

رد تانسور انرژی-تکانه و پس‌زنی گرانشی اسکالره‌ای شوینگر در فضازمان دوسیتته سه‌بعدی

احسان باورساد و محبوبه مرتضی‌زاده

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان

پست الکترونیکی: bavarsad@kashanu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۱۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۰۷/۲۹)

چکیده

در این مقاله، یک میدان اسکالر جرم‌دار و باردار جفت‌شده به یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضازمان دوسیتته^۱ سه‌بعدی را در نظر می‌گیریم. ما مقدار ثابت جفت‌شدگی بی بعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضازمان دوسیتته سه‌بعدی را برابر با $\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم. چشم‌داشتی رد تانسور انرژی-تکانه را در حالت خلاء ورودی حساب می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با استفاده از روش بهسازی^۲ کم کردن بی‌دررو^۳ و اگرایی فرابنفش خطی حذف می‌شود و عبارتی متناهی به دست می‌آید. رفتار رد بهسازی شده را در قلمروهای حدی گوناگون جرم میدان اسکالر و میدان الکتریکی مطالعه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که رد به عنوان تابعی از میدان الکتریکی دارای یک ناپیوستگی است که در آن تغییر علامت می‌دهد. برای مورد جفت‌شدگی همدیس^۴ میدان اسکالر به فضازمان دوسیتته، نشان می‌دهیم که رد صفر می‌شود و ناهنجاری^۵ رد وجود ندارد. درباره اثر پس‌زنی گرانشی زوج‌های شوینگر^۶ خلق شده بحث می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضازمان دوسیتته، میدان اسکالر، اثر شوینگر، رد تانسور انرژی-تکانه، بهسازی کم کردن بی‌دررو

۱. مقدمه

الکترومغناطیسی زمینه قوی، اثر شوینگر می‌گویند که یک پدیده غیر اختلالی در نظریه میدان‌های کوانتومی است. مطالعه این پدیده با کارهای پیشگام [۱-۳] آغاز شد؛ برای مرور [۴] را ببینید. هرچند که مطالعه این پدیده برای شناخت بهتر رفتار میدان‌های کوانتومی در حد جفت‌شدگی قوی مفید است اما با وجود تلاش‌های فراوان هنوز در آزمایشگاه‌های زمینی دیده نشده است. دلیل اصلی، این است که آهنگ تولید زوج در میدان‌های

در فضازمان تخت به پدیده تولید زوج از خلاء در یک میدان

۱. de Sitter
۲. Regularization
۳. Adiabatic subtraction
۴. Conformal
۵. Anomaly
۶. Schwinger

الکتریکی ضعیف‌تر از یک مقدار بحرانی $E_{\text{critical}} \approx 1/3 \times 10^{18} \text{ V/m}$ به طور نمایی کاهش می‌یابد [۵]. به همین دلیل در سال‌های اخیر مطالعه این پدیده در سامانه‌های اخت‌فیزیکی و کیهان‌شناسی که در آنها میدان‌های گرانشی و الکترومغناطیسی قوی به طور طبیعی وجود دارد، مورد توجه قرار گرفته است. بدون نیاز به در نظر گرفتن یک میدان الکتریکی زمینه، حالت خلاء میدان‌های مادی^۱ در فضا‌زمان دوسیت، به دلیل وجود افق کیهان‌شناسی، ناپایدار است و از راه تابش واپاشی می‌کند [۶] که به آن تابش گیونز-هاوکنینگ^۲ گفته می‌شود. مطالعه هر دو اثر با هم، یعنی مطالعه اثر شوینگر در فضا‌زمان دوسیت، با کار پیشگام [۷] آغاز شد، که چگالی تعداد زوج‌های خلق شده در آن به دست آمد. در فضا‌زمان‌های خمیده به طور کلی و دوسیت به طور خاص، مفهوم ذره خوش تعریف نیست مگر اینکه شرایط شبه‌کلاسیک در نظر گرفته شود. شرایط شبه‌کلاسیک برای یک میدان اسکالر به جرم m و بار الکتریکی e که به یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه E در یک فضا‌زمان دوسیت با ثابت هابل H ، جفت شده است به صورت

$$\frac{m^2}{H^2} + \frac{(eE)^2}{H^2} \gg 1, \quad (1)$$

بیان می‌شود. در کار [۸] نشان داده شده است که چون جریان الکتریکی را می‌توان بدون در نظر گرفتن شرایط شبه‌کلاسیک برای تعریف حالت‌های ذره‌ای، به دست آورد بنابراین کمیت مناسبی برای مطالعه اثر شوینگر در فضا‌زمان دوسیت است. در کارهای [۸-۱۰] اثر شوینگر و جریان رسانندگی الکتریکی میدان اسکالر در فضا‌زمان‌های دوسیت به ترتیب دو، سه و چهاربعدی مطالعه شده‌اند. در کارهای [۱۱ و ۱۲] اثر شوینگر و جریان رسانندگی الکتریکی میدان دیراک در فضا‌زمان‌های دوسیت به ترتیب دو و چهاربعدی مطالعه شده‌اند. برای مورد میدان اسکالر نشان داده شده است [۸-۱۰] که در قلمرو فروسرخ، با کاهش میدان الکتریکی، جریان افزایش پیدا می‌کند که به آن پدیده فرارسانندگی فروسرخ^۳ گفته شده است و اولین

بار در کار [۸] گزارش شد. برای مورد میدان دیراک فرارسانندگی فروسرخ گزارش نشده است اما در فضا‌زمان دوسیت چهاربعدی، نویسندگان [۱۲] یافته‌اند که جریان رسانندگی الکتریکی به عنوان تابعی از میدان الکتریکی تغییر علامت می‌دهد. مشاهده این پدیده‌ها، انگیزه می‌دهد که افزون بر جریان الکتریکی، کمیت‌های دیگری را نیز در فضا‌زمان دوسیت مطالعه کنیم، برای نمونه تانسور انرژی-تکانه. جریان الکتریکی برای مطالعه اثر پس‌زنی الکترومغناطیسی و تانسور انرژی-تکانه برای مطالعه اثر پس‌زنی گرانشی زوج‌های شوینگر خلق شده، نیاز هستند. در مرجع [۱۰] تولید میدان مغناطیسی برآمده از پس‌زنی اسکالره‌ای شوینگر در فضا‌زمان دوسیت چهاربعدی و در مرجع [۱۳] اثر پس‌زنی زوج‌های فرمیونی شوینگر روی میدان الکتریکی در فضا‌زمان دوسیت دو بعدی مطالعه شده است.

بدون در نظر گرفتن یک میدان الکترومغناطیسی زمینه، به دیگر سخن، در میدان گرانشی خالص یک فضا‌زمان از نوع جهان‌های فریدمان-لومتر-رابرتسون-واکر^۴ به طور فضایی تخت، تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر [۱۴-۲۰] و میدان دیراک [۲۱-۲۴] محاسبه شده است. در کارهای [۶، ۱۴-۱۵] نویسندگان اثر پس‌زنی گرانشی تولید ذره را در فضا‌زمان دوسیت چهاربعدی مطالعه کرده‌اند. در حالی که در کارهای [۱۶-۲۴] بیشتر نظریه بازبهنجارش توسعه داده شده است. اثر پس‌زنی گرانشی زوج‌های اسکالر شوینگر به یک روش شبه‌کلاسیک در مرجع [۹] مطالعه شده است و نشان داده شده که ثابت هابل واپاشی می‌کند. نویسندگان [۹] یافته‌اند، برای مورد یک میدان اسکالر سنگین $m/H \gg 1$ ، مقیاس زمان برای واپاشی ثابت هابل به طور نمایی با افزایش جرم میدان اسکالر بزرگ می‌شود. در مرجع [۲۵] اثر پس‌زنی گرانشی زوج‌های اسکالر شوینگر به یک روش شبه‌کلاسیک در قلمرو میدان الکتریکی قوی $(eE)/H^2 \gg 1$ مطالعه شده و نشان داده شده است که مقیاس زمان واپاشی ثابت هابل با افزایش میدان الکتریکی به صورت توانی کاهش می‌یابد.

۱. Matter

۲. Gibbons-Hawking

۳. Infrared hyperconductivity

۴. Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

دوسیته دوبریدی مطالعه شده است.

۲. عملگر رد تانسور انرژی-تکانه

برای محاسبه چشم‌داشتی خلاء عملگر رد تانسور انرژی-تکانه به عملگر میدان اسکالر و تعریف حالت خلاء نیاز داریم. برای به دست آوردن عملگر میدان، از کنش یک میدان اسکالر مختلط ϕ جفت‌شده به یک میدان الکترومغناطیسی در فضا‌زمان دوسیته سه‌بعدی، شروع می‌کنیم

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ g^{\mu\nu} (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi (\partial_\nu - ieA_\nu) \phi^* - (m^2 + \xi R) \phi \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}, \quad (2)$$

به گونه‌ای که m جرم میدان اسکالر، e بار الکتریکی آن و ξ یک ثابت جفت‌شدگی بی‌بعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضا‌زمان دوسیته سه‌بعدی

$$R = \epsilon H^\dagger, \quad (3)$$

است. متریک فضا‌زمان دوسیته سه‌بعدی در تکه پوانکاره از عنصر خط زیر خوانده می‌شود

$$ds^2 = \Omega^2(\tau) (d\tau^2 - dx^2),$$

$$x = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\tau \in (-\infty, \infty),$$

$$\Omega(\tau) = \frac{-1}{\tau H}. \quad (4)$$

برای توصیف یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه، پتانسیل برداری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$A_\mu = -\frac{E}{H^\dagger \tau} \delta_\mu^1, \quad (5)$$

به گونه‌ای که E یک مقدار ثابت است. با این انتخاب برای پتانسیل برداری، تنها مؤلفه‌های غیرصفر تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی داده می‌شوند با

$$F_{\tau 1} = -F_{1\tau} = \partial_\tau A_1 - \partial_1 A_\tau = \Omega^\dagger(\tau) E. \quad (6)$$

معادله کلاین-گوردن میدان اسکالر از کنش (۲) خوانده می‌شود

$$\left[\partial_\tau^2 + H\Omega(\tau)\partial_\tau - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \frac{\gamma ieE}{H} \Omega(\tau)\partial_1 + \left(\frac{e^2 E^2}{H^2} + m_{ds}^2 \right) \Omega^\dagger(\tau) \right] \phi(x) = 0, \quad (7)$$

به گونه‌ای که تعریف کرده‌ایم

در همه کارهای [۷-۱۲] تولید زوج شوینگر در فضا‌زمان دوسیته مطالعه شده است. در کار [۹] درباره اثر پس‌زنی گرانشی زوج‌های شبه‌کلاسیک شوینگر نیز بحث شده است. در این پژوهش ما می‌خواهیم یک قدم بیشتر به جلو برداریم و بیشتر درباره پیامدهای فیزیکی تولید زوج شوینگر در فضا‌زمان دوسیته مطالعه کنیم. اثر تولید زوج روی میدان گرانشی دوسیته یکی از این پیامدها است که به راستی پاسخ به این پرسش است که تولید زوج چه تأثیری بر سرنوشت جهان دوسیته دارد. بدون در نظر گرفتن اثر پس‌زنی گرانشی تولید زوج، هندسه کلاسیک جهان دوسیته یک انبساط ابدی را برای آن تعیین می‌کند. در کار [۹] نشان داده شده است که تولید زوج‌های شبه‌کلاسیک شوینگر به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد و بنابراین پیش‌بینی می‌کند که سرنوشت جهان دوسیته یک جهان تخت باشد. انگیزه ما از این پژوهش این است که در ادامه کار [۹] و با تعمیم آن، بدون در نظر گرفتن شرط شبه‌کلاسیک بودن زوج‌ها، اثر پس‌زنی گرانشی تولید زوج شوینگر در فضا‌زمان دوسیته را مطالعه کنیم. برای مطالعه پس‌زنی گرانشی به تانسور انرژی-تکانه زوج‌های خلق شده نیاز است. برای سادگی ما فرض می‌کنیم که زوج‌های خلق شده یک شاره کامل با معادله حالت خلاء تشکیل دهند. بنابراین تانسور انرژی-تکانه آنها تنها با داشتن رد تانسور به دست می‌آید. به طور مشخص، ما در این مقاله می‌خواهیم رفتار رد تانسور انرژی-تکانه زوج‌های اسکالر شوینگر را در تکه پوانکاره^۱ فضا‌زمان دوسیته سه‌بعدی مطالعه کرده و درباره پیامدهای فیزیکی پس‌زنی گرانشی آن بحث کنیم. برای سادگی، مقدار ثابت جفت‌شدگی بی‌بعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضا‌زمان دوسیته سه‌بعدی را $\frac{1}{\lambda}$ در نظر می‌گیریم. چون سه‌بعدی، پایین‌ترین بعدی است که در آن گرانش انیشتین وجود دارد و رد یک کمیت اسکالر ناوردای پیمانه‌ای است، از این رو برای سادگی این کمیت را در سه بعد مطالعه کرده‌ایم. در مرجع [۲۶] رفتار رد تانسور انرژی-تکانه زوج‌های اسکالر شوینگر در تکه پوانکاره فضا‌زمان

^۱. Poincaré patch

به گونه‌ای که عملگر $a_{in,k}$ یک ذره با تکانه همراه k را نابود و عملگر $b_{in,k}^\dagger$ یک پادذره با تکانه همراه k را خلق می‌کند. کوانتس کانونیک میدان اسکالر با در نظر گرفتن روابط جابه‌جایی زیر، انجام می‌شود

$$[a_{in,k}, a_{in,k'}^\dagger] = [b_{in,k}, b_{in,k'}^\dagger] = (\pi)^2 \delta^{(2)}(k - k'), \quad (17)$$

و حالت خلاء ورودی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a_{in,k}|in\rangle = 0, \quad \forall k. \quad (18)$$

۳. چشمداشتی رد تانسور انرژی-تکانه

تانسور انرژی-تکانه از وردش کنش (۲) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_{\mu\nu}^{tot} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{em}, \quad (19)$$

به گونه‌ای که $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر است و از وردش جمله‌های شامل ϕ در کنش (۲) به دست می‌آید، $T_{\mu\nu}^{em}$ تانسور انرژی-تکانه میدان الکترومغناطیس است و از وردش جمله آخر در سمت راست معادله (۲) به دست می‌آید. با استفاده از معادلات حرکت میدان اسکالر و میدان الکترومغناطیس به سادگی می‌توان نشان داد که تانسور انرژی-تکانه کل پایسته است

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{tot} = \nabla^\mu T_{\mu\nu} + \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{em} = 0. \quad (20)$$

چون هدف ما در این مقاله مطالعه رفتار رد تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر $T_{\mu\nu}$ است، از این رو دیگر تانسور انرژی-تکانه میدان الکترومغناطیس $T_{\mu\nu}^{em}$ را نادیده می‌گیریم. پس از کمی محاسبه جبری و استفاده از معادله کلاین-گوردن (۷) می‌توان نشان داد که رد تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر داده می‌شود با

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \lambda(\xi - \xi_*) \left(g^{\mu\nu} (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi^* (\partial_\nu + ieA_\nu) \phi - m_{ds}^2 \phi^* \phi \right) + 2m^2 \phi^* \phi, \quad (21)$$

به گونه‌ای که

$$\xi_* = \frac{1}{\lambda}, \quad (22)$$

مقدار ξ برای جفت‌شدگی همدیس میدان اسکالر به میدان گرانشی زمینه در سه بعد است. ما برای سادگی مقدار ξ را برابر با

$$m_{ds}^2 = m^2 + \xi R. \quad (8)$$

با جایگذاری

$$\phi(x) = \Omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f^\pm(\tau), \quad (9)$$

در معادله کلاین-گوردن (۷) خواهیم داشت

$$\frac{d^\tau f^\pm}{dz_\pm^\tau} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z_\pm} + \frac{\frac{1}{4} - \gamma^\tau}{z_\pm^\tau} \right) f^\pm = 0, \quad (10)$$

به گونه‌ای که نماد $\pm$ به ترتیب نشان دهنده جواب‌های بسامد مثبت و منفی معادله کلاین-گوردن و متغیرهای z_+ و z_- به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} z_+ &= +i\kappa\tau, \\ z_- &= e^{i\pi} z_+ = -i\kappa\tau, \\ k &= |\mathbf{k}|. \end{aligned} \quad (11)$$

بر حسب کمیت‌های بی‌بعد

$$\mu = \frac{m}{H}, \quad \lambda = -\frac{eE}{H^2}, \quad r = \frac{k_x}{k}, \quad (12)$$

ضریب‌های κ و γ تعریف می‌شوند

$$\kappa = -i\lambda r, \quad (13)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \epsilon\xi - \mu^2 - \lambda^2}. \quad (14)$$

در مرجع [۹] نشان داده شده است جواب‌های معادله کلاین-گوردن (۷) که در زمان‌های آغازی ($\tau \rightarrow -\infty$) دارای رفتار مجانبی $f^\pm \sim e^{\mp i\kappa\tau}$ موج تخت در فضا-زمان مینکوفسکی هستند به ترتیب برای جواب‌های بسامد مثبت و منفی داده می‌شوند

$$U_{in,k}(x) = (\pi k)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi\kappa}{2}} \Omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} W_{\kappa,\gamma}(z_+), \quad (15)$$

$$V_{in,k}(x) = (\pi k)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-i\pi\kappa}{2}} \Omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} W_{\kappa,-\gamma}(z_-),$$

به گونه‌ای که W تابع ویتاکر^۱ [۲۷] است و زیر نویس in نشان دهنده رفتار مجانبی دلخواه توابع مُد در زمان‌های آغازی است.

با استفاده از مجموعه کامل توابع مُد راست هنجار داده شده در معادله (۱۵) می‌توان بسط عملگر میدان اسکالر را به صورت زیر نوشت

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[U_{in,k} a_{in,k} + V_{in,k} b_{in,k}^\dagger \right], \quad (16)$$

^۱. Comoving

^۱. Whittaker

چون حالت خلاء ورودی هادامارد^۲ است [۷ و ۸] درجه واگرایی فرابنفش چشم داشتی خلاء ورودی کمیت‌های فیزیکی مشابه فضازمان تخت خواهد بود. بنابراین ما انتظار داشتیم که در چشمداشتی خلاء ورودی رد تانسور انرژی-تکانه یک واگرایی فرابنفش خطی رخ دهد. برای بهسازی چشمداشتی رد از روش کم کردن بی دررو استفاده می‌کنیم. برای یافتن پادجمله^۳ مناسب، با بازنویسی معادله کلاین-گوردن (۱۰) برای مورد بسامدهای مثبت، آغاز می‌کنیم

$$\frac{d^2 f_A}{d\tau^2} + \omega^2(\tau) f_A = 0, \quad (27)$$

به گونه‌ای که بسامد وابسته به زمان خوانده می‌شود

$$\omega(\tau) = \sqrt{k^2 + \frac{2\lambda r k}{\tau} + \frac{\mu^2 + \lambda^2}{\tau^2}}. \quad (28)$$

برای معادله مد (۲۷) یک جواب به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f_A(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2W(\tau)}} \exp\left(-i \int^\tau W(\tau') d\tau'\right), \quad (29)$$

به شرط این که تابع W جواب معادله زیر باشد

$$W^2(\tau) = \omega^2(\tau) + \frac{2}{\tau} \frac{\dot{W}}{W} - \frac{1}{\tau^2} \frac{\ddot{W}}{W}, \quad (30)$$

به گونه‌ای که نقطه نشان‌دهنده مشتق نسبت به زمان هم‌مدیس τ است. بسط بی دررو، یک بسط بر حسب تعداد مشتق‌های متریک است [۲۹ و ۳۰]. در مرتبه صفرم بسط بی دررو از جمله‌های دارای مشتق در سمت راست معادله (۳۰) در مقایسه با جمله بدون مشتق، چشم پوشی می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$W^{(0)}(\tau) = \omega(\tau). \quad (31)$$

با استفاده از معادله‌های (۹)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۱) توابع مد راست‌هنگار مرتبه صفرم بسط بی دررو، به ترتیب برای جواب‌های بسامد مثبت و منفی به صورت زیر داده می‌شوند

$$U_{A,k}(x) = \left(2\omega(\tau)\right)^{-\frac{1}{2}} \Omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) \exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i \int^\tau \omega(\tau') d\tau'\right),$$

$$V_{A,-k}(x) = \left(2\omega(\tau)\right)^{-\frac{1}{2}} \Omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) \exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i \int^\tau \omega(\tau') d\tau'\right). \quad (32)$$

در نظر می‌گیریم، پس تنها جمله آخر در عبارت سمت راست معادله (۲۱) باقی می‌ماند و بنابر معادله (۱۴) خواهیم داشت

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2 - \lambda^2}. \quad (23)$$

با استفاده از عملگر میدان اسکالر (۱۶) و حالت خلاء (۱۸) خواهیم داشت

$$g^{\mu\nu} \langle \text{in} | T_{\mu\nu} | \text{in} \rangle = \frac{m^2}{2\pi^2} \int d^4k U_{\text{in},k}^* U_{\text{in},k}. \quad (24)$$

با جایگذاری توابع مد از معادله (۱۵) و استفاده از متغیر $r = k_x / k$ ، انتگرال داده شده در سمت راست معادله (۲۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$g^{\mu\nu} \langle \text{in} | T_{\mu\nu} | \text{in} \rangle = \frac{Hm^2}{2\pi^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^\Lambda dp e^{ip\lambda r} |W_{-i\lambda r, \gamma}(-ip)|^2, \quad (25)$$

به گونه‌ای که تعریف کرده‌ایم $p = -k\tau$ و Λ یک قطع بالا تکانه است که به دلیل مناسب بودن تعریف شده است. در مرجع [۹] تانسور انرژی-تکانه در شرایط شبه کلاسیک (۱) محاسبه شده است. در این شرایط پارامتر γ موهومی محض است $| \gamma | = +i | \gamma |$ و $| \gamma | \gg 1$. در این مقاله، ما قید (۱) روی پارامترهای جرم و میدان الکتریکی را در نظر نمی‌گیریم، بنابراین وابسته به مقدار پارامترهای μ, λ پارامتر γ می‌تواند حقیقی یا موهومی محض باشد. محاسبه رد (۲۵) در پیوست آ مرور شده است، برای جزئیات بیشتر مرجع [۲۸] را ببینید. جواب نهایی داده می‌شود با [۲۸]

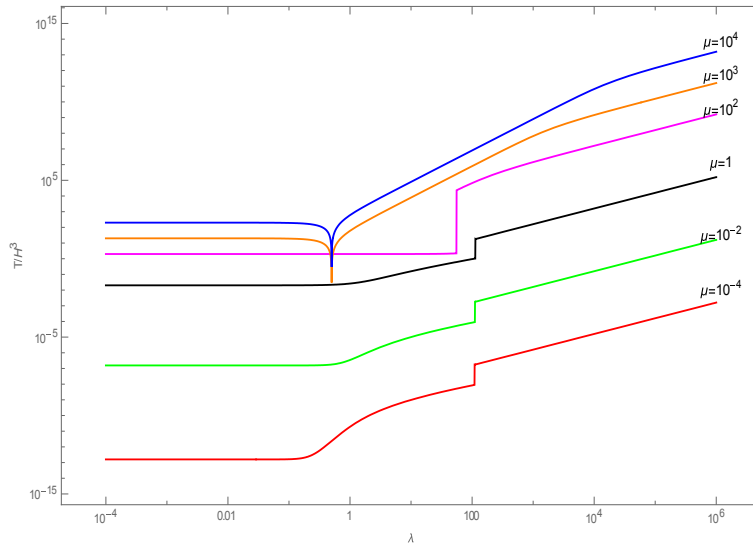
$$g^{\mu\nu} \langle \text{in} | T_{\mu\nu} | \text{in} \rangle = \frac{H^2 \mu^2 \Lambda}{2\pi} + \frac{H^2 \mu^2}{2\pi \sin(2\pi\gamma)} [-\gamma I_0(2\pi\lambda) - \gamma \cos(2\pi\gamma) + \frac{i\lambda}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} \{ (e^{2\pi i \gamma} + e^{2\pi \lambda r}) \psi\left(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda r\right) - (e^{-2\pi i \gamma} + e^{2\pi \lambda r}) \psi\left(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda r\right) \}], \quad (26)$$

به گونه‌ای که I_0 و ψ به ترتیب توابع بسل تعدیل یافته مرتبه صفر و پُلّی گاما هستند.

^۲.Hadamard

^۳.Counterterm

^۱. Cutoff



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) برای مقادیرهای گوناگون μ ، رد بهسازی شده تانسور انرژی-تکانه T/H^3 به صورت تابعی از λ رسم شده است. در ناپیوستگی‌ها تغییر علامت رخ می‌دهد.

معادله (۳۵) داده شده است به صورت تابعی از میدان الکتریکی رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش میدان الکتریکی و جرم اسکالر، رد افزایش پیدا می‌کند. ویژگی مشترک همه نمودارهای شکل ۱ این است که دارای یک ناپیوستگی هستند که در آن رد تغییر علامت می‌دهد. در شکل ۲ مقدار میدان الکتریکی L که در آن رد تغییر علامت می‌دهد به صورت تابعی از جرم میدان اسکالر رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که برای اسکالرهایی سنگین‌تر، L کوچک‌تر است، به گونه‌ای که در نقطه تغییر علامت $\gamma \approx 113i$ است. در مرجع [۱۲] پدیده تغییر علامت برای جریان رسانندگی الکتریکی میدان دیراک در فضا زمان دوسیتته چهاربعدی گزارش شده است. در ادامه این بخش رفتار رد (۳۵) را به طور تحلیلی، در قلمروهای حدی گوناگون میدان الکتریکی و جرم میدان اسکالر، مطالعه می‌کنیم.

در قلمرو میدان الکتریکی قوی رابطه $\lambda \gg \max(1, \mu)$ برقرار است. رفتار رد (۳۵) در این قلمرو با گرفتن حد $\lambda \rightarrow \infty$ و ثابت نگه داشتن μ به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که جمله پیشناز^۱ رد در این قلمرو به صورت زیر داده می‌شود

با استفاده از مجموعه کامل توابع مُد راست‌هنگار (۳۲) می‌توان چشمداشتی خلاء عملگر رد تانسور انرژی-تکانه را تا مرتبه صفرم بسط بی‌دررو به دست آورد

$$T_A = \frac{m^2}{2\pi^2} \int d^4k U_{A,k} U_{A,k}^* = \frac{H^2 \mu^2}{2\pi} (\Lambda - \mu). \quad (33)$$

بنا بر روش بهسازی کم کردن بی‌دررو باید پادجمله (۳۳) را از عبارت چشمداشتی رد (۲۶) کم کنیم

$$T = g^{\mu\nu} \langle \text{in} | T_{\mu\nu} | \text{in} \rangle - T_A, \quad (34)$$

سرانجام به دست می‌آوریم

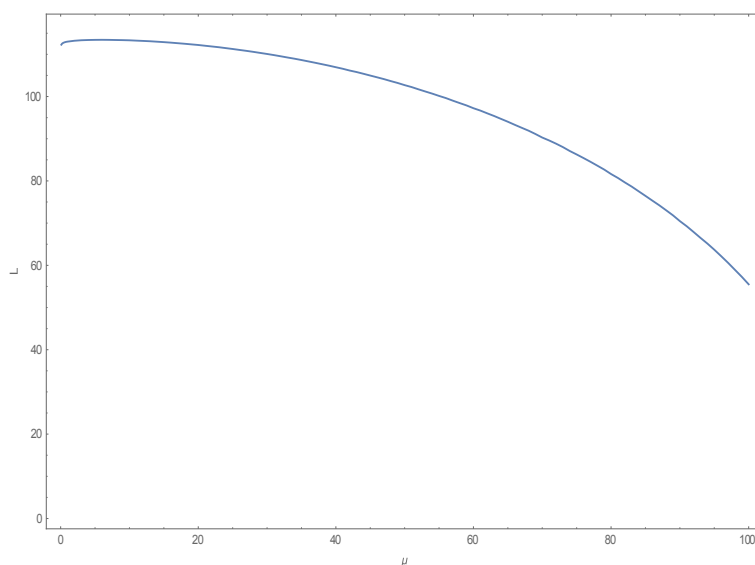
$$T = \frac{H^2 \mu^2}{2\pi \sin(2\pi\gamma)} [\mu \sin(2\pi\gamma) - \gamma I_0(2\pi\lambda) - \gamma \cos(2\pi\gamma)] + \frac{i\lambda}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} \left[(e^{2\pi i\gamma} + e^{2\pi i\lambda r}) \psi\left(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda r\right) - (e^{-2\pi i\gamma} + e^{2\pi i\lambda r}) \psi\left(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda r\right) \right]. \quad (35)$$

بنابراین بسط بی‌دررو پادجمله رد تانسور انرژی-تکانه تا مرتبه صفر، برای حذف واگرایی فرابنفش و به دست آوردن یک عبارت متناهی، کافی است.

۴. مطالعه رفتار رد بهسازی شده تانسور انرژی-تکانه

در شکل ۱ رد بهسازی شده تانسور انرژی-تکانه که در

۱. Leading



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) میدان الکتریکی L که در آن رد تغییر علامت می‌دهد به صورت تابعی از جرم میدان اسکالر μ رسم شده است.

در کارهای [۹ و ۱۴] تانسور انرژی-تکانه به روش‌های شبه‌کلاسیک محاسبه شده و نشان داده شده است که برای مورد میدان الکتریکی صفر و میدان اسکالر سنگین، تانسور به طور نمایی با افزایش جرم میدان اسکالر، صفر می‌شود. بنابراین نتیجه (۴۰) با محاسبه‌های شبه‌کلاسیک ناسازگار است. این ناسازگاری با نتیجه‌های شبه‌کلاسیک، برای رفتار جریان الکتریکی در قلمرو میدان اسکالر سنگین در فضازمان‌های دوسیت سه‌بعدی [۹] و چهاربعدی [۱۰] نیز گزارش شده است.

برای مورد میدان اسکالر سبک $\mu \ll 1$ ، جمله پیشتاز رد (۳۹) به صورت زیر داده می‌شود

$$T \approx \frac{m^3}{4\pi}. \quad (41)$$

نتیجه (۴۱) نشان می‌دهد که برای مورد میدان الکتریکی صفر و میدان اسکالر با جرم صفر، یعنی مورد جفت‌شدگی همدیس میدان اسکالر به فضازمان دوسیت سه‌بعدی، رد تانسور انرژی-تکانه صفر می‌شود. این نتیجه با وجود نداشتن ناهنجاری رد در فضازمان‌های با بعد فرد سازگار است [۳۱].

۵. بحث دربارهٔ پس‌زنی گرانشی تولید زوج شوینگر

در این بخش بحث کوتاهی درباره اثر پس‌زنی گرانشی رد

$$T \approx \frac{H^3 \mu^2}{2\pi} \left(\mu + \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} \log(\lambda \pi \lambda)}{\frac{3}{2^2} \pi e^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (36)$$

در قلمرو میدان الکتریکی ضعیف رابطه $\lambda \ll \min(1, \mu)$ برقرار است. رفتار رد (۳۵) در این قلمرو با گرفتن حد $\lambda \rightarrow 0$ به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که جمله پیشتاز رد برای مورد میدان اسکالر سنگین $\mu \gg 1$ به صورت

$$T \approx \frac{H^3 \mu}{16\pi} \left(1 + 2\lambda^2 + \mathcal{O}(e^{-2\pi\mu}) \right), \quad (37)$$

و برای مورد میدان اسکالر سبک $\mu \ll 1$ با عبارت زیر داده می‌شود

$$T \approx \frac{H^3 \mu}{4\pi} (\mu^2 + \lambda^2). \quad (38)$$

رفتار رد برای مورد میدان الکتریکی صفر، با جای گذاری $\lambda = 0$ در عبارت (۳۵) به دست می‌آید. پس از کمی ساده‌سازی خواهیم داشت

$$T = \frac{H^3 \mu^2}{2\pi} (\mu - \gamma \cot(\pi\gamma)), \quad (39)$$

به گونه‌ای که $\gamma = \sqrt{(1/4) - \mu^2}$. برای میدان اسکالر سنگین $\mu \gg 1$ ، جمله پیشتاز رد (۳۹) داده می‌شود با

$$T \approx \frac{H^3 \mu}{16\pi}. \quad (40)$$

صورت زیر می نویسیم

$$\frac{dH^\vee(t)}{dt} = -\frac{\Lambda\pi HGT}{3H^{-1}}, \quad (48)$$

پس از کمی ساده سازی خواهیم داشت

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{4\pi HGT}{3}. \quad (49)$$

در کارهای [۶ و ۹] چون علامت تانسور انرژی-تکانه یافته شده تغییر نمی کند. بنابراین نویسندگان نشان داده اند که تولید ذره به واپاشی ثابت هابل می انجامد. اما ما در این مقاله بنابر معادله (۴۹) نتیجه می گیریم که بسته به علامت T ثابت هابل می تواند افزایش یا کاهش پیدا کند. در مرجع [۱۴] نشان داده شده است که اثرات کوانتمی می توانند به یک دوره ابرشتاب^۱ $\dot{H} > 0$ به انجامند. مطالعه عددی رد (۳۵) نشان می دهد که برای $\lambda < L$ علامت رد مثبت و برای $\lambda > L$ علامت رد منفی است. بنابراین برای مورد $\lambda < L$ ثابت هابل واپاشی می کند و مقیاس زمان واپاشی آن به صورت زیر تعریف می شود [۶ و ۹]

$$t_B := -\frac{H}{\frac{dH(t)}{dt}} = \frac{3T^{-1}}{4\pi G}. \quad (50)$$

در قلمروی میدان الکتریکی ضعیف و میدان اسکالر سنگین که رفتار رد با معادله (۳۷) داده می شود، مقیاس زمان واپاشی (۵۰) با وارون جرم میدان اسکالر متناسب است، بنابراین با افزایش آن کاهش پیدا می کند. این نتیجه با مقیاس زمان به دست آمده در مرجع [۹] ناسازگار است زیرا محاسبه شبه کلاسیک پیش بینی می کند که تانسور انرژی-تکانه برای اسکالره های سنگین با عامل بولتزمن $\exp(-2\pi m/H)$ متناسب باشد که به افزایش نمایی مقیاس زمان با افزایش جرم می انجامد.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله، چشمداشتی خلاء ورودی عملگر رد تانسور انرژی-تکانه یک میدان اسکالر جرم دار باردار را در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در تکه پوانکاره فضا زمان دوسیه سه بعدی محاسبه کردیم. ما برای سادگی مقدار ثابت جفت شدگی بی بعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضا زمان دوسیه سه بعدی

تانسور انرژی-تکانه که در این مقاله مطالعه شده است، ارائه می دهیم. فرض می کنیم که اثر تولید زوج در معادله انیشتین تنها به یک ثابت کیهان شناسی مؤثر Λ_{eff} به انجامد. از این رو معادله انیشتین را به صورت زیر می توان نوشت

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_{\text{eff}}g_{\mu\nu} = -\Lambda\pi HGT_{\mu\nu}^{\text{reg}}, \quad (42)$$

به گونه ای که G ثابت گرانش نیوتون است. ما برای سادگی فرض می کنیم که زوج های شوینگر تولید شده یک شار کامل با معادله حالت خلاء تشکیل دهند بنابراین تانسور انرژی-تکانه در سمت راست معادله (۴۲) با استفاده از رد (۳۵) داده می شود

$$T_{\mu\nu}^{\text{reg}} = \frac{1}{3}Tg_{\mu\nu}. \quad (43)$$

مشابه با مرجع [۶] استدلال می کنیم که از معادله انیشتین (۴۲) می توان نتیجه گرفت که تانسور انرژی-تکانه زوج های خلق شده، چشمه ای برای تحول ثابت کیهان شناسی از مقدار اولیه Λ_{initial} به ثابت کیهان شناسی مؤثر Λ_{eff} است

$$\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda_{\text{initial}} - \frac{\Lambda\pi}{3}HGT. \quad (44)$$

بنابراین، بسته به علامت رد (۳۵) ثابت کیهان شناسی مؤثر می تواند افزایش یا کاهش پیدا کند. برای این که تحول زمانی ثابت کیهان شناسی را دقیق تر مطالعه کنیم، مناسب است که فضا زمان دوسیه را به صورت یک جهان فریدمان-لومتر-رابرتسون-واکر در نظر بگیریم

$$ds^\vee = dt^\vee - a^\vee(t)dx^\vee, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (45)$$

به گونه ای که پارامتر هابل وابسته به زمان بر حسب عامل مقیاس کیهان شناسی به صورت زیر تعریف می شود

$$H(t) := a^{-1}(t)\frac{da(t)}{dt}. \quad (46)$$

با توجه به معادله حالت خلاء شار کامل که در معادله (۴۳) برای زوج های خلق شده در نظر گرفتیم، تقارن دوسیه شکسته نمی شود و مشابه با مرجع [۶] می توان فرض کرد که ثابت کیهان شناسی مؤثر به صورت زیر به پارامتر وابسته به زمان هابل مربوط شود

$$\Lambda_{\text{eff}} = H^\vee(t), \quad (47)$$

و معادله تحول زمانی برای پارامتر وابسته به زمان هابل را به

^۱. Superacceleration

رفتار تانسور انرژی-تکانه فرمیون‌های شوینگر را نیز مطالعه کنیم. ما یافته‌ایم که برای مورد میدان اسکالر بی جرم، میدان الکتریکی هرچقدر که باشد رد صفر می‌شود. برای مورد جفت‌شدگی همدیس میدان اسکالر به فضازمان دوسیتة سه‌بعدی، رد تانسور انرژی-تکانه صفر می‌شود، این نتیجه با وجود نداشتن ناهنجاری رد در فضازمان‌های با بعد فرد سازگار است. نشان دادیم که بسته به علامت رد، ثابت هابل وابسته به زمان می‌تواند افزایش یا کاهش یابد. مطالعه عددی رد (۳۵) نشان می‌دهد که برای $L < \lambda$ رد مثبت و برای $L > \lambda$ رد منفی است. بنابراین برای مورد $L < \lambda$ ثابت هابل واپاشی می‌کند.

پیوست آ.

محاسبه رد تانسور انرژی-تکانه پیش از بهسازی

در این پیوست محاسبه انتگرال تکانه توابع ویتاکر برای به دست آوردن مقدار چشمداشتی رد (۲۵) پیش از بهسازی مرور می‌شود. برای محاسبه انتگرال‌های تکانه در معادله (۲۵) فرآیندی را پیش می‌گیریم که در مرجع‌های [۸ و ۱۰] برای محاسبه انتگرال‌های مشابه از توابع ویتاکر استفاده شده است. انتگرالی را که می‌خواهیم محاسبه کنیم به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{I} = e^{\pi\lambda r} \int_0^\Lambda dp \left| W_{-i\lambda r, \gamma}(-2ip) \right|^2. \quad (\text{آ-۱})$$

نمایش انتگرالی ملین-برنز [۲۷] تابع ویتاکر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$W_{-i\lambda r, \gamma}(-2ip) = e^{ip} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{2i\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \gamma + s) \Gamma(\frac{1}{4} - \gamma + s) \Gamma(i\lambda r - s)}{\Gamma(\frac{1}{4} + \gamma + i\lambda r) \Gamma(\frac{1}{4} - \gamma + i\lambda r)} (-2ip)^{-s}, \quad (\text{آ-۲})$$

به گونه‌ای که پربند انتگرال‌گیری، قطب‌های $\Gamma(i\lambda r - s)$ را از قطب‌های $\Gamma(\frac{1}{4} + \gamma + s)$ جدا می‌کند. پارامتر γ حقیقی یا موهومی محض است بنابراین $\gamma^* = \pm \gamma$. با توجه به خاصیت متقارن بودن تابع ویتاکر نسبت به علامت γ ، همیوخ مختلط آن به صورت زیر داده

را $\frac{1}{\lambda} = \xi$ در نظر گرفتیم. مقایسه معادله (۲۱) با معادله (۲۴) گویای ارزش انتخاب چنین پیمانه‌ای است. در این پیمانه، برای مورد یک میدان اسکالر بی جرم و میدان الکترومغناطیسی صفر که جفت‌شدگی همدیس نامیده می‌شود، مسئله مورد بحث از فضازمان دوسیتة به فضازمان تخت نگاشته می‌شود. با استفاده از روش بهسازی بی دررو واگرایی خطی رد حذف شد و یک عبارت متناهی به دست آمد، معادله (۳۵) را ببینید. رد با افزایش میدان الکتریکی و افزایش جرم میدان اسکالر افزایش پیدا می‌کند، شکل ۱ را ببینید. ما یافتیم که رد دارای یک ناپیوستگی است که در آن تغییر علامت رخ می‌دهد. اندازه میدان الکتریکی L که در آن ناپیوستگی رخ می‌دهد با افزایش جرم میدان اسکالر کاهش می‌یابد، شکل ۲ را ببینید. اگر جمله واگرا در عبارت داده شده برای رد بهسازی نشده در معادله (۲۶) را نادیده بگیریم، آنگاه مطالعه عددی رد (۲۶) نشان می‌دهد که وجود این ناپیوستگی به پادجمله بستگی ندارد و برآمده از مقدار چشم داشتی خلاء ورودی رد است. قضاوت درباره این که آیا این ناپیوستگی فیزیکی است یا خیر به نتیجه مشاهده‌های تجربی بستگی دارد. اما پیش از آن مشاهده‌ها می‌توان استدلال کرد که اگر این ناپیوستگی یک رفتار واقعی میدان اسکالر باشد آنگاه باید از روش بازهنجارش مستقل باشد. یعنی اگر به جای روش کم کردن بی‌دررو که ما در این مقاله استفاده کردیم از هر روش بازهنجارش دیگری [۲۹ و ۳۰] که در فضازمان خمیده توسعه داده شده است نیز استفاده می‌کردیم باید این پدیده به همین شکل مشاهده می‌شد. اما حتی در این صورت هم، این ناپیوستگی می‌تواند برآمده از رفتار غیرعادی میدان اسکالر باشد. همان طور که در مقدمه نیز اشاره شد برای مورد میدان اسکالر سبک $m/H \ll 1$ در قلمرو میدان الکتریکی ضعیف جریان رسانندگی با کاهش میدان الکتریکی افزایش می‌یابد $J \sim E^{-1}$ ، که نمونه‌ای از رفتار غیرعادی میدان اسکالر است [۸-۱۰]. در حالی که میدان فرمیونی چنین رفتاری ندارد و در این قلمرو با کاهش میدان الکتریکی، جریان رسانندگی به طور خطی صفر می‌شود [۱۱-۱۲]. مشاهده این ناپیوستگی این انگیزه را می‌دهد که برای نتیجه‌گیری‌های کیهان‌شناسی، در یک پژوهش دیگر در آینده،

می شود

$$(W_{-i\lambda r, \gamma}(-\gamma ip))^* = W_{i\lambda r, \gamma}^*(\gamma ip) = W_{i\lambda r, \gamma}(\gamma ip). \quad (\bar{3})$$

با جای گذاری نمایش انتگرالی تابع ویتاکر و همیوگ مختلط آن در انتگرال (۱-آ) خواهیم داشت

$$\mathcal{I} = C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\gamma i\pi} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + s\right) \Gamma(i\lambda r - s) \\ \times \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dt}{\gamma i\pi} e^{i\frac{\pi}{\gamma}(s-t)} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + t\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + t\right) \quad (\bar{4})$$

$$\Gamma(-i\lambda r - t) \times \int_0^\Lambda dp (\gamma p)^{-s-t},$$

به گونه ای که ضریب C_r تعریف می شود

$$C_r = \frac{e^{\pi\lambda r}}{\gamma} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + i\lambda r\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + i\lambda r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma - i\lambda r\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma - i\lambda r\right)} \right)^{-1}. \quad (\bar{5})$$

در معادله (۴-آ) انتگرال مقدماتی p به سادگی محاسبه می شود

$$\int_0^\Lambda dp (\gamma p)^{-s-t} = \frac{(\gamma\Lambda)^{1-s-t}}{1-s-t}, \quad (\bar{6})$$

به گونه ای که مانند مرجع [۱۰] برای صفر شدن جواب انتگرال در حد $p \rightarrow 0$ فرض کرده ایم

$$\Re(-s-t) + 1 > 0, \quad (\bar{7})$$

برای این که شرط بالا برقرار باشد، پربند انتگرال گیری های s

و t را به گونه ای انتخاب می کنیم که همواره داشته باشیم

$$\Re(s) < \frac{1}{\gamma}, \quad \Re(t) < \frac{1}{\gamma}. \quad (\bar{8})$$

برای محاسبه انتگرال t در معادله (۴-آ) آن را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mathcal{I}_{r,s} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dt}{\gamma i\pi} f_{r,s}(t), \quad (\bar{9})$$

به گونه ای که

$$f_{r,s}(t) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + t\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + t\right) \\ \Gamma(-i\lambda r - t) \frac{(\gamma\Lambda)^{1-s-t}}{1-s-t} e^{i\frac{\pi}{\gamma}(s-t)}. \quad (\bar{10})$$

برای مقدار ثابتی از متغیرهای r و s ، قطب های تابع $f_{r,s}(t)$ به صورت زیر داده می شوند

$$t_L = +\gamma - \frac{1}{\gamma} - n, -\gamma - \frac{1}{\gamma} - n, \quad (\bar{11})$$

$$t_R = 1-s, -i\lambda r + n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

به گونه ای که t_L قطب های $\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + t\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + t\right)$ هستند و در سمت چپ پربند انتگرال گیری قرار دارند. درحالی که t_R قطب های $\Gamma(-i\lambda r - t)$ و مخرج کسر (۱-آ) هستند که در سمت راست پربند انتگرال گیری قرار دارند. ما مشابه با مرجع [۱۰] پربند انتگرال s را به گونه ای انتخاب می کنیم که افزون بر شرط (۵۸) هم زمان شرط زیر نیز برقرار باشد

$$\Re(s) > -1. \quad (\bar{12})$$

برای محاسبه انتگرال (۹-آ) پربند انتگرال t را در نیم صفحه راست می بندیم. بنابراین قطب هایی که باید در نظر گرفته شوند با t_R در معادله (۱۱-آ) داده شده اند. با در نظر گرفتن شرط (۱۲-آ) می توان نشان داد که تنها قطب های ساده

$$t_R = -i\lambda r, 1-i\lambda r, 1-s, \quad (\bar{13})$$

در حد $\Lambda \rightarrow \infty$ دارای مانده غیر صفر هستند. این که تنها تعداد انگشت شماری قطب با مانده غیر صفر برای محاسبه باقی می ماند کمک بزرگی به ساده تر و کوتاه تر شدن محاسبه انتگرال رد می کند و ارزش انتخاب پربند، با شرط داده شده در معادله (۱۲-آ)، را نشان می دهد. راهنمای ما برای رسیدن به این که پربند با شرایط (۸-آ) و (۱۲-آ) محاسبه را ساده تر می کند مطالعه رفتار مجانبی تابع ویتاکر [۲۷] است. رفتار مجانبی $|W_{-i\lambda r, \gamma}(-\gamma ip)|^2$ نشان می دهد در حد $p \rightarrow 0$ انتگرال (۱-آ) صفر و در حد $p \rightarrow \infty$ دست بالا به طور خطی واگرا می شود. پربند با شرایط (۸-آ) و (۱۲-آ) آسان تر به این نتیجه ها برای انتگرال (۱-آ) می انجامد. به همین دلیل پربند انتگرال گیری را مشابه با مرجع [۱۰] در نظر گرفته ایم. با استفاده از قضیه مانده ها و در نظر گرفتن قطب های ساده (۱۳-آ)، انتگرال (۹-آ) محاسبه می شود

$$\mathcal{I}_{r,s} = h_0(r,s) + h_1(r,s) + h_{\text{ind}}(r,s), \quad (\bar{14})$$

به گونه ای که h_0 و h_1 به Λ بستگی دارند اما h_{ind} مستقل از Λ است و داده می شوند با

$$h_0(r,s) = i\Gamma\left(\frac{r}{\gamma} + \gamma - i\lambda r\right) \\ \Gamma\left(\frac{r}{\gamma} - \gamma - i\lambda r\right) \frac{(\gamma\Lambda)^{-s+i\lambda r}}{-s+i\lambda r} e^{i\frac{\pi}{\gamma}(s+i\lambda r)}, \quad (\bar{15})$$

$$\mathcal{I}_1 = \Lambda - \lambda r + \frac{i}{\gamma} + \frac{i}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + i\lambda r \right) \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + i\lambda r \right) \left\{ \psi \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + i\lambda r \right) + \psi \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + i\lambda r \right) \right\} - \log(\gamma \Lambda) + \gamma_E - 1 + \frac{i\pi}{\gamma} \quad (\bar{A}-24)$$

به گونه‌ای که $\gamma_E = 0.5772...$ ثابت اویلر است. اکنون به محاسبه انتگرال $\mathcal{I}_{\text{ind}}$ می‌پردازیم. پس از جایگذاری عبارت h_{ind} از $(\bar{A}-17)$ در معادله $(\bar{A}-21)$ و کمی ساده‌سازی می‌توان نشان داد

$$\mathcal{I}_{\text{ind}} = i\pi^\gamma C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\gamma i\pi} \frac{e^{i\pi s} F_r(s)}{\sin \pi(s - i\lambda r) \cos \pi(\gamma - s) \cos \pi(\gamma + s)}, \quad (\bar{A}-25)$$

به گونه‌ای که تعریف کرده‌ایم

$$F_r(s) = \frac{\left(s - \gamma - \frac{1}{\gamma}\right) \left(s + \gamma - \frac{1}{\gamma}\right)}{(s - i\lambda r)(s - i\lambda r - 1)}. \quad (\bar{A}-26)$$

با استفاده از اتحاد

$$\frac{1}{(s - i\lambda r)(s - i\lambda r - 1)} = -\frac{1}{(s - i\lambda r)} + \frac{1}{(s - i\lambda r - 1)}, \quad (\bar{A}-27)$$

می‌توان نشان داد که معادله $(\bar{A}-26)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$F_r(s) = g_r(s) - g_r(s-1) + \frac{\gamma i\lambda r}{(s - i\lambda r)}, \quad (\bar{A}-28)$$

$$g_r(s) = (s - i\lambda r) - \frac{\left(-\lambda^\gamma r^\gamma + i\lambda r - \gamma^\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)}{(s - i\lambda r)}.$$

با جای‌گذاری از $(\bar{A}-28)$ در معادله $(\bar{A}-25)$ خواهیم داشت

$$\mathcal{I}_{\text{ind}} = i\pi^\gamma C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\gamma i\pi} \frac{e^{i\pi s}}{\sin \pi(s - i\lambda r) \cos \pi(\gamma - s) \cos \pi(\gamma + s)} \left\{ g_r(s) - g_r(s-1) + \frac{\gamma i\lambda r}{(s - i\lambda r)} \right\}. \quad (\bar{A}-29)$$

برای سادگی محاسبه $\mathcal{I}_{\text{ind}}$ ، آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{I}_{\text{ind}} = \mathcal{I}_{\text{ind}}^g + \mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{frac}}, \quad (\bar{A}-30)$$

به گونه‌ای که $\mathcal{I}_{\text{ind}}^g$ و $\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{frac}}$ از معادله‌های زیر خوانده می‌شوند

$$h_1(r, s) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma - i\lambda r\right) \quad (\bar{A}-16)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma - i\lambda r\right) \frac{(\gamma \Lambda)^{1-s+i\lambda r}}{1-s+i\lambda r} e^{i\frac{\pi}{\gamma}(s+i\lambda r)},$$

$$h_{\text{ind}}(r, s) = -i\Gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma} + \gamma - s\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma} - \gamma - s\right) \Gamma(-1+s-i\lambda r) e^{i\pi s}. \quad (\bar{A}-17)$$

پس می‌توان نوشت

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_* + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_{\text{ind}}, \quad (\bar{A}-18)$$

به گونه‌ای که

$$\mathcal{I}_* = C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\gamma i\pi} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + s\right) \Gamma(-s+i\lambda r) h_*(r, s), \quad (\bar{A}-19)$$

$$\mathcal{I}_1 = C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\gamma i\pi} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + s\right) \Gamma(-s+i\lambda r) h_1(r, s), \quad (\bar{A}-20)$$

$$\mathcal{I}_{\text{ind}} = C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\gamma i\pi} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + s\right) \Gamma(-s+i\lambda r) h_{\text{ind}}(r, s). \quad (\bar{A}-21)$$

برای محاسبه انتگرال s در $\mathcal{I}_*$ و $\mathcal{I}_1$ می‌توان نشان داد که قطب‌ها به صورت زیر داده می‌شوند

$$s_R = i\lambda r + n, \quad s_L = +\gamma - \frac{1}{\gamma} - n, \quad (\bar{A}-22)$$

$$-\gamma - \frac{1}{\gamma} - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

به گونه‌ای که $i\lambda r$ قطب h_* ، $1+i\lambda r$ قطب h_1 ، s_R قطب‌های s_L ، $\Gamma(-s+i\lambda r)$ قطب‌های $\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + s\right)$ هستند. پربند انتگرال s را در نیم‌صفحه راست می‌بندیم. بنابراین قطب‌هایی که باید در نظر گرفته شوند با s_R در معادله $(\bar{A}-22)$ داده شده‌اند. در محاسبه $\mathcal{I}_*$ تنها قطب مرتبه دو $i\lambda r$ دارای مانده غیرصفر در حد $\Lambda \rightarrow \infty$ است. به طور مشابه، در محاسبه $\mathcal{I}_1$ قطب‌های ساده $i\lambda r$ و مرتبه دو $1+i\lambda r$ ، دارای مانده غیر صفر هستند. با استفاده از قضیه مانده‌ها و کمی محاسبات جبری خواهیم داشت

$$\mathcal{I}_* = -\frac{i}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma - i\lambda r \right) \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma - i\lambda r \right) \left\{ \psi \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma + i\lambda r \right) + \psi \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma + i\lambda r \right) \right\} - \log(\gamma \Lambda) + \gamma_E + \frac{i\pi}{\gamma} \quad (\bar{A}-23)$$

شکل انتگرال (۳۲-آ) مانند انتگرالی است که در مرجع [۱۰] روش محاسبه آن توضیح داده شده است. با راهنمایی گرفتن از [۱۰] و کمی محاسبه خواهیم داشت

$$\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{frac}} = \lambda r \gamma_E + \frac{i\lambda r}{2\sin(2\pi\gamma)} \left\{ \left(e^{-i\pi\gamma} + e^{i\pi\lambda r} \right) \psi\left(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda r\right) - \left(e^{i\pi\gamma} + e^{i\pi\lambda r} \right) \psi\left(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda r\right) \right\}. \quad (36-آ)$$

سرانجام با استفاده از معادله‌های (۱۸-آ)، (۲۳-آ)، (۲۴-آ)، (۳۰-آ)، (۳۵-آ) و (۳۶-آ) به دست می‌آوریم

$$\mathcal{I} = \Lambda + \lambda r \log(2\Lambda) - \lambda r - \frac{i\pi\lambda r}{2} - \frac{\gamma}{\sin(2\pi\gamma)} \left(e^{i\pi\lambda r} + \cos(2\pi\gamma) \right) + \frac{i\lambda r}{2\sin(2\pi\gamma)} \left\{ \left(e^{i\pi\gamma} + e^{i\pi\lambda r} \right) \psi\left(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda r\right) - \left(e^{-i\pi\gamma} + e^{i\pi\lambda r} \right) \psi\left(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda r\right) \right\}. \quad (37-آ)$$

با استفاده از معادله‌های (۲۵) و (۱-آ) رد تانسور انرژی-تکانه بهسازی نشده به صورت زیر داده می‌شود

$$g^{\mu\nu} < in | T_{\mu\nu} | in > = \frac{Hm^2}{2\pi^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\mathcal{I} dr}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (38-آ)$$

با جای‌گذاری $\mathcal{I}$ از معادله (۳۷-آ) در معادله (۳۸-آ) و گرفتن انتگرال r سرانجام رد تانسور انرژی-تکانه بهسازی نشده به دست می‌آید که در معادله (۲۶) داده شده است.

$$\mathcal{I}_{\text{ind}}^g = i\pi^2 C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{2i\pi} \frac{e^{i\pi s} (g_r(s) - g_r(s-1))}{\sin \pi(s - i\lambda r) \cos \pi(\gamma - s) \cos \pi(\gamma + s)}, \quad (31-آ)$$

$$\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{frac}} = i\pi^2 C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{2i\pi} \frac{e^{i\pi s}}{\sin \pi(s - i\lambda r) \cos \pi(\gamma - s) \cos \pi(\gamma + s)} \frac{2i\lambda r}{(s - i\lambda r)}. \quad (32-آ)$$

برای محاسبه $\mathcal{I}_{\text{ind}}^g$ ابتدا قطب‌های انتگرالده آن را مشخص می‌کنیم

$$s_R = \pm\gamma + \frac{1}{2} + n, \quad i\lambda r + n, \quad (33-آ)$$

$$s_L = \pm\gamma - \frac{1}{2} - n, -1 + i\lambda r - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

به گونه‌ای که قطب‌های s_R در سمت راست و قطب‌های s_L در سمت چپ پربند انتگرال‌گیری قرار گرفته‌اند. پربند انتگرال را در نیم‌صفحه چپ می‌بندیم، بنابراین قطب‌های s_L درون پربند انتگرال‌گیری قرار می‌گیرند. چون در محاسبه انتگرال (۳۱-آ) سهم مانده قطب داده شده با $n+1$ در جمله شامل $g_r(s)$ توسط سهم مانده قطب داده شده با n در جمله شامل $g_r(s-1)$ حذف می‌شود، بنابراین به غیر از قطب‌های زیر سهم مانده سایر قطب‌ها حذف خواهد شد

$$s_L = +\gamma - \frac{1}{2}, -\gamma - \frac{1}{2}, -1 + i\lambda r. \quad (34-آ)$$

بنابراین به دست می‌آوریم

$$\mathcal{I}_{\text{ind}}^g = -\frac{i\lambda^2 r^2}{2} - \frac{\lambda r}{2} - \frac{i\gamma^2}{2} - \frac{3i}{8} - \frac{\gamma}{\sin(2\pi\gamma)} \left(e^{i\pi\lambda r} + \cos(2\pi\gamma) \right). \quad (35-آ)$$

مراجع

1. F Sauter, *Z. Phys.* **69** (1931) 742.
2. W Heisenberg and H Euler, *Z. Phys.* **98** (1936) 714.
3. J S Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
4. F Gelis and N Tanji, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **87** (2016) 1.
5. A Di Piazza, C Muller, K Z Hatsagortsyan, and C H Keitel, *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012) 1177.
6. E Mottola, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 754.
7. J Garriga, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 6343.
8. M B. Fröb, J Garriga, S Kanno, M Sasaki, J Soda, T Tanaka and A Vilenkin, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1404** (2014) 009.
9. E Bavarsad, C Stahl and S S Xue, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 104011.
10. T Kobayashi and N Afshordi, *J. High Energy Phys.* **1410** (2014) 166.
11. C Stahl, E Strobel, and S S Xue, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 025004.
12. T Hayashinaka, T Fujita, and J Yokoyama, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **07** (2016) 010.
13. C Stahl and S S *Phys. Lett. B* **760** (2016) 288.
14. T Markkanen, A Rajantie, *J. High Energy Phys.* **1701** (2017) 133.
15. T Markkanen, De Sitter Stability and Coarse

- اسکالرهای شوینگر در فضا-زمان دوسویه ۲-بعدی،
پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان (۱۳۹۶).
27. F W J Olver, D W Lozier, R F Boisvert, and C W Clark, “*NIST Handbook of Mathematical Functions*”, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2010).
۲۸. م. مرتضی‌زاده، ”بررسی تریس تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر در حضور میدان الکتریکی زمینه در فضا-زمان دوسویه ۳-بعدی“، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان (۱۳۹۶).
29. L Parker and D Toms, “*Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*”, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2009).
30. N D Birrell and P C W Davies, “*Quantum Fields in Curved Space*”, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1984).
31. M J Duff, *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 1387.
- Graining, arXiv:1703.06898 [gr-qc].
16. L Parker and S A Fulling, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 341.
17. S A Fulling and L Parker, *Annals Phys.* **87** (1974) 176.
18. J S Dowker and R Critchley, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 3224.
19. S Habib, C Molina-Paris, and E Mottola, *Phys. Rev. D* **61** (1999) 024010.
20. D Lopez Nacir and F D Mazzitelli, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 024013.
21. A Landete, J Navarro-Salas, and F Torrenti, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 044030.
22. A. Landete, J Navarro-Salas, and F Torrenti, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 061501.
23. S Ghosh, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 124075.
24. S Ghosh, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 044032.
۲۵. ن. مارگسیان، ”تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه ذرات اسکالر شوینگر خلق شده در فضا-زمان دوسویه“، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان (۱۳۹۶).
۲۶. ز. سجادی‌نیا، ”تریس بازبهنجارشده تانسور انرژی-تکانه