاوسی تخت شده را در فضای آزاد نشان می‌دهد. با جایگزین کردن معادلهٔ انتشار پرتو گاوسی تخت شده در فضای آزاد و ماتریس انتقال محیط غیرخطی غیرموضعی قوی در معادلهٔ تبدیل پیرا محوری، انتشار پرتو گاوسی تخت شده در محیط غیرخطی غیرموضعی قوی به دست‌خواهدآمد.

شکل ۳ انتشار پرتو گاوسی تخت شده را در محیط غیرخطی غیرموضعی قوی نشان می‌دهد. همان گونه که انتظار می‌رود نتایج حاصل از روش تبدیل پیرا محوری با نتایج شبیه سازی حاصل از روش حل انتگرال کالینز [۲] یکسان است و نتیجهٔ حاصل از حل عددی معادلهٔ موج با استفاده از روش فوریه گام مجزا بسیار نزدیک به نتایج قبل و قابل قبول است.

همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، با افزایش z پرتو گاوسی تخت شده دایروی در فضای آزاد واگرا می‌شود، اما در محیط غیرخطی غیرموضعی قوی شکل ۳ با توجه به شدت پرتو ورودی، توزیع شدت پرتو کانونی شده و پرتو به صورت تناوبی تکرار می‌شود.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله انتشار امواج گاوسی تخت شده در محیط غیرخطی غیرموضعی قوی با روش تبدیل پیرا محوری بررسی و



شکل ۳. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) انتشار پرتو گاؤسی تخت شده در محیط غیرخطی غیرموضعی قـوی بـه ازای $p_0/p_{cr}=1$ بـا اسـتفاده از (الف) تبدیل پیرا محوری، (ب) حل انتگرال کالینز (ج)روش فوریه گام مجزا.

شبیه‌سازی شد. روش کلی معمول برای بررسـی انتشـار امـواج حل تحلیلی است، امـا بـا توجـه بـه پیچیـده بـودن ایـن روش می‌توان از روش‌های تقریبی برای بررسی انتشار امواج اسـتفاده کرد. یکی از این روش‌ها حل عددی معادلهٔ موج اسـت کـه بـا روش‌هایی مانند روش فوریه گام مجزا انجام می‌شود، امـا ایـن روش نیز از پیچیدگی‌هایی برخوردار است، بنابراین می‌تـوان از روش‌های ساده‌تری مانند روش ماتریس ABCD و روش تبدیل پیرا محوری استفاده کرد که نتایج آنها با نتایج حاصـل از روش حل عددی مشابه است. در ایـن دو روش بـا داشـتن مـاتریس ABCD انتقال محـیط مـی‌تـوان انتشـار مـوج را در آن محـیط بررسی کرد. در روش مـاتریس ABCD بایـد بـا حـل انتگـرال پراش کالینز مربوط به یک موج، معادلـهٔ میـدان را بـه صـورت تابعی از مؤلفه‌های ماتریس ABCD به دست آورد که با توجـه به کلی بودن معادله تبدیل پیرا محـوری بـرای امـواج مختلـف، فقط با داشتن تابع موج انتشار در فضای آزاد و ماتریس انتقـال مربوط به محیط اپتیکی می‌توان انتشار موج مورد نظـر را در آن محیط بررسی کرد. پس در حالی کـه حـل معادلـهٔ مـوج بـرای انتشار یک پرتو در یک محیط اپتیکی با پیچیـدگی‌هـایی همـراه است، از روش تبدیل پیرا محوری می‌توان به‌سادگی برای انتشار امواج در محیط‌های اپتیکی استفاده کرد، که در کار حاضر ضمن معرفی این روش به کاربرد آن در محیط غیرخطـی غیرموضـعی قوی و مقایسه روش‌های مختلف به جهت تأکید به پاسخگویی مناسب روش تبدیل پیرا محوری پرداخته شد.

مراجع

1. C P Ting and T Kim, "*Engineering Optics with MATLAB*", World Scientific, (2006).
2. V Bagini, R Borghi, F Gori, A M Pacileo, and M Santarsiero, *J. Opt. Soc. Am.* A, **13** (1994) 1385.
3. A. Keshavarz, G. Honarasa, *World scientific*, **23** (2014) 1450035.
4. F Gori, *Opt. Commun.*, 107(1994) 335.
5. W Krolikowski, O Bang, J Wyller, J J Rassmussen, *Acta. Phys. Polonica* A., **103** (2003) 2.
6. B Crosignani, A Degasperis, E DelRe, P Di Porto, and A J Agranat, *Phys. Rev. Lett*., **82** (1999) 1664.
7. D Suter and T Blasberg, *Phys. Rev.* A, **48**(1993) 4583.
8. F Dalfovo, S Giorgini, L P Pitaevskii, and S Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) 463.
9. Zh Yang, D Lu, W Hu, Y Zheng, X Gao, Q Guo, *phys. lett.* A, (2010) 4007.
10. D Q Lu, W Hu, and Q Guo, *Eur. Phys. Lett.*, **86** (2009) 44004.
11. K Okamoto, "*Fundamentals of Optical Waveguides*", Academic Press, Amesterdam, (2006).
12. G Lifante, "*Integrated Photonics. Fundamental*", Wiley, Chichester, (2003).