مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۸، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۷

تبدیلات دوگانگی آبلی استاندارد در گرانش $f(T)$

محمد عطازاده و علی اقبالی

گروه فیزیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز

پست الکترونیکی: atazadeh@azaruniv.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۱۰/۲۷ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۶/۰۵/۱۷)

چکیده

با توجه به مرتبهٔ اختلال، معادلات حرکت مربوط به کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین در واقع نوعی تعمیم معادلات انیشتین‌اند. بنابراین با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش $f(T)$ تصویر می‌شود، که ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. با در نظر گرفتن یک جهان همگن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش $f(T)$ نشان می‌دهیم که این لاگرانژی تحت تبدیلات همدیس متریک و دوگانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می‌ماند. در نهایت با استفاده از لاگرانژی دوگان یافته و همچنین ناوردایی اسکالر پیچش T تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس $a(t)\to 1/a(t)$ شکل دقیق $f(T)$ به دست آورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تبدیلات دوگانگی آبلی، کنش مؤثر ریسمان، گرانش $f(T)$

۱. مقدمه

در اواخر دههٔ هشتاد میلادی مطالعهٔ تقارن دوگانگی در فیزیک انرژی‌های بالا توجه اکثر فیزیک‌دانان نظری را به خود جلب کرده بود. تقارن دوگانگی در نظریهٔ ریسمان به صورت دوگانگی $R\leftrightarrow \alpha'/R$ در فشرده‌سازی چنبره‌ای[۱] برای اولین بار خود را نشان داد [۱]. بعدها درک این دوگانگی با مطالعهٔ دوگانگی در مدل‌های سیگمای دو بعدی بیشتر فهمیده شد [۲]. به این نوع دوگانگی، دوگانگی از نوع–T[۲] می‌گویند [۳]. تقارن دوگانگی–T در نظریهٔ ریسمان درک ما را از هندسهٔ فضا– زمان از دیدگاه نظریهٔ ریسمان عمیق‌تر می‌کند، چرا که تبدیل دوگان–T دو مدل سیگما با فضاهای هدفی را که کاملاً از لحاظ هندسی تفاوت دارند به هم ربط می‌دهد، به طوری که این دو مدل از نظر فیزیکی کاملاً معادل هستند. بوشر[۳] [۲] نشان داد که تقارن $O(d,d,z)$ می‌تواند خاصیت مربوط به تمام ریسمان‌های منتشر شده در فضا– زمان‌های خمیده نیز باشد، به شرطی که فضای پس‌زمینهٔ این ریسمان‌ها دارای تقارن ایزومتری آبلی باشد. بعدها این تقارن به حالتی که فضای پس‌زمینهٔ دارای گروه تقارن ایزومتری آبلی d– بعدی باشد تعمیم یافت و نشان داده شد که فضای مدولی $O(d,d,z)$ همان گروه تقارن مربوط به

۱. Torodial compactification

۲. Target

۳. Buscher

کنش مؤثر ریسمان است [۴]. دو مدل سیگما که توسط دوگانگی آبلی به هم مربوط می‌شوند کاملاً از لحاظ فیزیکی معادل‌اند، زیرا نشان داده شده است که در حالت کلاسیک این دو مدل تبدیل کانونیک یکدیگرند [۵]. از دیدگاه نظریهٔ سیگما برای داشتن دوگانگی آبلی استاندارد شرط وجود تقارن ایزومتری الزامی است [۲]. در حالت آبلی برای به دست آوردن مدل دوگان از روی مدل اصلی ابتدا تقارن ایزومتری را پیمانه‌ای می‌کنند، سپس شدت میدان مربوط به این میدان پیمانه‌ای A_α همراه با ضریب لاگرانژ را به کنش اضافه می‌کنند $(\tilde{\theta} F_{\mu\nu})$، به طوری که با کار در پیمانهٔ خالص اگر نسبت به ضریب لاگرانژ انتگرال گیری شود، با تثبیت پیمانهٔ خود مدل اصلی به دست می‌آید. اما اگر روی میدان‌های پیمانه‌ای A_α انتگرال‌گیری شود در آن صورت پس از تثبیت پیمانه کنش مدل دوگان به دست می‌آید [۶] به طوری که ضریب لاگرانژ نقش یک بعد هندسی فضای دوگان را بازی می‌کند.

مدل‌های گرانش تعمیم‌یافته[۱] به عنوان یکی از مدل‌های جایگزین ثابت کیهان‌شناسی برای توصیف انبساط شتاب‌دار کیهان پیشنهاد می‌شود [۷]. در این مدل‌ها فرض می‌شود که گرانش در مقیاس‌های کیهانی و چگالی‌های کم رفتار متفاوتی از گرانش اینشتینی دارد که یکی از این مدل‌های موفق گرانش $f(R)$ است [۸]. مدل‌های گرانشی تعمیم‌یافته از اهمیت به سزایی برخوردارند، زیرا مدل‌هایی از این نظریه می‌توانند دینامیک انبساط شتاب‌دار کیهان را توصیف کنند. بر خلاف این نظریه، گرانش اینشتینی در مقیاس‌های کیهانی خوب کار نمی‌کند.

نظریهٔ گرانش تعمیم‌یافته جدیدی به نام نظریهٔ $f(T)$ در سال‌های اخیر مطرح شده است [۹] که نسخهٔ تعمیم‌یافته گرانش تله‌پارالل[۲] است. در واقع گرانش تله‌پارالل برای متحد کردن نظریه‌های گرانش و الکترومغناطیس اولین بار توسط اینشتین پیشنهاد شده بود که در این رهیافت به جای انحنای فضا زمان، پیچش[۳] فضا زمان در نظر گرفته می‌شود [۱۰].

در تعدادی از مقالات نظیر [۱۱] نشان داده شده است که مدل‌های گرانشی $f(R)$ تحت تبدیلات دوگانگی ناوردا هستند که این می‌تواند برای ارتباط بین نظریه‌های گرانش تعمیم‌یافته و نظریهٔ ابرریسمان در حد انرژی‌های پایین مفید باشد. نتیجهٔ مهم رویکرد بالا تفسیر هندسی میدان دیلتون[۴] است که این میدان در نظریه ریسمان نقش مهمی را ایفاء می‌کند. اخیراً با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش $f(R)$ تصویر داده شده که ارتباطی بین میدان دیلتون و انحنای اسکالر ریچی[۵] برقرار می‌کند [۱۲]. در مرجع [۱۲] با استفاده از تبدیل همدیس متریک، دوگانگی ضریب مقیاس[۶] و همچنین با استفاده از تقارن نوتر جواب‌های دقیق کیهان‌شناسی در نظریهٔ $f(R)$ به دست آورده شده است. در این مقاله با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش $f(T)$ تصویر می‌شود که ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. سپس با در نظر گرفتن یک جهان همگن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش $f(R)$ نشان می‌دهیم که این لاگرانژی تحت تبدیلات همدیس متریک و دوگانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می‌ماند. در نهایت با استفاده از لاگرانژی دوگان یافته و همچنین با استفاده از ناوردایی اسکالر پیچش T تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس $a(t) \to 1/a(t)$ شکل دقیقی برای $f(T)$ به دست آورده می‌شود.

۲. تبدیلات دوگانگی آبلی متعارف

همان طور که در مقدمه اشاره شد در حالت آبلی برای به دست آوردن مدل دوگان از روی مدل اصلی ابتدا تقارن ایزومتری را پیمانه‌ای می‌کنند. در زیر روش به دست آوردن تبدیلات دوگانگی آبلی استاندارد که به تبدیلات بوشر [۲] مشهورند شرح داده می‌شود (برای مرور دقیق‌تر به مرجع [۳] مراجعه کنید). کنش توصیف کننده یک مدل سیگمای دو بعدی بر روی یک خمینهٔ d- بعدی $\mathcal{M}$ با مختصات‌های $\{X^A\}$،

۱. Modified gravity theories

۲. Teleparallel gravity

۳. Torsion

۴. Dilaton field

۵. Ricci

۶. Scale factor duality

$(A=۰,۱,...,d-۱)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۴\pi\alpha'}\int d\tau\, d\sigma\ \sqrt{-h}\Big(h^{\alpha\beta}G_{AB}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X^B+\varepsilon^{\alpha\beta}B_{AB}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X^B+\alpha' R^{(۲)}\varphi(x)\Big), \tag{۱}$$

به طوری که $\sigma^\alpha=(\tau,\sigma)$ مختصات جهان رویهٔ، $\varepsilon^{\alpha\beta}$ میدان تانسوری پادمتقارن روی جهان رویه، $h_{\alpha\beta}$ متریک ذاتی جهان رویه و h دترمینان آن است. G_{AB} و B_{AB} به ترتیب متریک و پتانسیل پیچش مربوط به فضای هدف $\mathcal{M}$ هستند. ضریب α' دارای بعد طول به توان دو است. $\varphi(x)$ میدان دیلتون جفت شده به انحنای اسکالر $R^{(۲)}$ از متریک جهان رویه $h_{\alpha\beta}$ است. حال اگر کنش (۱) دارای تقارن ایزومتری باشد، در آن صورت می‌توان با در نظر گرفتن مختصات مناسب، تقارن مزبور را به صورت انتقال در امتداد مختصهٔ مربوطه نشان داد، به طوری که متریک G_{AB}، میدان تانسوری پادمتقارن B_{AB} و میدان دیلتون $\varphi(x)$ مستقل از مختصهٔ مربوط به ایزومتری باشند. حال اگر مختصهٔ ایزومتری را با θ نمایش دهیم در آن صورت می‌توان با نوشتن مختصات‌های فضای هدف $\mathcal{M}$ به صورت $\{X^A\}=\{\theta,x^\mu\}$، $(\mu=۱,...,d-۱)$ کنش (۱) را به صورت زیر در نظر گرفت

$$\begin{aligned}S=\frac{۱}{۴\pi\alpha'}\int d\tau\, d\sigma\ \sqrt{-h}[h^{\alpha\beta}&(G_{۰۰}\partial_\alpha\theta\ \partial_\beta\theta+۲G_{۰\mu}\partial_\alpha\theta\ \partial_\beta x^\mu\\&+G_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu)+\varepsilon^{\alpha\beta}\\&(۲B_{۰\mu}\partial_\alpha\theta\ \partial_\beta x^\mu+B_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu)\\&+\alpha' R^{(۲)}\varphi(x)]\ ,\end{aligned}\tag{۲}$$

همان طور که در ابتدای این بخش توضیح داده شد برای به دست آوردن مدل سیگمای دوگان کافی است که تقارن ایزومتری را پیمانه‌ای کنیم و شدت میدان مربوط به میدان پیمانه‌ای A_α را همراه با ضریب لاگرانژ $\tilde\theta$ به کنش اضافه کنیم. در آن صورت کنش (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}S=\frac{۱}{۴\pi\alpha'}\int d\tau\, d\sigma\ \sqrt{-h}\{h^{\alpha\beta}&[G_{۰۰}(\partial_\alpha\theta+A_\alpha)(\partial_\beta\theta+A_\beta)\\&+۲G_{۰\mu}(\partial_\alpha\theta+A_\alpha)\,\partial_\beta x^\mu+G_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu]+\varepsilon^{\alpha\beta}\\&[۲B_{۰\mu}(\partial_\alpha\theta+A_\alpha)\partial_\beta x^\mu+B_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu]\\&+2\varepsilon^{\alpha\beta}\tilde\theta\ \partial_\alpha A_\beta+\alpha' R^{(۲)}\varphi(x)\}.\end{aligned}\tag{۳}$$

با انتگرال‌گیری روی میدان‌های پیمانه‌ای و سپس با تثبیت پیمانه به صورت $\theta=۰$ خواهیم داشت:

$$A_\alpha=-\frac{۱}{G_{۰۰}}\Big[G_{۰\mu}\partial_\alpha x^\mu+\varepsilon_\alpha{}^\beta(B_{۰\mu}\ \partial_\beta x^\mu+\partial_\beta\tilde\theta)\Big], \tag{۴}$$

با جایگذاری میدان‌های پیمانه‌ای A_α بالا در کنش (۳) و سپس با تثبیت پیمانهٔ مدل دوگان به شکل زیر نتیجه‌گیری می‌شود

$$\begin{aligned}\tilde S=\frac{۱}{۴\pi\alpha'}\int d\tau\, d\sigma\ \sqrt{-h}[h^{\alpha\beta}&(\tilde G_{۰۰}\partial_\alpha\tilde\theta\ \partial_\beta\tilde\theta+۲\tilde G_{۰\mu}\partial_\alpha\tilde\theta\ \partial_\beta x^\mu\\&+\tilde G_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu)+\varepsilon^{\alpha\beta}\\&(۲\tilde B_{۰\mu}\partial_\alpha\tilde\theta\ \partial_\beta x^\mu+\tilde B_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu)\\&+\alpha' R^{(۲)}\varphi(x)],\end{aligned}\tag{۵}$$

به طوری که

$$\begin{aligned}&\tilde G_{۰۰}=\frac{۱}{G_{۰۰}},\quad \tilde G_{۰\mu}=\frac{B_{۰\mu}}{G_{۰۰}},\\&\tilde G_{\mu\nu}=G_{\mu\nu}-\frac{G_{۰\mu}G_{۰\nu}-B_{۰\mu}B_{۰\nu}}{G_{۰۰}},\\&\tilde B_{۰\mu}=\frac{G_{۰\mu}}{G_{۰۰}},\\&\tilde B_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}-\frac{G_{۰\mu}B_{۰\nu}-G_{۰\nu}B_{۰\mu}}{G_{۰۰}}.\end{aligned}\tag{۶}$$

تبدیلات بالا نشان می‌دهند که دوگانگی، هندسه‌های مختلف را به هم مربوط می‌کنند. این تبدیلات دوگانگی به تبدیلات بوشر مشهورند [۲]. مدل دوگان که با کنش (۵) نمایش داده می‌شود، نیز دارای همان تقارن ایزومتری آبلی هست که در اینجا مختصهٔ ایزومتری همان ضریب لاگرانژ $\tilde\theta$ است. به علاوه اینجا فرض شده است که مختصه‌های خمینهٔ دوگان به صورت $\{\tilde X^A\}=\{\tilde\theta,x^\mu\}$ هستند. زمانی که روی میدان‌های پیمانه‌ای انتگرال گیری می‌شود تبدیل دوگانگی از ژاکوبی تبدیل، تصحیحات کوانتومی دریافت می‌کند به طوری که در حد یک حلقه این تصحیحات یک انتقال در میدان دیلتون به صورت زیر ایجاد می‌کنند [۲].

$$\tilde\varphi=\varphi-\frac{۱}{۲}\ln G_{۰۰}. \tag{۷}$$

به عبارت دیگر اگر مدل سیگمای اصلی (۱) شرایط ناوردایی همدیس تا حد یک حلقه را برآورده کند، سپس مدل دوگان (۵) نیز با شرط انتقال در میدان دیلتون به صورت (۷) شرایط ناوردایی همدیس تا مرتبهٔ یک حلقه را برآورده خواهد کرد.

شرط همدیس بودن ریسمان نوع فضاهایی که ریسمان در آن منتشر می‌شود را محدود می‌کند. در واقع این شرط الزام می‌کند که متریک فضای پس زمینهٔ G، میدان تانسوری پادمتقارن B و نیز میدان دیلتون φ در یک سری معادلات صدق کنند. این معادلات، در ارتباط با صفر شدن توابع بتای مربوط به کنش مدل سیگمای (۱) می‌باشند که به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\beta^{(G)}_{\mu\nu}: \ \mathrm{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{4}H_{\mu\rho\sigma}H^{\rho\sigma}{}_{\nu}+2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\varphi=0,\\
&\beta^{(B)}_{\mu\nu}: \ \nabla^{\lambda}\left(e^{-2\varphi}H_{\lambda\mu\nu}\right)=0,\\
&\beta^{(\varphi)}: \ -R+\frac{1}{12}H_{\mu\rho\sigma}H^{\mu\rho\sigma}+4\nabla_{\mu}\varphi\,\nabla^{\mu}\varphi\\
&\qquad -4\nabla^{2}\varphi-\Lambda=0,
\end{aligned} \tag{8}$$

در معادلات بالا $R=R_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ انحنای اسکالر مربوط به متریک $G_{\mu\nu}$ و $H_{\mu\nu\rho}$ پیچش مربوط به پتانسیل $B_{\mu\nu}$ می‌باشد که به صورت $H_{\mu\nu\rho}=\partial_{\mu}B_{\nu\rho}+\partial_{\nu}B_{\rho\mu}+\partial_{\rho}B_{\mu\nu}$ تعریف می‌شود. از طرف دیگر معادلات بالا معادلات حرکت مربوط به کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین است که این کنش در $n+1$- بعد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}=&\int d^{n+1}x\,\sqrt{-G}\,\mathrm{e}^{-2\varphi}\\
&\left(R-\frac{1}{12}H_{\mu\rho\sigma}H^{\mu\rho\sigma}+4\nabla_{\mu}\varphi\,\nabla^{\mu}\varphi+\Lambda\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

در کنش بالا G دترمینان متریک $G_{\mu\nu}$ و n تعداد ابعاد فضایی را مشخص می‌کند و جملهٔ ثابت کیهان‌شناسی به صورت $\Lambda=\frac{25-n}{3\alpha'}$ داده می‌شود که برای ابعاد بحرانی $(n=25)$ در نظریهٔ ریسمان بوزونی این ثابت معادل صفر است. ما همچنین می‌بایست توجه داشته باشیم که کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین تبدیل به نوعی نظریهٔ اسکالر- تانسوری (برنز- دیکی گونه) می‌شود. برای تفسیر جهان قابل مشاهده نیازمند جواب‌های کیهان‌شناسی هستیم. بدین ترتیب حالتی را مطالعه می‌کنیم که در آن ابعاد فضا- زمانی $n+1=4$ باشد که در این حالت ریسمان‌ها بحرانی نیستند و $\Lambda\neq 0$ است. همچنین در چهار بعد تانسور متریک را با $g_{\mu\nu}$ و دترمینان آن را با g نمایش می‌دهیم. همان طور که در بالا توضیح داده شد معادلات حرکت مربوط به کنش (۹) با وردش کنش نسبت به تانسور متریک، میدان پادمتقارن $B_{\mu\nu}$ و میدان دیلتون به دست می‌آیند.

در چهار بعد و در غیاب پیچش $H_{\mu\nu\rho}$، تنها اولین و سومین معادله از (۸) را خواهیم داشت. با ضرب $g^{\mu\nu}$ در اولین معادله از (۸) و سپس با استفاده از سومین معادله نتیجه‌گیری می‌شود که

$$\nabla_{\mu}\varphi\,\nabla^{\mu}\varphi=\tfrac{1}{4}(\Lambda-R). \tag{10}$$

این معادله در بخش بعدی مفید خواهد بود.

۳. گرانش $f(T)$ برای مدل ریسمان- دیلتون

برای بررسی گرانش تله‌پارالل از دولنگه‌ای‌ها[۱] در هر نقطه روی خمینه استفاده می‌شود $(e_A(x^{\mu}))$ که اندیس A از ۰ تا ۳ روی فضای مماسی از خمینه تغییر می‌کند. رابطهٔ بین دولنگه‌ها با متریک از معادلهٔ زیر پیروی می‌کند

$$g_{\mu\nu}=\eta_{AB}\,e^{\mathrm{A}}_{\mu}e^{\mathrm{B}}_{\nu}, \tag{11}$$

در رابطهٔ بالا $\nu,\ \mu$ اندیس‌های مختصات روی خمینه هستند که از ۰ تا ۳ تغییر می‌کنند و e_A^{μ} تشکیل میدان برداری مماس روی فضای مماسی می‌دهد به طوری که روی آن فضا متریک تخت η_{AB} تعریف می‌شود.

در نسبیت عام از هم وستارهای[۲] بدون پیچش لویی- چی- ویتا استفاده می‌شود در حالی که در گرانش تله‌پارالل از هم وستارهای بدون انحنای ویتزنباخ[۳] استفاده می‌شود. بنابراین پیچش $T^{\rho}{}_{\mu\nu}$ و هم پیچش $K^{\rho}{}_{\mu\nu}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۳]:

$$T^{\ \rho}_{\mu\nu}=e^{\rho}{}_{\mathrm{A}}(\partial_{\mu}e^{A}_{\nu}-\partial_{\nu}e^{A}_{\mu}), \tag{12}$$

$$K^{\rho}{}_{\mu\nu}=\tfrac{1}{2}(T_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}+T_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu}-T^{\rho}{}_{\mu\nu}). \tag{13}$$

برای نوشتن چگالی لاگرانژی در کنش نسبیت عام از انحنای ریچی R استفاده می‌شود در حالی که برای نوشتن چگالی لاگرانژی تله‌پارالل به جای انحنای اسکالر ریچی از اسکالر پیچش T استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T\equiv S_{\rho}{}^{\mu\nu}\,T^{\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{14}$$

به طوری که در این رابطه

---

۱. Veilbeins

۲. Connections

۳. Weitzenbock

$$S_\rho{}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(K^{\mu\nu}{}_\rho + \delta^\mu{}_\rho T^{\alpha\nu}{}_\alpha - \delta^\nu{}_\rho T^{\alpha\mu}{}_\alpha\right). \tag{۱۵}$$

کنش تعمیم‌یافتهٔ تله‌پارالل برای گرانش $f(T)$ به صورت زیر معرفی می‌شود

$$I = \int d^4x\, |e|\, f(T), \tag{۱۶}$$

در کنش بالا $|e| = \det(e^A{}_\mu) = \sqrt{-g}$ و $c = \hbar = 16\pi G = 1$. همچنین ما می‌بایست توجه کنیم که در کنش بالا سهم کنش ماده کنار گذاشته شده است. با وردش از کنش بالا نسبت به دولنگه‌ای‌های $e^A{}_\mu$ معادلهٔ حرکت به صورت زیر نتیجه گرفته می‌شود

$$\frac{1}{e}\partial_\mu(eS_A{}^{\mu\nu})\, f_T - e_A^\lambda\, T^\rho{}_{\mu\lambda}\, S_\rho{}^{\nu\mu} f_T + S_A{}^{\mu\nu}\, \partial_\mu T\, f_{TT} + \frac{1}{4} e_A^\nu f = 0, \tag{۱۷}$$

به طوری که در این رابطه شاخص T مشتق نسبت به T را نمایش می‌دهد. همان طور که در مقدمه اشاره شد می‌توان با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین را به گرانش $f(T)$ نگاشت داد که در این راستا ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. بنابراین از طریق تبدیلات همدیس زیر لاگرانژی مؤثر ریسمان- دیلتون می‌تواند به لاگرانژی گرانش $f(T)$ مرتبط شود.

$$g_{\mu\nu}(x) \to \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\, g_{\mu\nu}(x), \qquad \bar{e}^A{}_\mu = \Omega e^A{}_\mu\,, \quad \bar{e}_A{}^\mu = \Omega^{-1} e_A{}^\mu. \tag{۱۸}$$

بنابراین دو کنش می‌توانند به صورت زیر به همدیگر تصویر شوند

$$\sqrt{-g}\, e^{-2\varphi}(R + 4\nabla_\mu\varphi\, \nabla^\mu\varphi + \Lambda) = |\bar{e}|\, f(\bar{T}). \tag{۱۹}$$

با استفاده از این واقعیت که $|\bar{e}| = \Omega^4 |e|$ می‌توان رابطهٔ بالا را به صورت زیر نوشت

$$e^{-2\varphi}(R + 4\nabla_\mu\varphi\, \nabla^\mu\varphi + \Lambda) = \Omega^4 f(\bar{T}). \tag{۲۰}$$

با جایگذاری معادلهٔ (۱۰) در رابطهٔ بالا خواهیم داشت

$$f(\bar{T}) = 2\Lambda\Omega^{-4} e^{-2\varphi}. \tag{۲۱}$$

در نهایت با انتخاب مناسب $\Omega = e^{-\varphi}$ نتیجه‌گیری می‌شود که

$$f(\bar{T}) = 2\Lambda e^{2\varphi}. \tag{۲۲}$$

رابطهٔ بالا نتیجهٔ تصویر لاگرانژی مؤثر ریسمان- دیلتون تحت تبدیل همدیس متریک به لاگرانژی گرانش $f(T)$ را نمایش می‌دهد. بنابراین در صورت برقرار بودن معادلات حرکت (معادلات (۸)) که معادلاتی بر لاک[۱] حرکت هستند می‌توان دو نظریه را به صورت روابط (۱۹) و (۲۲) به همدیگر تصویر کرد. رابطهٔ (۲۲) در بخش بعدی برای به دست آوردن لاگرانژی کانونیک تحت تبدیل همدیس متریک و همچنین دوگانگی ضریب مقیاس مفید خواهد بود.

۴. دوگانگی ضریب مقیاس در کیهان‌شناسی $f(T)$

دوگانگی ضریب مقیاس برای مدل‌های بیان شده در بالا می‌تواند در کیهان‌شناسی مشخص شود. بنابراین یک جهان همگن و همسانگرد که از متریک تخت فریدمن- رابرتسون- واکر زیر تبعیت می‌کند

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{۲۳}$$

را در نظر می‌گیریم، به طوری که در این متریک $a(t)$ عامل ضریب مقیاس نامیده می‌شود. اسکالر پیچش مربوط به این متریک با استفاده از رابطهٔ (۱۴) به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$T = -6\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \tag{۲۴}$$

برای به دست آوردن معادلات کیهان‌شناسی مدل می‌توان از رویکرد لاگرانژی کانونیک $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(a, \dot{a}, T, \dot{T}\right)$ همراه با فضای آرایش $\mathcal{Q} = \{a, T\}$ استفاده کرد، به طوری که توابع وابسته به کلاف‌های مماسی $T\mathcal{Q} = \{a, \dot{a}, T, \dot{T}\}$ تعریف شده روی $\mathcal{L}$ هستند. به این ترتیب، کنش نقطه‌گونه[۲] متناظر با این لاگرانژی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathcal{I} = 4\pi \int dt\; \mathcal{L}\left(a, \dot{a}, T, \dot{T}\right), \tag{۲۵}$$

که در آن $a(t)$ و T متغیرهای مستقل از هم هستند. با در نظر گرفتن رابطهٔ (۲۴) به عنوان یک قید و سپس با معرفی یک ضریب نامعین لاگرانژ λ می‌توان کنش بالا را به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{I} = 4\pi \int dt\; \left\{a^3 f(T) - \lambda\left(T + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right\}. \tag{۲۶}$$

با وردش از کنش بالا نسبت به T ضریب نامعین لاگرانژ λ به

۱. On-shell

۲. Point-like

صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\lambda = a^{3} f_T(T). \qquad (27)$$

حال می‌توان با استفاده از رابطهٔ بالا چگالی لاگرانژی را به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{L} = a^{3}(f - Tf_T) - 6 f_T a \dot{a}^{2}. \qquad (28)$$

با استفاده از معادلات اویلر- لاگرانژ زیر می‌توان معادلات حرکت مربوط به کمیت‌های $a(t)$ و T را به دست آورد.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}. \qquad (29)$$

علاوه بر معادلات فوق می‌توان از قید هامیلتونی $\mathcal{H}=0$ به صورت زیر نیز استفاده کرد.

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}}\dot{T} - \mathcal{L} = 0. \qquad (30)$$

برای بررسی گرانش $f(T)$ تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس می‌بایست از لاگرانژی نقطه‌گونه استفاده کرد، بنابراین لاگرانژی (۲۸) را دوباره بازنویسی می‌کنیم

$$\mathcal{L} = a^{3}\left[f - Tf_T - 6 f_T \left(\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}\right)\right]. \qquad (31)$$

با استفاده از معادلهٔ (۲۲) لاگرانژی بالا تحت تبدیل همدیس متریک به صورت زیر در می‌آید.

$$\bar{\mathcal{L}} = a^{3}\left[2\Lambda e^{2\varphi} - 4\Lambda \bar{T} e^{2\varphi}\varphi'(\bar{T}) - 24\Lambda e^{2\varphi}\varphi'(\bar{T})\left(\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}\right)\right]. \qquad (32)$$

همچنین با استفاده از این واقعیت که $a^{3} = e^{3\ln a}$ می‌توان معادلهٔ بالا را به صورت زیر نوشت

$$\bar{\mathcal{L}} = e^{2(\varphi + \frac{3}{2}\ln a)}\left(2\Lambda - 4\Lambda \bar{T}\varphi'(\bar{T}) - 24\Lambda \varphi'(\bar{T})\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2}\right). \qquad (33)$$

با به کارگیری انتقال در میدان دیلتون مشابه با معادلهٔ (۷) داریم

$$\varphi \to \tilde{\varphi} = \varphi + \tfrac{3}{2}\ln a. \qquad (34)$$

در نهایت لاگرانژی نقطه‌گونهٔ (۲۸) تحت تبدیل همدیس متریک و انتقال در میدان دیلتون به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\tilde{\bar{\mathcal{L}}} = 2\Lambda e^{2\tilde{\varphi}} - 4\Lambda \bar{T} e^{2\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}'(\bar{T}) - 24\Lambda e^{2\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}'(\bar{T})\left(\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}\right). \qquad (35)$$

با در نظرگرفتن نسخهٔ تبدیل‌یافته (تحت دوگانگی) معادلهٔ (۲۲) برای لاگرانژی بالا خواهیم داشت

$$\tilde{\bar{\mathcal{L}}} = (\tilde{f}(\bar{T}) - \tilde{f}_{\bar{T}}\bar{T}) - 6\left(\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}\right)\tilde{f}_{\bar{T}}. \qquad (36)$$

به سادگی می‌توان دید که لاگرانژی بالا تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس $a(t) \to 1/a(t)$ ناوردا باقی می‌ماند. بنابراین از لحاظ دینامیکی با لاگرانژی (۳۱) معادل خواهد بود.

۵. شکل تابعی $f(T)$ تحت تبدیل $a(t) \to 1/a(t)$

برای تعیین شکل تابعی $f(T)$ بر حسب T تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس از لاگرانژی دوگان‌یافتهٔ (۳۶) نسبت به $\bar{T}$ و $a(t)$ وردش می‌گیریم. به این ترتیب معادلات حرکت برای $\bar{T}$ و $a(t)$ به ترتیب به صورت زیر حاصل می‌گردند.

$$\bar{T} = -6\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}, \qquad (37)$$

و

$$(a\ddot{a} - \dot{a}^{2})\tilde{f}_{\bar{T}} + a\dot{a}\dot{\bar{T}}\tilde{f}_{\bar{T}\bar{T}} = 0. \qquad (38)$$

با جایگذاری معادلهٔ (۳۷) در معادلهٔ (۳۸) نتیجه‌گیری می‌شود که

$$\tilde{f}_{\bar{T}} + 2\bar{T}\tilde{f}_{\bar{T}\bar{T}} = 0. \qquad (39)$$

علاوه بر معادلهٔ بالا قید هامیلتونی (۳۰) نیز معادلهٔ زیر را نتیجه می‌دهد

$$f(T) - 2T f_T = 0. \qquad (40)$$

طبق معادلات (۲۴) و (۳۷) به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که $T = \bar{T}$. از طرفی تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس $a(t) \to 1/a(t)$ معادله (۳۷) ناوردا باقی می‌ماند، به این معنی که $\bar{T} = \tilde{T}$. چون $\tilde{f}(\tilde{T})$ تنها تابعی از $\tilde{T}$ است بنابراین می‌توان معادلهٔ (۳۹) را به صورت زیر در نظر گرفت

$$f_T + 2T f_{TT} = 0. \qquad (41)$$

حال با حل دو معادلهٔ (۴۰) و (۴۱) به طور همزمان شکل تابعی $f(T)$ به صورت زیر مشخص می‌شود

$$f(T) = f_0\sqrt{T}. \qquad (42)$$

در اینجا f_0 ثابت انتگرال گیری است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تبدیل همـدیس متریـک کـنش مـؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش $f(T)$ تصویر شد بـه طوری که در این راستا ارتبـاطی بـین میـدان دیلتـون و اسـکالر پیچش برقرار شد. سپس با در نظر گرفتن یک جهـان همگـن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش $f(T)$ نشان داده شـد که این لاگرانژی تحت تبدیلات همـدیس متریـک و دوگـانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می‌مانـد. عـلاوه بـر این با اسـتفاده از لاگرانـژی دوگـان‌یافتـه و بـا اسـتفاده از ایـن واقعیت که اسـکالر پـیچش تحـت تبـدیل همـدیس متریـک و همچنین تحـت دوگـانگی ضـریب مقیـاس $a(t) \to 1/a(t)$ ناوردا باقی می‌ماند، شکل دقیقی برای تابع $f(T)$ به دست آورده شد. در مرجع [۱۲] با استفاده از لاگرانـژی دوگـان‌یافتـه تحـت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس و همچنـین بـا کمـک از تقـارن نوتر شکل دقیقی بـرای $f(R)$ بـه دسـت آورده شـده اسـت، در حالی که در مقالهٔ حاضر با اسـتفاده از لاگرانـژی دوگـان یافتـه گرانش $f(T)$ شکل دقیق تـابعی $f(T)$ بـدون اسـتفاده از تقـارن نوتر به دست آمده که این نتیجهٔ سازگاری کـنش گـرانش $f(T)$ را با کنش مؤثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین می‌رسـاند. بـه نظر می‌آید که بتوان رهیافت دنبال شده در ایـن مقالـه را بـرای نظریه‌های تعمیم‌یافتـه گرانشـی دیگـری نظیـر $f(G)$، $f(R,T)$ و غیره مورد بررسی قرار داد.

مراجع

1. J M Drouffe and C Itzykson, “*Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*”, Cambridge University Press, 1990.
2. T H Buscher, *Phys. Lett.* B **194** (1987) 51; *Phys. Lett.* B **201** (1988) 466.
3. A Giveon, M Porrati and E Rabinovici, *Phys. Rep*. **244** (1994) 77.
4. A Giveon and M Rocek, *Nucl. Phys*. B **380** (1992) 128.
5. E Alvarez, L Alvarez-Gaume, and Y Lozano, *Phys. Lett*. B **336** (1994) 183.
6. M Rocek and E Verlinde, *Nucl. Phys*. B **373** (1992) 630.
7. S M Carroll, V Duvvuri, M Trodden, and M S Turner, *Phys. Rev*. D **70** (2004) 043528.
8. S Nojiri and S D Odintsov, *Phys. Rev*. D **74** (2006) 086005. S Nojiri and S D Odintsov, *J. Phys. Conf. Ser*. **66** (2007) 012005 ,hep-th/0611071; K Bamba, C Q Geng, S Nojiri, and S D Odintsov, *Phys. Rev.* D **79** (2009) 083014; K Bamba and C Q Geng, *Prog. Theor. Phys*. **122** (2009) 1267.
9. P Wu and H W Yu, *Phys. Lett*. B **693** (2010) 415; G R Bengochea, *Phys. Lett*. B **695** (2011) 405; S Basilakos, *Phys. Rev*. D **93** (2016) 083007; K Atazadeh and F Darabi, *Eur. Phys. J.* C **72** (2012) 2016; S Basilakos, S Capozziello, M De Laurentis, A Paliathanasis and M Tsamparlis, *Phys. Rev*. D **88** (2013) 103526; A Paliathanasis, S Basilakos, E N Saridakis, S Capozziello, K Atazadeh, F Darabi and M Tsamparlis, *Phys. Rev*. D **89** (2014) 104042; F Darabi, M Mousavi, and K Atazadeh, *Phys. Rev*. D **91** (2015) 084023; K Atazadeh and, A Eghbali, *Phys. Scr*. **90** (2015) 045001; K Atazadeh, and M Mousavi, *Eur. Phys. J.* C **73** (2013) 2272; S Capozziello, P A Gonzalez, E N Saridakis and Y Vasquez, *Journal of High Energy Physics* **02** (2013) 039; G. Contopoulos, B Grammaticos and A Ramani, *J. Phys.* A **25** (1993) 5795; J Demaret and C Scheen, *J. Phys*. A **29** (1996) 59; S Cotsakis, J Demaret, Y De Rop, and L Querella, *Phys. Rev.* D **48** (1993) 4595.
10. A Einstein, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss*. (1928) 217; ibid p. 224.
11. S Capozziello and R de Ritis, *Int. J. Mod. Phys*. D **2** (1993) 367; B J Broy, F G Pedro, and A Westphal, *Journal of High Energy Physicsics* **03** (2015) 029.
12. S Capozziello, S J G Gionti, and D Vernieri, “*Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*”, **01** (2016) 015.
13. M Wright, *Phys. Rev*. D **93** (2016) 103002.