

## تبدیلات دوگانگی آبلی استاندارد در گرانش $f(T)$

محمد عطازاده و علی اقبالی

گروه فیزیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز

پست الکترونیکی: atazadeh@azaruniv.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۱۰/۲۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۰۵/۱۷)

### چکیده

با توجه به مرتبه اختلال، معادلات حرکت مربوط به کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین در واقع نوعی تعمیم معادلات انیشتین‌اند. بنابراین با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش  $f(T)$  تصویر می‌شود، که ارتباطی بین میدان دیتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. با در نظر گرفتن یک جهان همگن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش  $f(T)$  نشان می‌دهیم که این لاگرانژی تحت تبدیلات همدیس متریک و دوگانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می‌ماند. در نهایت با استفاده از لاگرانژی دوگان یافته و همچنین ناوردایی اسکالر پیچش  $T$  تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس  $1/a(t) \rightarrow a(t)$  شکل دقیق  $f(T)$  به دست آورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تبدیلات دوگانگی آبلی، کنش مؤثر ریسمان، گرانش  $f(T)$

### ۱. مقدمه

از دیدگاه نظریه ریسمان عمیق‌تر می‌کند، چرا که تبدیل دوگان- $T$  دو مدل سیگما با فضاهای هدفی را که کاملاً از لحاظ هندسی تفاوت دارند به هم ربط می‌دهد، به طوری که این دو مدل از نظر فیزیکی کاملاً معادل هستند. بوشر<sup>[۲]</sup> نشان داد که تقارن  $O(d, d, z)$  می‌تواند خاصیت مربوط به تمام ریسمان‌های منتشر شده در فضا-زمان‌های خمیده نیز باشد، به شرطی که فضای پس‌زمینه این ریسمان‌ها دارای تقارن ایزومتري آبلی باشد. بعدها این تقارن به حالتی که فضای پس‌زمینه دارای گروه تقارن ایزومتري آبلی  $d$ -بعدی باشد تعمیم یافت و نشان داده شد که فضای مدولی  $O(d, d, z)$  همان گروه تقارن مربوط به

در اواخر دهه هشتاد میلادی مطالعه تقارن دوگانگی در فیزیک انرژی‌های بالا توجه اکثر فیزیک‌دانان نظری را به خود جلب کرده بود. تقارن دوگانگی در نظریه ریسمان به صورت دوگانگی  $R \leftrightarrow \alpha' / R$  در فشرده‌سازی چنبره‌ای<sup>۱</sup> برای اولین بار خود را نشان داد [۱]. بعدها درک این دوگانگی با مطالعه دوگانگی در مدل‌های سیگمای دو بعدی بیشتر فهمیده شد [۲]. به این نوع دوگانگی، دوگانگی از نوع  $T$ - $T$  می‌گویند [۳]. تقارن دوگانگی  $T$ -در نظریه ریسمان درک ما را از هندسه فضا-زمان

۱. Torodial compactification

۲. Target

۳. Buscher

مدل‌های گرانشی  $f(R)$  تحت تبدیلات دوگانگی ناوردا هستند که این می‌تواند برای ارتباط بین نظریه‌های گرانش تعمیم‌یافته و نظریه ابررسمان در حد انرژی‌های پایین مفید باشد. نتیجه مهم رویکرد بالا تفسیر هندسی میدان دیلتون<sup>۴</sup> است که این میدان در نظریه ریسمان نقش مهمی را ایفاء می‌کند. اخیراً با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش  $f(R)$  تصویر داده شده که ارتباطی بین میدان دیلتون و انحنا اسکالر ریچی<sup>۵</sup> برقرار می‌کند [۱۲]. در مرجع [۱۲] با استفاده از تبدیل همدیس متریک، دوگانگی ضریب مقیاس<sup>۶</sup> و همچنین با استفاده از تقارن نوتر جواب‌های دقیق کیهان‌شناسی در نظریه  $f(R)$  به دست آورده شده است. در این مقاله با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش  $f(T)$  تصویر می‌شود که ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. سپس با در نظر گرفتن یک جهان همگن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش  $f(R)$  نشان می‌دهیم که این لاگرانژی تحت تبدیلات همدیس متریک و دوگانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می‌ماند. در نهایت با استفاده از لاگرانژی دوگان یافته و همچنین با استفاده از ناوردایی اسکالر پیچش  $T$  تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس  $a(t) \rightarrow 1/a(t)$  شکل دقیقی برای  $f(T)$  به دست آورده می‌شود.

## ۲. تبدیلات دوگانگی آبلی متعارف

همان طور که در مقدمه اشاره شد در حالت آبلی برای به دست آوردن مدل دوگان از روی مدل اصلی ابتدا تقارن ایزومتري را پیمان‌های می‌کنند. در زیر روش به دست آوردن تبدیلات پیمان‌های آبلی استاندارد که به تبدیلات بوشر [۲] مشهورند شرح داده می‌شود (برای مرور دقیق‌تر به مرجع [۳] مراجعه کنید). کنش توصیف کننده یک مدل سیگمای دو بعدی بر روی یک خمینه  $d$ -بعدی  $M$  با مختصات‌های  $\{X^A\}$ ,

کنش مؤثر ریسمان است [۴]. دو مدل سیگما که توسط دوگانگی آبلی به هم مربوط می‌شوند کاملاً از لحاظ فیزیکی معادل‌اند، زیرا نشان داده شده است که در حالت کلاسیک این دو مدل تبدیل کانونیک یکدیگرند [۵]. از دیدگاه نظریه سیگما برای داشتن دوگانگی آبلی استاندارد شرط وجود تقارن ایزومتري الزامی است [۲]. در حالت آبلی برای به دست آوردن مدل دوگان از روی مدل اصلی ابتدا تقارن ایزومتري را پیمان‌های می‌کنند، سپس شدت میدان مربوط به این میدان پیمان‌های  $A_\alpha$  همراه با ضریب لاگرانژ را به کنش اضافه می‌کنند  $(\tilde{\theta}F_{\mu\nu})$ ، به طوری که با کار در پیمان‌های خالص اگر نسبت به ضریب لاگرانژ انتگرال گیری شود، با تثبیت پیمان‌های خود مدل اصلی به دست می‌آید. اما اگر روی میدان‌های پیمان‌های  $A_\alpha$  انتگرال گیری شود در آن صورت پس از تثبیت پیمان‌های کنش مدل دوگان به دست می‌آید [۶] به طوری که ضریب لاگرانژ نقش یک بعد هندسی فضای دوگان را بازی می‌کند.

مدل‌های گرانش تعمیم‌یافته<sup>۱</sup> به عنوان یکی از مدل‌های جایگزین ثابت کیهان‌شناسی برای توصیف انبساط شتاب‌دار کیهان پیشنهاد می‌شود [۷]. در این مدل‌ها فرض می‌شود که گرانش در مقیاس‌های کیهانی و چگالی‌های کم رفتار متفاوتی از گرانش اینشتینی دارد که یکی از این مدل‌های موفق گرانش  $f(R)$  است [۸]. مدل‌های گرانشی تعمیم‌یافته از اهمیت به سزایی برخوردارند، زیرا مدل‌هایی از این نظریه می‌توانند دینامیک انبساط شتاب‌دار کیهان را توصیف کنند. بر خلاف این نظریه، گرانش اینشتینی در مقیاس‌های کیهانی خوب کار نمی‌کند.

نظریه گرانش تعمیم‌یافته جدیدی به نام نظریه  $f(T)$  در سال‌های اخیر مطرح شده است [۹] که نسخه تعمیم‌یافته گرانش تله‌پارالل<sup>۲</sup> است. در واقع گرانش تله‌پارالل برای متحد کردن نظریه‌های گرانش و الکترومغناطیس اولین بار توسط اینشتین پیشنهاد شده بود که در این رهیافت به جای انحنا فضا زمان، پیچش<sup>۳</sup> فضا زمان در نظر گرفته می‌شود [۱۰].

در تعدادی از مقالات نظیر [۱۱] نشان داده شده است که

۴. Dilaton field

۵. Ricci

۶. Scale factor duality

۱. Modified gravity theories

۲. Teleparallel gravity

۳. Torsion

با انتگرال‌گیری روی میدان‌های پیمانه‌ای و سپس با تثبیت پیمانه به صورت  $\theta = 0$  خواهیم داشت:

$$A_\alpha = -\frac{1}{G_{\alpha\alpha}} [G_{\alpha\mu} \partial_\alpha x^\mu + \varepsilon_\alpha^\beta (B_{\beta\mu} \partial_\beta x^\mu + \partial_\beta \tilde{\theta})], \quad (4)$$

با جایگذاری میدان‌های پیمانه‌ای  $A_\alpha$  بالا در کنش (۳) و سپس با تثبیت پیمانه مدل دوگان به شکل زیر نتیجه‌گیری می‌شود

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha'}} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} [h^{\alpha\beta} & (\tilde{G}_{\alpha\mu} \partial_\alpha \tilde{\theta} \partial_\beta \tilde{\theta} + \gamma \tilde{G}_{\alpha\mu} \partial_\alpha \tilde{\theta} \partial_\beta x^\mu \\ & + \tilde{G}_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu) + \varepsilon^{\alpha\beta} \\ & (\gamma \tilde{B}_{\alpha\mu} \partial_\alpha \tilde{\theta} \partial_\beta x^\mu + \tilde{B}_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu) \\ & + \alpha' R^{(\gamma)} \varphi(x)], \end{aligned} \quad (5)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{G_{\alpha\alpha}}, \quad \tilde{G}_{\alpha\mu} = \frac{B_{\alpha\mu}}{G_{\alpha\alpha}}, \\ \tilde{G}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} - \frac{G_{\alpha\mu} G_{\alpha\nu} - B_{\alpha\mu} B_{\alpha\nu}}{G_{\alpha\alpha}}, \\ \tilde{B}_{\alpha\mu} &= \frac{G_{\alpha\mu}}{G_{\alpha\alpha}}, \\ \tilde{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} - \frac{G_{\alpha\mu} B_{\alpha\nu} - G_{\alpha\nu} B_{\alpha\mu}}{G_{\alpha\alpha}}. \end{aligned} \quad (6)$$

تبدیلات بالا نشان می‌دهند که دوگانگی، هندسه‌های مختلف را به هم مربوط می‌کند. این تبدیلات دوگانگی به تبدیلات بوشر مشهورند [۲]. مدل دوگان که با کنش (۵) نمایش داده می‌شود، نیز دارای همان تقارن ایزومتري آبلی هست که در اینجا مختصه ایزومتري همان ضریب لاگرانژ  $\tilde{\theta}$  است. به علاوه اینجا فرض شده است که مختصه‌های خمینه دوگان به صورت  $\{\tilde{X}^A\} = \{\tilde{\theta}, x^\mu\}$  هستند. زمانی که روی میدان‌های پیمانه‌ای انتگرال‌گیری می‌شود تبدیل دوگانگی از ژاکوبی تبدیل، تصحیحات کوانتومی دریافت می‌کند به طوری که در حد یک حلقه این تصحیحات یک انتقال در میدان ديلتون به صورت زیر ایجاد می‌کند [۲].

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ln G_{\alpha\alpha}. \quad (7)$$

به عبارت دیگر اگر مدل سیگمای اصلی (۱) شرایط ناوردایی هم‌دیس تا حد یک حلقه را برآورده کند، سپس مدل دوگان (۵) نیز با شرط انتقال در میدان ديلتون به صورت (۷) شرایط ناوردایی هم‌دیس تا مرتبه یک حلقه را برآورده خواهد کرد.

( $A = 0, 1, \dots, d-1$ ) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha'}} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} & (h^{\alpha\beta} G_{AB} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B \\ & + \varepsilon^{\alpha\beta} B_{AB} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B + \alpha' R^{(\gamma)} \varphi(x)), \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری که  $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma)$  مختصات جهان رویه،  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  میدان تانسوری پادمقارن روی جهان رویه،  $h_{\alpha\beta}$  متریک ذاتی جهان رویه و  $h$  دترمینان آن است.  $G_{AB}$  و  $B_{AB}$  به ترتیب متریک و پتانسیل پیچش مربوط به فضای هدف  $\mathcal{M}$  هستند. ضریب  $\alpha'$  دارای بعد طول به توان دو است.  $\varphi(x)$  میدان ديلتون جفت شده به انحنا اسکالر  $R^{(\gamma)}$  از متریک جهان رویه  $h_{\alpha\beta}$  است. حال اگر کنش (۱) دارای تقارن ایزومتري باشد، در آن صورت می‌توان با در نظر گرفتن مختصات مناسب، تقارن مزبور را به صورت انتقال در امتداد مختصه مربوطه نشان داد، به طوری که متریک  $G_{AB}$ ، میدان تانسوری پادمقارن  $B_{AB}$  و میدان ديلتون  $\varphi(x)$  مستقل از مختصه مربوط به ایزومتري باشند. حال اگر مختصه ایزومتري را با  $\theta$  نمایش دهیم در آن صورت می‌توان با نوشتن مختصات‌های فضای هدف  $\mathcal{M}$  به صورت  $\{X^A\} = \{\theta, x^\mu\}$ ، ( $\mu = 1, \dots, d-1$ ) کنش (۱) را به صورت زیر در نظر گرفت

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha'}} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} [h^{\alpha\beta} & (G_{\alpha\mu} \partial_\alpha \theta \partial_\beta \theta + \gamma G_{\alpha\mu} \partial_\alpha \theta \partial_\beta x^\mu \\ & + G_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu) + \varepsilon^{\alpha\beta} \\ & (\gamma B_{\alpha\mu} \partial_\alpha \theta \partial_\beta x^\mu + B_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu) \\ & + \alpha' R^{(\gamma)} \varphi(x)], \end{aligned} \quad (2)$$

همان طور که در ابتدای این بخش توضیح داده شد برای به دست آوردن مدل سیگمای دوگان کافی است که تقارن ایزومتري را پیمانه‌ای کنیم و شدت میدان مربوط به میدان پیمانه‌ای  $A_\alpha$  را همراه با ضریب لاگرانژ  $\tilde{\theta}$  به کنش اضافه کنیم. در آن صورت کنش (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha'}} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} [h^{\alpha\beta} & (\tilde{G}_{\alpha\alpha} (\partial_\alpha \theta + A_\alpha) (\partial_\beta \theta + A_\beta) \\ & + \gamma \tilde{G}_{\alpha\mu} (\partial_\alpha \theta + A_\alpha) \partial_\beta x^\mu + G_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu) + \varepsilon^{\alpha\beta} \\ & [\gamma \tilde{B}_{\alpha\mu} (\partial_\alpha \theta + A_\alpha) \partial_\beta x^\mu + B_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu] \\ & + 2\varepsilon^{\alpha\beta} \tilde{\theta} \partial_\alpha A_\beta + \alpha' R^{(\gamma)} \varphi(x)]. \end{aligned} \quad (3)$$

در چهار بعد و در غیاب پیچش  $H_{\mu\nu\rho}$ ، تنها اولین و سومین معادله از (۸) را خواهیم داشت. با ضرب  $g^{\mu\nu}$  در اولین معادله از (۸) و سپس با استفاده از سومین معادله نتیجه گیری می شود که

$$\nabla_{\mu}\varphi \nabla^{\mu}\varphi = \frac{1}{4}(\Lambda - R). \quad (10)$$

این معادله در بخش بعدی مفید خواهد بود.

### ۳. گرانث $f(T)$ برای مدل ریسمان-دیلتون

برای بررسی گرانث تله پارالل از دولنگه ای ها<sup>۱</sup> در هر نقطه روی خمینه استفاده می شود  $(e_A(x^\mu))$  که اندیس  $A$  از ۰ تا ۳ روی فضای مماسی از خمینه تغییر می کند. رابطه بین دولنگه ها با متریک از معادله زیر پیروی می کند

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB} e^A_{\mu} e^B_{\nu}, \quad (11)$$

در رابطه بالا  $\nu, \mu$  اندیس های مختصات روی خمینه هستند که از ۰ تا ۳ تغییر می کنند و  $e^A_{\mu}$  تشکیل میدان برداری مماس روی فضای مماسی می دهد به طوری که روی آن فضا متریک تخت  $\eta_{AB}$  تعریف می شود.

در نسبیت عام از هم وستارهای<sup>۲</sup> بدون پیچش لویی-چی-ویتا استفاده می شود در حالی که در گرانث تله پارالل از هم وستارهای بدون انحنا ویتزنباخ<sup>۳</sup> استفاده می شود. بنابراین پیچش  $T^{\rho}_{\mu\nu}$  و هم پیچش  $K^{\rho}_{\mu\nu}$  به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند [۱۳]:

$$T^{\rho}_{\mu\nu} = e^{\rho}_A (\partial_{\mu} e^A_{\nu} - \partial_{\nu} e^A_{\mu}), \quad (12)$$

$$K^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (T^{\rho}_{\mu\nu} + T^{\rho}_{\nu\mu} - T^{\rho}_{\mu\nu}). \quad (13)$$

برای نوشتن چگالی لاگرانژی در کنش نسبیت عام از انحنا ریچی  $R$  استفاده می شود در حالی که برای نوشتن چگالی لاگرانژی تله پارالل به جای انحنا اسکالر ریچی از اسکالر پیچش  $T$  استفاده می شود که به صورت زیر تعریف می شود

$$T \equiv S^{\rho\mu\nu} T^{\rho}_{\mu\nu}, \quad (14)$$

به طوری که در این رابطه

شرط همدیس بودن ریسمان نوع فضاهایی که ریسمان در آن منتشر می شود را محدود می کند. در واقع این شرط الزام می کند که متریک فضای پس زمینه  $G$ ، میدان تانسوری پادمقارن  $B$  و نیز میدان دیلتون  $\varphi$  در یک سری معادلات صدق کنند. این معادلات، در ارتباط با صفر شدن توابع بتای مربوط به کنش مدل سیگمای (۱) می باشند که به صورت زیر داده می شوند:

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}^{(G)} : R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_{\mu\rho\sigma} H^{\rho\sigma}_{\nu} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \varphi &= 0, \\ \beta_{\mu\nu}^{(B)} : \nabla^{\lambda} (e^{-\gamma\varphi} H_{\lambda\mu\nu}) &= 0, \\ \beta^{(\varphi)} : -R + \frac{1}{12} H_{\mu\rho\sigma} H^{\mu\rho\sigma} + \nabla_{\mu} \varphi \nabla^{\mu} \varphi & \\ - \nabla^2 \varphi - \Lambda &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

در معادلات بالا  $R = R_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$  انحنا اسکالر مربوط به متریک  $G_{\mu\nu}$  و  $H_{\mu\nu\rho}$  پیچش مربوط به پتانسیل  $B_{\mu\nu}$  می باشد که به صورت  $H_{\mu\nu\rho} = \partial_{\mu} B_{\nu\rho} + \partial_{\nu} B_{\rho\mu} + \partial_{\rho} B_{\mu\nu}$  تعریف می شود. از طرف دیگر معادلات بالا معادلات حرکت مربوط به کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی های پایین است که این کنش در  $n+1$  بعد به صورت زیر نوشته می شود

$$S = \int d^{n+1}x \sqrt{-G} e^{-\gamma\varphi} \left( R - \frac{1}{12} H_{\mu\rho\sigma} H^{\mu\rho\sigma} + \nabla_{\mu} \varphi \nabla^{\mu} \varphi + \Lambda \right), \quad (9)$$

در کنش بالا  $G$  دترمینان متریک  $G_{\mu\nu}$  و  $n$  تعداد ابعاد فضایی را مشخص می کند و جمله ثابت کیهان شناسی به صورت  $\Lambda = \frac{25-n}{2\alpha'}$  داده می شود که برای ابعاد بحرانی  $(n=25)$  در نظریه ریسمان بوزونی این ثابت معادل صفر است. ما همچنین می بایست توجه داشته باشیم که کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی های پایین تبدیل به نوعی نظریه اسکالر-تانسوری (برنز-دیکی گونه) می شود. برای تفسیر جهان قابل مشاهده نیازمند جواب های کیهان شناسی هستیم. بدین ترتیب حالتی را مطالعه می کنیم که در آن ابعاد فضا-زمانی  $n+1=4$  باشد که در این حالت ریسمان ها بحرانی نیستند و  $\Lambda \neq 0$  است. همچنین در چهار بعد تانسور متریک را با  $g_{\mu\nu}$  و دترمینان آن را با  $g$  نمایش می دهیم. همان طور که در بالا توضیح داده شد معادلات حرکت مربوط به کنش (۹) با وردش کنش نسبت به تانسور متریک، میدان پادمقارن  $B_{\mu\nu}$  و میدان دیلتون به دست می آیند.

۱. Veilbeins

۲. Connections

۳. Weitzenbock

می‌دهد. بنابراین در صورت برقرار بودن معادلات حرکت (معادلات (۸)) که معادلاتی بر لاک<sup>۱</sup> حرکت هستند می‌توان دو نظریه را به صورت روابط (۱۹) و (۲۲) به همدیگر تصویر کرد. رابطه (۲۲) در بخش بعدی برای به دست آوردن لاگرانژی کانونیک تحت تبدیل همدیس متریک و همچنین دوگانگی ضریب مقیاس مفید خواهد بود.

#### ۴. دوگانگی ضریب مقیاس در کیهان‌شناسی $f(T)$

دوگانگی ضریب مقیاس برای مدل‌های بیان شده در بالا می‌تواند در کیهان‌شناسی مشخص شود. بنابراین یک جهان همگن و همسانگرد که از متریک تخت فریدمن-رابرتسون-واکر زیر تبعیت می‌کند

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (23)$$

را در نظر می‌گیریم، به طوری که در این متریک  $a(t)$  عامل ضریب مقیاس نامیده می‌شود. اسکالر پیچش مربوط به این متریک با استفاده از رابطه (۱۴) به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$T = -6 \frac{\dot{a}^2}{a^3}. \quad (24)$$

برای به دست آوردن معادلات کیهان‌شناسی مدل می‌توان از رویکرد لاگرانژی کانونیک  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, \dot{a}, T, \dot{T})$  همراه با فضای آرایش  $Q = \{a, T\}$  استفاده کرد، به طوری که توابع  $TQ = \{a, \dot{a}, T, \dot{T}\}$  وابسته به کلاف‌های مماسی تعریف شده روی  $\mathcal{L}$  هستند. به این ترتیب، کنش نقطه‌گونه<sup>۲</sup> متناظر با این لاگرانژی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathcal{I} = 4\pi \int dt \mathcal{L}(a, \dot{a}, T, \dot{T}), \quad (25)$$

که در آن  $a(t)$  و  $T$  متغیرهای مستقل از هم هستند. با در نظر گرفتن رابطه (۲۴) به عنوان یک قید و سپس با معرفی یک ضریب نامعین لاگرانژ  $\lambda$  می‌توان کنش بالا را به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{I} = 4\pi \int dt \left\{ a^3 f(T) - \lambda \left( T + 6 \frac{\dot{a}^2}{a^3} \right) \right\}. \quad (26)$$

با وردش از کنش بالا نسبت به  $T$  ضریب نامعین لاگرانژ  $\lambda$  به

$$S_{\rho}{}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\gamma} (K^{\mu\nu}{}_{\rho} + \delta^{\mu}{}_{\rho} T^{\alpha\nu}{}_{\alpha} - \delta^{\nu}{}_{\rho} T^{\alpha\mu}{}_{\alpha}). \quad (15)$$

کنش تعمیم‌یافته تله‌پارالل برای گرانش  $f(T)$  به صورت زیر معرفی می‌شود

$$I = \int d^4x |e| f(T), \quad (16)$$

در کنش بالا  $|e| = \det(e^A{}_{\mu}) = \sqrt{-g}$  و  $c = \hbar = 16\pi G = 1$  و همچنین ما می‌بایست توجه کنیم که در کنش بالا سهم کنش ماده کنار گذاشته شده است. با وردش از کنش بالا نسبت به دولنگه‌ای‌های  $e^A{}_{\mu}$  معادله حرکت به صورت زیر نتیجه گرفته می‌شود

$$\frac{1}{e} \partial_{\mu} (e S_A{}^{\mu\nu}) f_T - e_A{}^{\lambda} T^{\rho}{}_{\mu\lambda} S_{\rho}{}^{\nu\mu} f_T + S_A{}^{\mu\nu} \partial_{\mu} T f_{TT} + \frac{1}{\gamma} e_A{}^{\nu} f = 0, \quad (17)$$

به طوری که در این رابطه شاخص  $T$  مشتق نسبت به  $T$  را نمایش می‌دهد. همان طور که در مقدمه اشاره شد می‌توان با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین را به گرانش  $f(T)$  نگاهت داد که در این راستا ارتباطی بین میدان دیتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. بنابراین از طریق تبدیلات همدیس زیر لاگرانژی مؤثر ریسمان-دیتون می‌تواند به لاگرانژی گرانش  $f(T)$  مرتبط شود.

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (18)$$

$$\bar{e}^A{}_{\mu} = \Omega e^A{}_{\mu}, \quad \bar{e}_A{}^{\mu} = \Omega^{-1} e_A{}^{\mu}.$$

بنابراین دو کنش می‌توانند به صورت زیر به همدیگر تصویر شوند

$$\sqrt{-g} e^{-\gamma\varphi} (R + 4\nabla_{\mu}\varphi \nabla^{\mu}\varphi + \Lambda) = |\bar{e}| f(\bar{T}). \quad (19)$$

با استفاده از این واقعیت که  $|\bar{e}| = \Omega^4 |e|$  می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر نوشت

$$e^{-\gamma\varphi} (R + 4\nabla_{\mu}\varphi \nabla^{\mu}\varphi + \Lambda) = \Omega^4 f(\bar{T}). \quad (20)$$

با جایگذاری معادله (۱۰) در رابطه بالا خواهیم داشت

$$f(\bar{T}) = 2\Lambda \Omega^{-4} e^{-\gamma\varphi}. \quad (21)$$

در نهایت با انتخاب مناسب  $\Omega = e^{-\varphi}$  نتیجه‌گیری می‌شود که

$$f(\bar{T}) = 2\Lambda e^{\gamma\varphi}. \quad (22)$$

رابطه بالا نتیجه تصویر لاگرانژی مؤثر ریسمان-دیتون تحت تبدیل همدیس متریک به لاگرانژی گرانش  $f(T)$  را نمایش

۱. On-shell

۲. Point-like

صورت زیر نتیجه می شود

$$\lambda = a^{\gamma} f_T(T). \quad (27)$$

حال می توان با استفاده از رابطه بالا چگالی لاگرانژی را به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{L} = a^{\gamma} (f - Tf_T) - \epsilon f_T a \dot{a}^{\gamma}. \quad (28)$$

با استفاده از معادلات اوپلر- لاگرانژ زیر می توان معادلات حرکت مربوط به کمیت های  $a(t)$  و  $T$  را به دست آورد.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}. \quad (29)$$

علاوه بر معادلات فوق می توان از قید هامیلتونی  $\mathcal{H} = 0$  به صورت زیر نیز استفاده کرد.

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}} \dot{T} - \mathcal{L} = 0. \quad (30)$$

برای بررسی گرانش  $f(T)$  تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس می بایست از لاگرانژی نقطه گونه استفاده کرد، بنابراین لاگرانژی (۲۸) را دوباره بازنویسی می کنیم

$$\mathcal{L} = a^{\gamma} \left[ f - Tf_T - \epsilon f_T \left( \frac{\dot{a}^{\gamma}}{a^{\gamma}} \right) \right]. \quad (31)$$

با استفاده از معادله (۲۲) لاگرانژی بالا تحت تبدیل همدیس متریک به صورت زیر در می آید.

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = a^{\gamma} & \left[ \gamma \Lambda e^{\gamma \varphi} - \epsilon \Lambda \bar{T} e^{\gamma \varphi} \varphi'(\bar{T}) \right. \\ & \left. - \gamma \epsilon \Lambda e^{\gamma \varphi} \varphi'(\bar{T}) \left( \frac{\dot{a}^{\gamma}}{a^{\gamma}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

همچنین با استفاده از این واقعیت که  $a^{\gamma} = e^{\gamma \ln a}$  می توان معادله بالا را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = e^{\gamma(\varphi + \frac{\gamma}{\gamma} \ln a)} & \left( \gamma \Lambda - \epsilon \Lambda \bar{T} \varphi'(\bar{T}) \right. \\ & \left. - \gamma \epsilon \Lambda \varphi'(\bar{T}) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

با به کارگیری انتقال در میدان دیلتون مشابه با معادله (۷) داریم

$$\varphi \rightarrow \bar{\varphi} = \varphi + \frac{\gamma}{\gamma} \ln a. \quad (34)$$

در نهایت لاگرانژی نقطه گونه (۲۸) تحت تبدیل همدیس متریک و انتقال در میدان دیلتون به صورت زیر نوشته می شود

$$\bar{\mathcal{L}} = \gamma \Lambda e^{\gamma \bar{\varphi}} - \epsilon \Lambda \bar{T} e^{\gamma \bar{\varphi}} \bar{\varphi}'(\bar{T}) - \gamma \epsilon \Lambda e^{\gamma \bar{\varphi}} \bar{\varphi}'(\bar{T}) \left( \frac{\dot{a}^{\gamma}}{a^{\gamma}} \right). \quad (35)$$

با در نظر گرفتن نسخه تبدیل یافته (تحت دوگانگی) معادله (۲۲)

برای لاگرانژی بالا خواهیم داشت

$$\bar{\mathcal{L}} = (\bar{f}(\bar{T}) - \bar{f}_{\bar{T}} \bar{T}) - \epsilon \left( \frac{\dot{a}^{\gamma}}{a^{\gamma}} \right) \bar{f}_{\bar{T}}. \quad (36)$$

به سادگی می توان دید که لاگرانژی بالا تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس  $a(t) \rightarrow 1/a(t)$  ناوردا باقی می ماند. بنابراین از لحاظ دینامیکی با لاگرانژی (۳۱) معادل خواهد بود.

### ۵. شکل تابعی $f(T)$ تحت تبدیل $a(t) \rightarrow 1/a(t)$

برای تعیین شکل تابعی  $f(T)$  بر حسب  $T$  تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس از لاگرانژی دوگان یافته (۳۶) نسبت به  $\bar{T}$  و  $a(t)$  وردش می گیریم. به این ترتیب معادلات حرکت برای  $\bar{T}$  و  $a(t)$  به ترتیب به صورت زیر حاصل می گردند.

$$\bar{T} = -\epsilon \frac{\dot{a}^{\gamma}}{a^{\gamma}}, \quad (37)$$

و

$$(a\ddot{a} - \dot{a}^{\gamma}) \bar{f}_{\bar{T}} + a\dot{a} \bar{f}_{\bar{T}\bar{T}} = 0. \quad (38)$$

با جایگذاری معادله (۳۷) در معادله (۳۸) نتیجه گیری می شود که

$$\bar{f}_{\bar{T}} + \gamma \bar{T} \bar{f}_{\bar{T}\bar{T}} = 0. \quad (39)$$

علاوه بر معادله بالا قید هامیلتونی (۳۰) نیز معادله زیر را نتیجه می دهد

$$f(T) - \gamma T f_T = 0. \quad (40)$$

طبق معادلات (۲۴) و (۳۷) به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که  $T = \bar{T}$ . از طرفی تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس  $a(t) \rightarrow 1/a(t)$  معادله (۳۷) ناوردا باقی می ماند، به این معنی که  $\bar{T} = \bar{T}$ . چون  $\bar{f}(\bar{T})$  تنها تابعی از  $\bar{T}$  است بنابراین می توان معادله (۳۹) را به صورت زیر در نظر گرفت

$$f_T + \gamma T f_{TT} = 0. \quad (41)$$

حال با حل دو معادله (۴۰) و (۴۱) به طور همزمان شکل تابعی  $f(T)$  به صورت زیر مشخص می شود

$$f(T) = f_0 \sqrt{T}. \quad (42)$$

در اینجا  $f_0$  ثابت انتگرال گیری است.

## ۶. نتیجه گیری

ناوردا باقی می ماند، شکل دقیقی برای تابع  $f(T)$  به دست آورده شد. در مرجع [۱۲] با استفاده از لاگرانژی دوگان یافته تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس و همچنین با کمک از تقارن نوتر شکل دقیقی برای  $f(R)$  به دست آورده شده است، در حالی که در مقاله حاضر با استفاده از لاگرانژی دوگان یافته گرانش  $f(T)$  شکل دقیق تابعی  $f(T)$  بدون استفاده از تقارن نوتر به دست آمده که این نتیجه سازگاری کنش گرانش  $f(T)$  را با کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی های پایین می رساند. به نظر می آید که بتوان رهیافت دنبال شده در این مقاله را برای نظریه های تعمیم یافته گرانشی دیگری نظیر  $f(G)$ ،  $f(RT)$  و غیره مورد بررسی قرار داد.

در این مقاله با استفاده از تبدیل همدیس متریک کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی های پایین به گرانش  $f(T)$  تصویر شد به طوری که در این راستا ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار شد. سپس با در نظر گرفتن یک جهان همگن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش  $f(T)$  نشان داده شد که این لاگرانژی تحت تبدیلات همدیس متریک و دوگانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می ماند. علاوه بر این با استفاده از لاگرانژی دوگان یافته و با استفاده از این واقعیت که اسکالر پیچش تحت تبدیل همدیس متریک و همچنین تحت دوگانگی ضریب مقیاس  $a(t) \rightarrow 1/a(t)$

## مراجع

1. J M Drouffe and C Itzykson, "Quantum Field Theory and Statistical Mechanics", Cambridge University Press, 1990.
2. T H Buscher, *Phys. Lett. B* **194** (1987) 51; *Phys. Lett. B* **201** (1988) 466.
3. A Giveon, M Porrati and E Rabinovici, *Phys. Rep.* **244** (1994) 77.
4. A Giveon and M Rocek, *Nucl. Phys. B* **380** (1992) 128.
5. E Alvarez, L Alvarez-Gaume, and Y Lozano, *Phys. Lett. B* **336** (1994) 183.
6. M Rocek and E Verlinde, *Nucl. Phys. B* **373** (1992) 630.
7. S M Carroll, V Duvvuri, M Trodden, and M S Turner, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 043528.
8. S Nojiri and S D Odintsov, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 086005. S Nojiri and S D Odintsov, *J. Phys. Conf. Ser.* **66** (2007) 012005, hep-th/0611071; K Bamba, C Q Geng, S Nojiri, and S D Odintsov, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 083014; K Bamba and C Q Geng, *Prog. Theor. Phys.* **122** (2009) 1267.
9. P Wu and H W Yu, *Phys. Lett. B* **693** (2010) 415; G R Bengochea, *Phys. Lett. B* **695** (2011) 405; S Basilakos, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 083007; K Atazadeh and F Darabi, *Eur. Phys. J. C* **72** (2012)
- 2016; S Basilakos, S Capozziello, M De Laurentis, A Paliathanasis and M Tsamparlis, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 103526; A Paliathanasis, S Basilakos, E N Saridakis, S Capozziello, K Atazadeh, F Darabi and M Tsamparlis, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 104042; F Darabi, M Mousavi, and K Atazadeh, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 084023; K Atazadeh and, A Eghbali, *Phys. Scr.* **90** (2015) 045001; K Atazadeh, and M Mousavi, *Eur. Phys. J. C* **73** (2013) 2272; S Capozziello, P A Gonzalez, E N Saridakis and Y Vasquez, *Journal of High Energy Physics* **02** (2013) 039; G. Contopoulos, B Grammaticos and A Ramani, *J. Phys. A* **25** (1993) 5795; J Demaret and C Scheen, *J. Phys. A* **29** (1996) 59; S Cotsakis, J Demaret, Y De Rop, and L Querella, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 4595.
10. A Einstein, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* (1928) 217; *ibid* p. 224.
11. S Capozziello and R de Ritis, *Int. J. Mod. Phys. D* **2** (1993) 367; B J Broy, F G Pedro, and A Westphal, *Journal of High Energy Physics* **03** (2015) 029.
12. S Capozziello, S J G Gionti, and D Vernieri, "Journal of Cosmology and Astroparticle Physics", **01** (2016) 015.
13. M Wright, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 103002.