مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۸، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۷

ابهام در تابع ساختار دستگاه‌های چندفرمیونی در تکانه‌های انتقالی خیلی کوچک

یحیی یونسی‌زاده

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه آزاد تهران جنوب

گروه علوم پایه، بخش فیزیک، دانشکدهٔ شهید بهشتی، دانشگاه فرهنگیان، پردیس چمران، تهران

پست الکترونیکی: younesizadeh@cfu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۳/۰۱ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۶/۰۶/۱۷)

چکیده

ابتدا تابع ساختار دستگاه‌های چند فرمیونی را بر حسب نوسانات چگالی ذرات هدف می‌نویسیم و مقدار این تابع را در تکانهٔ انتقالی صفر به دست می‌آوریم. آنگاه نشان داده می‌شود که مقدار این تابع در تکانهٔ انتقالی صفر از دو راه مختلف که یکی راه ریاضی مستقیم و دیگری قوانین جمع مایعات کوانتونی هستند، برابر نیستند و این یک پارادوکس برای دستگاه‌های چند فرمیونی است. ما در نهایت برای برطرف کردن این پارادوکس، تابع پاسخ و در نتیجه تابع ساختار دستگاه‌های چند فرمیونی را تصحیح می‌کنیم و تعریف جدیدی را برای این توابع ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: دستگاه‌های چند فرمیونی، تابع پاسخ، تابع ساختار، تکانه‌های انتقالی، انرژی انتقالی، چگالی ذرات

۱. مقدمه

هدف این مقاله این است که نشان دهیم مقدار تابع ساختار دستگاه‌های چند فرمیونی در تکانه انتقالی صفر دارای ابهام است. همان طور که می‌دانیم یک دستگاه فیزیکی در مقابل ذراتی که به سمت آن پرتاب می‌شود، پاسخ نشان خواهد داد. تابع پاسخ یک دستگاه وابسته به کمیت‌هایی مانند تکانه و انرژی انتقالی است که ذرهٔ کاوشگر به دستگاه می‌دهد. اگر این کمیت‌ها تغییر کنند، تابع پاسخ نیز تغییر خواهد کرد. در شرایط حدی از این دو کمیت، رفتار دستگاه‌های چند فرمیونی جالب است [۱ و ۲]. اگر ما سهم همه انرژی‌های انتقالی را در نظر بگیریم یا از تابع پاسخ روی انرژی انتقالی انتگرال بگیریم، تابع جدیدی به دست می‌آید که تابع ساختار دستگاه نام دارد و تنها وابسته به تکانهٔ انتقالی است [۳]. در این مقاله رفتار این تابع را در تکانهٔ انتقالی نزدیک صفر بررسی می‌کنیم. ابتدا به یک رفتار دوگانه برای تابع ساختار در تکانه‌های خیلی کوچک خواهیم رسید و بعد سعی در

برطرف کردن آن خواهیم داشت. در حال حاضر ابهام در تابع ساختار دستگاه‌های چند فرمیونی یکی از مسائل مهم در فیزیک هسته‌ای است [۴].

۲. نظریه

ما ابتدا تابع پاسخ یک دستگاه چند فرمیونی را می‌نویسیم:

$$S(q,\omega)=\frac{1}{N}\int\frac{dt}{2\pi}e^{i\omega t}\left\langle 0\left|\rho_q^{\dagger}(t)\rho_q(0)\right|0\right\rangle , \qquad (۱)$$

با انتگرال گیری روی تابع بالا نسبت به ω، تابع ساختار دستگاه به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$S(q)=\int d\omega S(q,\omega)= \frac{1}{N}\int_0^{\infty}\frac{dt}{2\pi}\int d\omega e^{i\omega t}\left\langle 0\left|\rho_q^{\dagger}(t)\rho_q(0)\right|0\right\rangle \qquad (۲)$$

بنابراین و خواهیم داشت:

$$S(q)=\frac{1}{N}\int_0^{\infty}\frac{dt}{2\pi}\delta(t)\left\langle 0\left|\rho_q^{\dagger}(t)\rho_q(0)\right|0\right\rangle = \frac{1}{N}\left\langle 0\left|\rho_q^{\dagger}(0)\rho_q(0)\right|0\right\rangle \qquad (۳)$$

عاقبت $S(q)$ به صورت زیر است:

$$S(q)=\frac{1}{N}\left\langle 0\left|\rho_q^{\dagger}\rho_q\right|0\right\rangle , \qquad (۴)$$

حال اگر ما به رابطه بالا توجه کنیم، متوجه می‌شویم که تابع ساختار در تکانهٔ انتقالی صفر بی معنی نیست، زیرا در معادلهٔ بالا، دستگاه در حالت پایه بعد از چندین فرایند، دوباره به حالت پایه برمی‌گردد. یعنی میخواهیم با اعمال عملگر $\rho_q^{\dagger}\rho_q$ روی حالت پایه، حساب کنیم که دستگاه دوباره با چه احتمالی به این حالت برمی‌گردد. در این راه $q=0$ می‌تواند یک حالت محتمل باشد چون در این تکانه، دستگاه پاسخی نخواهد داشت. پس ابتدا از روش مستقیم تابع $S(q)$ را در تکانهٔ انتقالی صفر به دست می‌آوریم:

$$S(0)=\frac{1}{N}\left\langle 0\left|\rho_0^{\dagger}\rho_0\right|0\right\rangle , \qquad (۵)$$

حال با توجه به رابطهٔ $\rho_q=\sum_{i=1}^{N}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}$ [۲] می‌توان نوشت: $\rho_0=N,\rho_0^{\dagger}=N$. پس از معادلهٔ (۵) داریم:

$$S(0)=\frac{1}{N}\langle 0|N.N|0\rangle=\frac{N^2}{N}\langle 0|0\rangle= N , \qquad (۶)$$

پس عاقبت داریم:

$$S(0)=N , \qquad (۷)$$

حالا می‌خواهیم در این مرحله مقدار تابع پاسخ در تکانهٔ انتقالی صفر را از روش قانون جمع مایعات کوانتومی به دست آوریم [۵]. از معادلهٔ زیر شروع می‌کنیم:

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{1}{2N}\left\langle 0\left|[\rho_k^{\dagger},[H,\rho_q]]\right|0\right\rangle , \qquad (۸)$$

که H و m به ترتیب هامیلتونی دستگاه هدف و جرم ذرات سازندهٔ هدف هستند. می‌توان معادلهٔ بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{1}{N}\sum_n(E_n-E_0)\left|\langle 0|\rho_k|n\rangle\right|^2 , \qquad (۹)$$

که بر حسب $S(q,\omega)$، معادلهٔ بالا نوشته می‌شود به صورت:

$$\frac{\hbar^2q^2}{2m}=\int_0^{\infty}\omega S(q,\omega)d\omega , \qquad (۱۰)$$

در مایعات کوانتومی، معادلهٔ دیگری به صورت زیر داریم [۴]:

$$\frac{1}{2mc^2}=\lim_{q\to 0}\int_0^{\infty}d\omega\frac{S(q,\omega)}{\omega} , \qquad (۱۱)$$

که c و m به ترتیب سرعت اولین صدا و جرم ذرات سازندهٔ هدف هستند. روابط (۱۰) و (۱۱) یک محدودیت را بر رفتار تابع $S(q)$ در نزدیکی تکانهٔ صفر تحمیل می‌کنند. روابط (۱۰) و (۱۱) در q نزدیک صفر تولید می‌کنند:

$$\left(\frac{\hbar q}{2mc}\right)^2=\lim_{q\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}d\omega d\omega'\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}\right)S(q,\omega')S(q,\omega)=\lim_{q\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}d\omega d\omega'\left(1+\frac{(\omega-\omega')^2}{2\omega'\omega}\right)S(q,\omega')S(q,\omega) \qquad (۱۲)$$

از معادلهٔ بالا نتیجه فوری زیر را خواهیم داشت:

$$\lim_{q\to 0}\frac{S(q)}{q}\le\frac{\hbar}{2mc} , \qquad (۱۳)$$

یعنی در قوانین جمع مایعات کوانتومی، نسبت $\frac{S(q)}{q}$ معادل با یک مقدار ثابت کوچک است. بنابراین در مایعات کوانتومی در تکانهٔ انتقالی صفر، تابع $S(q)$ باید صفر باشد تا این نسبت مبهم شود و ما بتوانیم این ابهام را برطرف کنیم تا نسبت فوق به سمت یک مقدار ثابت محدود میل کند. پس در مایعات کوانتومی داریم:

$$S(\circ)=\circ\,, \qquad (۱۴)$$

۳. نتیجه‌گیری و بحث

حال اگر ما معادلات (۷) و (۱۴) را با هم مقایسه کنیم، یقیناً به یک پارادوکس خواهیم رسید زیرا از دو راه مختلف، دو نتیجهٔ مختلف را به دست آورده ایم. از این رو ما باید این پارادوکس را بررسی کنیم و سعی کنیم آن را برطرف کنیم. یکی از نقطه نظرات بررسی، مقدار بیشینه و کمینهٔ تابع ساختار دستگاه چندفرمیونی است. در مایعات کوانتومی در تکانهٔ انتقالی صفر، مقدار تابع ساختار برابر صفر است و مقدار آن در تکانهٔ انتقالی بی نهایت برابر یک است [۴]. حال می‌خواهیم مقدار بیشینه و کمینهٔ این تابع را از رابطهٔ (۴) به دست آوریم. با قرار دادن مقدار ρ_q از رابطهٔ $\rho_q=\sum_{i=1}^{N}e^{i\mathbf{q}.\mathbf{r}_i}$، تابع $\rho_q^{\dagger}\rho_q$ از صفر تا N^2 تغییر می‌کند. با قرار دادن این مقادیر در رابطهٔ (۴)، تابع ساختار از صفر تا N تغییر خواهد کرد. یعنی مقدار بیشینهٔ تابع ساختار برابر N است که برابر مقدار بیشینهٔ به دست آمده در مرجع [۴] یعنی مقدار یک، نیست. این موضوع همان پارادوکسی است که در این مقاله به دست آمده است. در این مرحله دو احتمال وجود دارد: یا یکی از جواب‌ها اشتباه است یا در تکانهٔ انتقالی صفر تابع ساختار دارای ناپیوستگی است. ما اولین احتمال را که شاید پارادوکس ایجاد شده به دلیل تعریف ناقص تابع پاسخ ایجاد شده باشد، را بررسی می‌کنیم.

معادلهٔ (۷) برای تابع ساختاردستگاه‌های چند فرمیونی در تکانهٔ انتقالی صحیح نیست زیرا اگر تعداد ذرات دستگاه خیلی زیاد باشد، آنگاه این مقدار به بی‌نهایت می‌رود و این بی‌معنی است. بنابراین این رابطه باید تصحیح شود. برای این که این دو جواب یکسان باشند و ابهام برطرف شود، باید از دو راه مختلف برای $S(\circ)$ جواب صفر به دست آوریم. بنابراین ما پیشنهاد می‌دهیم که تابع پاسخ دستگاه به صورت زیر نوشته شود تا این مشکل برطرف گردد:

$$S(q,\omega)=\frac{1}{N}\int\frac{dt}{2\pi}e^{i\omega t}\left\langle\circ\left|[\rho_q^{\dagger}(t),\rho_q(\circ)]\right|\circ\right\rangle, \qquad (۱۵)$$

این پیشنهاد از کم کردن مقدار $<\circ\left|\rho_q(\circ)\rho_q^{\dagger}(t)\right|\circ>$ از تابع پاسخ رابطهٔ (۲) برای صفر کردن مقدار N در رابطهٔ (۷) داده شده است. در این حالت تابع ساختار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S(q)=\frac{1}{N}\left\langle\circ\left|[\rho_q^{\dagger},\rho_q]\right|\circ\right\rangle, \qquad (۱۶)$$

که در این حالت از روش مستقیم، $S(\circ)$ برابر صفر می‌شود و ابهام برطرف می‌شود. از این رو ما دو رفتار مختلف را برای تابع ساختار دستگاه‌های چند فرمیونی در تکانهٔ انتقالی صفر به دست آوردیم. برای رفع این ابهام تابع پاسخ دستگاه چند فرمیونی را اصلاح کردیم و ابهام را برطرف کردیم. بنابراین ما به یک تعریف جدید و کامل از تابع پاسخ برای دستگاه‌های چند فرمیونی رسیدیم که با تجربه همخوانی دارد.

تقدیر و تشکر

در نهایت جا دارد که از استاد گرانقدرم آقای دکتر مجید مدرس کمال تشکر را داشته باشم که همیشه مرا راهنمایی کردند.

مراجع

1. O Benhar, A Fabrocini, and S Fantoni, *Phys. Rev. Lett*. **87** (2001) 052501.
2. M Modarres and Y Younesizadeh, *Nucl. Phys*. A **789** (2007) 82.
3. J J Sakurai, "*Modern Quantum Mechanics*", Addison-Wesley, chap. 7 (1994).
4. M Modarres and Y Younesizadeh, *Int. J. Theor. Phys*. **49** (2010) 413.
5. E Feenberg, "*Theory of Quantum Fluids*", Academic Press, New York (1969).