

تحلیل عددی انشعاب فولد- چنگال با تقارن Z_2 و کاربرد آن در جریان سیال در لوله

رضا مزروعی سبدانی و زهره اسکندری

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

پست الکترونیکی: mazrooei@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۹/۲۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۰۸/۲۰)

چکیده

در این مقاله ما به بررسی عددی انشعاب فولد- چنگال با تقارن Z_2 می پردازیم. برای این منظور فرمول‌های صریحی برای به دست آوردن ضرایب بحرانی این انشعاب به دست می آوریم و شرایط ناتباهدگی این انشعاب را مشخص می کنیم. انشعابات موضعی، منحنی‌های انشعاب و نماهای فاز آن را با استفاده از جعبه ابزار متکونت ام محاسبه می کنیم. مثالی که ما روی آن تأکید داریم یک مدل از جریان سیال در لوله است.

واژه‌های کلیدی: انشعاب، نگاشت، ضرایب بحرانی، تقارن، جریان لوله در سیال

۱. مقدمه

تحلیل دینامیکی و عددی برخی مدل‌های فیزیکی همیشه یک روش مرسوم بوده است (برای مثال [۱-۳، ۶ و ۱۶] را ببینید). تجزیه و تحلیل مسایل مربوط به انشعابات عددی معادلات دیفرانسیل در مکانیک سیالات توسط کلیف، اسپنس و تاوئر در [۱] مطالعه شده است. به ویژه آنها معادلات نویر استوکس و مسئله تیلور- کویت را مطالعه نموده‌اند. همچنین در مقاله مروری [۲] روش‌های انشعابات عددی به همراه کاربردها در مکانیک سیالات و تحلیل‌های انشعاب مربوطه توسط نویسندگان مورد مطالعه قرار گرفته است. کراوفورد و نابلاچ انشعابات معادلات دیفرانسیل متقارن مربوط به مکانیک سیالات را در [۳] مطالعه نمودند. مارکوس، ملیبوسکی و

میسگیور انشعاب فولد- چنگال را برای دسته‌ای از نگاشت‌های متقارن در جریان لوله مطالعه نمودند [۴]. هیل مایر در رساله دکترای خود همراه با کارهای مشترکی با یوری کوزنتسوف به روش‌های عددی برای تحلیل انشعاب‌های نگاشت‌ها پرداختند [۶]. در این تحقیق هدف ما به کارگیری این روش‌ها در تحلیل انشعابات نگاشت‌های متقارن برای یک مثال از مسایل مکانیک سیالات یعنی همان مسئله جریان لوله در مرجع [۴] است. همان طور که در بخش ۳ و صفحات ۵ و ۶ مرجع [۴] به طور کامل توضیح داده شده است یک مدل جریان لوله می‌تواند با یک تشدید قوی ۱:۱ همراه با تقارن انعکاسی یا همان انشعاب فولد- چنگال باشد. این مدل در [۴ و ۵] به طور کامل تشریح شده و نحوه تغییر دینامیکی

انشعاب رخ دهد. کمترین تعداد پارامتر مورد نیاز برای مشخص کردن تمام دینامیک‌های ممکن در نزدیکی نقطه انشعاب را هم بعد^۴ انشعاب می‌نامیم.

سه انشعاب هم بعد ۱ برای نگاشت‌ها وجود دارند، فولد^۵ (نقطه حدی^۶)، فلیپ^۷ (مضاعف‌سازی دوره تناوب^۸) و نیمارک ساکر^۹. شکل نرمال و ضرایب بحرانی این سه انشعاب در سال ۱۹۹۸ توسط کوزنتسوف در [۷] به دست آمده‌اند.

۱. انشعاب فولد: فرض کنید دستگاه (۱) به ازای پارامتر

$\alpha = \alpha_0$ دارای نقطه تعادل x_0 با مقدار ویژه ساده^{۱۰} $\lambda = +1$ باشد، و مقدار ویژه دیگری روی دایره واحد نداشته باشد. بنابراین منیفلد مرکزی دارای بعد ۱ است و تحدید دستگاه (۱) به منیفلد مرکزی یک بعدی در مقدار بحرانی^{۱۰} پارامتر به صورت

$$\xi \mapsto \xi + \frac{1}{p} a \xi^p + O(\xi^3), \xi \in R,$$

است. ضریب بحرانی شکل نرمال، α ، به صورت $a = \langle p, B(q, q) \rangle$ محاسبه می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned} A &= f_x(x_0, \alpha_0), \\ B(u, v) &= f_{xx}(x_0, \alpha_0), \\ Aq &= q, \\ A^T p &= p, \\ \langle p, q \rangle &= 1 \end{aligned}$$

شکل نرمال وابسته به پارامتر انشعاب فولد به صورت

$$\xi \mapsto \alpha + \xi + a(\alpha) \xi^2 + O(\xi^3), \xi \in R,$$

می‌باشد، که در آن α پارامتر کنترل است. اگر $a \neq 0$ (ضریب بحرانی) باشد، دو نقطه تعادل یکی می‌شوند و سپس از بین می‌روند.

۲. انشعاب فلیپ: فرض کنید دستگاه (۱) به ازای پارامتر

$\alpha = \alpha_0$ دارای نقطه تعادل x_0 با مقدار ویژه ساده^{۱۰} $\lambda = -1$ باشد، و مقدار ویژه دیگری روی دایره واحد نداشته باشد،

امواج حرکت را می‌توانید ملاحظه نمایید. در این جا با آنالیز عددی این مدل برخی دیدگاه‌های دیگر تغییر امواج حرکت را می‌توان ملاحظه نمود.

تا کنون انشعابات متقارن از لحاظ نظری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. اما بررسی عددی این انشعابات بسیار محدود بوده است. خانواده‌ای از دستگاه‌های دینامیکی گسسته هموار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$x \mapsto f(x, \alpha), x \in R^n, \alpha \in R^p, p=1 \text{ یا } 2 \quad (1)$$

فرض کنید این دستگاه به ازای $\alpha = \alpha_0$ دارای نقطه تعادل x_0 باشد، یعنی $f(x_0, \alpha_0) = x_0$. اگر ماتریس ژاکوبی $A = f_x(x_0, \alpha_0)$ هیچ مقدار ویژه‌ای با اندازه ۱ نداشته باشد (x_0 نقطه تعادل هذلولوی^۱ دستگاه (۱) باشد) طبق قضیه هارتمن گروبن^۲ دستگاه در نزدیکی نقطه تعادل هذلولوی از لحاظ توپولوژیکی با نگاشت خطی $x \mapsto Ax$ هم‌ارز است و دینامیک‌های دستگاه در همسایگی این نقطه تعادل با تغییر پارامتر تغییر نخواهند کرد. اگر ماتریس ژاکوبی A مقدار ویژه روی دایره واحد داشته باشد (x_0 نقطه تعادل غیرهذلولوی^۳ دستگاه است)، قضیه منیفلد مرکزی وجود منیفلدهای پایای پایدار، ناپایدار و مرکزی را در نزدیکی نقطه تعادل x_0 تضمین می‌کند. دینامیک‌های موضعی دستگاه روی منیفلدهای پایدار و ناپایدار تنها با قسمت خطی نگاشت مشخص می‌شوند، در حالی که دینامیک‌ها روی منیفلد مرکزی به جملات خطی و غیرخطی نگاشت وابسته هستند، تمام جملات غیرخطی نگاشت در تعیین دینامیک‌های آن تأثیر ندارند، و می‌توان بعضی از جملات غیرخطی را که در تعیین دینامیک‌های نگاشت تأثیری ندارد، با یک تبدیل خطی هموار و مناسب حذف کرد و نگاشت محدود به منیفلد مرکزی را به یک شکل نرمال تا مرتبه معین تبدیل کرد. شکل نرمال یک انشعاب، عبارت است از یک مدل ساده شده دستگاه برای آنالیز یک نوع انشعاب خاص. دینامیک‌های نزدیک نقاط تعادل غیرهذلولوی ممکن است با تغییر پارامتر از لحاظ توپولوژیکی تغییر کنند یا به عبارت دیگر

۱. Hyperbolic fixed point

۲. Grobman-Hartman

۳. Non-hyperbolic

۴. Codimension

۵. Fold

۶. Limit point

۷. Flip

۸. Period doubling

۹. Neimark-Sacker

۱۰. Critical

است که در آن $z, d \in \mathbb{C}$ است. اگر $c = \text{Re}(e^{-i\theta} d) \neq 0$ ، آن‌گاه وقتی پارامتر از مقدار بحرانی عبور کند حول نقطه ثابت یک منحنی بسته پایا یکتا ظاهر می‌شود. ضریب بحرانی شکل نرمال، d ، به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$d = \left\langle p, C(q, q, \bar{q}) + \nu B(q, (I-A)^{-1} B(q, \bar{q})) + B(\bar{q}, (e^{i\theta} I - A)^{-1} B(q, q)) \right\rangle,$$

که در آن

$$Aq = e^{i\theta} q, A^T p = e^{-i\theta} p, \langle p, q \rangle = 1.$$

اگر $c < 0$ منحنی بسته پایا پایدار و انشعاب زیر بحرانی است. اگر $c > 0$ منحنی بسته پایا ناپایدار و انشعاب زیر بحرانی می‌باشد.

همچنین یازده انشعاب هم‌بعد دو وجود دارند، این انشعاب‌ها در سه حالت زیر رخ می‌دهند [۷] ضرایب بحرانی انشعاب هم‌بعد یک صفر شود، تشدید قوی برای انشعاب نیمارک ساکر رخ دهد، مقدار ویژه‌ای بیشتری روی دایره واحد قرار گیرند و بعد منیفلد مرکزی افزایش پیدا کند.

شکل نرمال انشعاب‌های هم‌بعد ۲ نگاشت‌ها در مراجع [۶-۸] و ضرایب بحرانی این انشعاب‌ها در مرجع [۶] به دست آمده‌اند. آنالیز عددی انشعاب‌های هم‌بعد دو با استفاده از جعبه ابزار متکونت در مرجع [۱۰] بررسی شده است.

انشعاب‌های هم‌بعد دو نگاشت‌ها عبارتند از: انشعاب گوشه، انشعاب فلیپ تعمیم‌یافته، انشعاب چان سینر، انشعاب تشدید ۱:۱، انشعاب تشدید ۱:۲، انشعاب تشدید ۱:۳، انشعاب تشدید ۱:۴، انشعاب فولد-نایمارک ساکر، انشعاب نایمارک ساکر-نایمارک ساکر.

روش‌های عددی برای بررسی دستگاه‌های دینامیکی به سرعت در حال گسترش هستند و نرم‌افزارهای زیادی در این زمینه معرفی شده‌اند، از جمله کارآمدترین این نرم‌افزارها آتو^۳ [۱۱] و جعبه ابزار متکونت^۴ [۱۲] می‌باشند. متکونت برای تحلیل عددی دستگاه‌های دینامیکی پیوسته (معادلات

بنابراین منیفلد مرکزی یک بعدی است و تحدید دستگاه به منیفلد مرکزی یک‌بعدی در مقدار بحرانی پارامتر به صورت زیر است

$$\xi \mapsto -\xi + \frac{1}{3!} b \xi^3 + O(\xi^4), \xi \in \mathbb{R},$$

ضریب بحرانی شکل نرمال، b ، به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$b = \left\langle p, C(q, q, q) + \nu B(q, (I-A)^{-1} B(q, q)) \right\rangle,$$

که در آن

$$C(u, v, w) = f_{xxx}(x_*, \alpha_*), \\ Aq = -q, \\ A^T p = -p, \langle p, q \rangle = 1.$$

شکل نرمال وابسته به پارامتر انشعاب فلیپ به صورت

$$\xi \mapsto -(1+\beta)\xi + \frac{1}{3!} b(\beta)\xi^3 + O(\xi^4), \\ \xi \in \mathbb{R},$$

که در آن β پارامتر کنترل می‌باشد. وقتی پارامتر کنترل از مقدار بحرانی عبور می‌کند یک سیکل متناوب با دوره تناوب دو از نقطه ثابت منشعب می‌شود. x را یک دوره تناوب از مرتبه k برای دستگاه (۱) است. هر گاه نقطه ثابت نگاشت مرتبه k $x \mapsto f^k(x, \alpha)$ باشد اگر $b > 0$ (ضریب بحرانی) این دوره تناوب مرتبه دو پایدار است و به ازای مقادیر β که نقطه ثابت نگاشت ناپایدار است، به وجود می‌آید، این پدیده را انشعاب فلیپ زیر بحرانی^۱ (فوق بحرانی) می‌نامیم. اگر $b < 0$ باشد دوره تناوب از مرتبه دو ناپایدار است، و به ازای مقادیری از β که نقطه ثابت نگاشت به ازای آن پایدار است، به وجود می‌آید، این پدیده انشعاب فلیپ زیر بحرانی^۲ نامیده می‌شود.

۳. انشعاب نایمارک ساکر: فرض کنید دستگاه (۱) به ازای

پارامتر $\alpha = \alpha_*$ دارای نقطه تعادل x_* با مقادیر ویژه ساده $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ که $0 < \theta < \pi$ ، و مقدار ویژه دیگری روی دایره واحد نداشته باشد، بنابراین در این حالت منیفلد مرکزی دوبعدی است و تحدید دستگاه (۱) به منیفلد مرکزی به صورت

$$z \mapsto z e^{i\theta} \left(1 + \frac{d}{4} |z|^2 \right) + O(|z|^4),$$

۳. AUTO07

۴. MATCONT، این جعبه ابزار از نرم‌افزار متلب (Matlab) می‌باشد، که از سایت www.sourceforge.net به صورت رایگان می‌توان دانلود کرد.

۱. Supercritical

۲. Subcritical

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu + g(u, v) \\ Cu + h(u, v) \end{pmatrix},$$

نوشت، که در آن مقادیر ویژه ماتریس B روی دایره واحد قرار دارند و مقادیر ویژه ماتریس C داخل یا خارج دایره واحد قرار دارند. منیفلد مرکزی را می‌توان به صورت موضعی $u = V(v)$ نمایش داد. دستگاه فوق به طور توپولوژیک با دستگاه

$$u \mapsto Bu + g(u, v),$$

هم‌ارز است.

برای دستگاه وابسته به پارامتر $x \mapsto f(x, \alpha)$ کافی است دستگاه $\begin{cases} x \mapsto f(x, \alpha) \\ \alpha \mapsto \alpha \end{cases}$ را در نظر بگیریم و منیفلد مرکزی را برای این دستگاه به دست آوریم.

نکته: برای محاسبه انشعابات با استفاده از منیفلد مرکزی ابتدا باید ماتریس ژاکوبی دستگاه را به شکل جردن تبدیل کنیم و منیفلد مرکزی را به دست آوریم و انشعابات مورد نظر را از دستگاه کاهش یافته به منیفلد مرکزی به دست آوریم. ولی در روش استفاده از ضرایب بحرانی نیازی به محاسبه شکل جردن ماتریس ژاکوبی و به دست آوردن منیفلد مرکزی و کاهش دستگاه به منیفلد مرکزی نیست، فقط کافی است ضرایب بحرانی را در نقاط انشعاب از شکل نرمال انشعاب مورد نظر محاسبه کنیم.

۲. شکل نرمال عددی انشعاب‌های متقارن

ما در این بخش نحوه محاسبه شکل نرمال و ضرایب بحرانی انشعابات متقارن نگاشت‌ها را بیان می‌کنیم. برای این منظور نیاز به تعاریفی چون عمل، نمایش و هم پایایی داریم (مرجع [۱]، فصل ۱۲ صفحات ۲۳ الی ۲۵).

فرض کنید Γ یک گروه لی و V یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی باشد، گوئیم Γ به طور خطی روی V عمل می‌کند، اگر نگاشت پیوسته زیر وجود داشته باشد

$$\Gamma \times V \mapsto V, (\gamma, v) \mapsto \gamma.v,$$

به طوری که

۱. به ازای هر $\gamma \in \Gamma$ نگاشت

$$\rho_\gamma : V \mapsto V,$$

که به صورت زیر تعریف می‌شود

دیفرانسیل) است. نسخه جدید متکونت به نام متکونت ام^۱ برای تحلیل عددی دستگاه‌های دینامیکی گسسته (نگاشت‌ها) در سال ۲۰۰۷ توسط گوارتز و همکاران [۱۰] معرفی شد. این جعبه ابزار قابلیت آنالیز انشعابات نقاط تعادل و سیکل‌های متناوب تکرارهای نگاشت‌ها را انجام می‌دهد. متکونت ام نقاط فولد (نقطه حدی)، فلیپ (مضاعف سازی دوره تناوب) و نایمارک ساکر را مشخص می‌کند و با انتخاب این نقاط و با دو پارامتر کنترل منحنی انشعابات هم‌بعد یک را به دست می‌آورد و در طول منحنی انشعابات هم‌بعد یک تمام حالت‌های ممکن انشعابات هم‌بعد دو را که در دستگاه رخ می‌دهند، مشخص می‌کند. ضرایب بحرانی همه انشعابات هم‌بعد یک و هم‌بعد دو که برای مشخص کردن ناتباهیدگی انشعابات ضروری است را محاسبه و گزارش می‌دهد. جعبه ابزار متکونت ام قابلیت بررسی انشعابات متقارن را تا قبل از سال ۲۰۱۷ دارا نمی‌بود برای اولین بار در سال ۲۰۱۷ این جعبه ابزار مجهز به بررسی انشعاب تشدید ۱:۳ با تقارن Z_3 در [۱۳] شده است. نخستین گام برای افزودن قابلیت تحلیل انشعاب فولد-چنگال با تقارن Z_3 به این جعبه ابزار محاسبه ضرایب بحرانی و به دست آوردن شرایط ناتباهیدگی این انشعاب می‌باشد که ما در این مقاله ضرایب بحرانی و شرایط ناتباهیدگی این انشعاب را به دست می‌آوریم. ضرایب بحرانی در بخش ۳.۳ به دست خواهند آمد.

ملاحظه ۱ (قضیه منیفلد مرکزی)

دستگاه

$$x \mapsto f(x), \quad x \in R^n,$$

را در نظر بگیرید، فرض کنید $f(0) = 0$ و $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ مقادیر ویژه $A = f_x(0)$ باشند و x نقطه تعادل غیرهذلولوی باشد. فرض می‌کنیم n_+ تعداد مقادیر ویژه دستگاه خارج از دایره واحد باشند و n_- تعداد مقادیر ویژه داخل دایره واحد باشند و n_0 تعداد مقادیر ویژه روی دایره واحد باشند. بنابراین دستگاه فوق را می‌توانیم به صورت

$$x \mapsto F(x), \quad (6)$$

$$F: R^n \rightarrow R^n$$

را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم $x=0$ نقطه ثابت غیرهذلولوی دستگاه (۶) باشد و $F_x(0)$ ، مقدار ویژه روی دایره واحد داشته باشد، بنابراین منیفلد مرکزی دستگاه (۶) دارای بعد m است. فرض می‌کنیم F به اندازه کافی هموار است و آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$F(x) = Ax + \frac{1}{2!}B(x, x) + \frac{1}{3!}C(x, x, x) + \frac{1}{4!}D(x, x, x, x) + \frac{1}{5!}E(x, x, x, x, x),$$

که در آن $A = F_x(0)$ و B, C, D, E توابع چند خطی هستند [۵].

تحدید دستگاه به منیفلد مرکزی m بعدی

$$w^c: \dots x = H(w), \quad H: R^m \rightarrow R^n, \quad (7)$$

به صورت زیر است

$$w \mapsto G(w); \quad G: R^m \rightarrow R^n, \quad (8)$$

از پایایی منیفلد مرکزی به معادله همگن

$$F(H(w)) = G(H(w)) \quad (9)$$

می‌رسیم.

هدف ما به دست آوردن ضرایب G در نقطه انشعاب است. سری تیلور G و H را به ترتیب به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\sum_{|v| \geq 1} \frac{1}{v!} g_v w^v, \quad \sum_{|v| \geq 1} \frac{1}{v!} h_v w^v.$$

با جمع آوری ضرایب جملات w^v در معادله همگن (۹) دستگاه خطی زیر را به دست می‌آوریم

$$Lh_v = R_v, \quad (10)$$

که L ماتریس تعریف شده بر اساس ماتریس ژاکوبی A و مقادیر ویژه ماتریس A که روی دایره واحد قرار دارند، است. سمت راست معادله (۱۰) به ضرایب F, G, H بستگی دارد. معادله (۹) دارای جواب یکتا می‌باشد، هر گاه یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

۱- ماتریس L نامنفرد باشد.

۲- R_v در شرط حل‌پذیری فرد هولم^۱

$$\rho_\gamma(v) = \gamma \cdot v,$$

خطی باشد.

۲. اگر برای $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ، داشته باشیم

$$\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot v) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot v.$$

اگر گروه Γ به طور خطی روی فضای برداری V عمل کند، نگاشت $F: V \rightarrow V$ را Γ هم‌پایا می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\gamma \in \Gamma$ و هر $v \in V$ ، داشته باشیم

$$F(\gamma \cdot v) = \gamma \cdot F(v).$$

۲.۱. شکل نرمال انشعابات متقارن

فرض می‌کنیم دستگاه (۱) دارای گروه تقارن Γ باشد، یعنی به ازای هر $\gamma \in \Gamma$ و هر $x \in R^n$ داشته باشیم،

$$f(\gamma \cdot x, \alpha) = \gamma \cdot f(x, \alpha).$$

فرض کنید دستگاه (۱) به ازای $\alpha = \alpha_0$ دارای نقطه ثابت x_0 با m مقدار ویژه روی دایره واحد و مقدار ویژه‌ای دیگری روی دایره واحد نداشته باشد، بنابراین بعد منیفلد مرکزی m است و تحدید نگاشت (۱) به منیفلد مرکزی m بعدی به صورت زیر است

$$x \mapsto G(x; \alpha) = Lx + P(x; \alpha), \quad x \in R^m; \alpha \in R^p, \quad (2)$$

که $L = L(\alpha)$ قسمت خطی و P قسمت غیرخطی نگاشت می‌باشند. اگر گروه Γ فشرده باشد، منیفلد مرکزی تحت گروه تقارن Γ پایاست و تحدید دستگاه (۱) به منیفلد مرکزی نیز دارای تقارن Γ می‌باشد. شکل نرمال دستگاه (۱) با گروه تقارن Γ را می‌توان طوری انتخاب کرد که P در رابطه زیر صدق کند [۴]

$$\begin{aligned} P(L_*^* x, \alpha) &= L_*^* P(x, \alpha), \\ P(\gamma \cdot x, \alpha) &= \gamma \cdot P(x, \alpha), \end{aligned} \quad (4)$$

به ازای هر $\gamma \in \Gamma$ و هر $x \in R^m$ ، که در آن L_*^* مزدوج ترانهاده $L_* = L(\alpha_0)$ است. چون دستگاه (۳) دارای گروه تقارن Γ می‌باشد. بنابراین داریم

$$L(\alpha) \cdot \gamma = \gamma \cdot L(\alpha). \quad (5)$$

۲.۲. ضرایب بحرانی انشعابات متقارن

برای محاسبه ضرایب بحرانی انشعابات متقارن نگاشت‌ها

۱. Ferholm's solvability

ملاحظه ۲ (عمل Z_p روی R^n): Z_p تنها دو عمل تحویل‌ناپذیر روی R دارد، عمل بدیهی و عمل غیربدیهی، که عمل بدیهی Z_p روی R به صورت

$$-1.x = -x, \quad \forall x \in R, \quad Z_p = \{-1, 1\}.$$

و عمل غیربدیهی Z_p روی R به صورت

$$-1.x = x, \quad \forall x \in R, \quad Z_p = \{1, -1\},$$

بنابراین عمل Z_p روی R^n به صورت p عمل بدیهی و $n-p$ عمل غیربدیهی است که $p \in Z^+$ و $0 \leq p \leq n$. در این حالت

$$Z_p = \text{diag} \left\{ \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_p, \underbrace{(-1, -1, \dots, -1)}_{n-p} \right\}.$$

۳. انشعاب فولد-چنگال با تقارن Z_p و کاربرد آن در جریان سیال در لوله

انشعاب فولد-چنگال با تقارن Z_p برای بررسی حالت‌های مختلف گذار مشخص شده توسط جواب‌های حرکت موج در جریان سیال در لوله معرفی شده است [۴]. همان‌طور که در [۴] بیان شده است، این خانواده از جواب‌ها تحت عمل تقارن انعکاسی پایا است و توسط طول لوله و عدد رینولد Re پارامتری شده‌اند و از انشعابات فولد نشأت گرفته‌اند بنابراین منجر به بررسی یک انشعاب هم‌بعد دو با تقارن Z_p در دستگاه‌های دینامیکی گسسته شده است. شکل نرمال وابسته به پارامتر این انشعاب در [۴] به دست آمده است. ما در این مقاله به بررسی عددی این انشعاب می‌پردازیم، ابتدا انشعابات هم‌بعد یک این انشعاب را به صورت عددی بررسی می‌کنیم، سپس فرمول‌های صریحی برای ضرایب بحرانی این انشعاب به دست می‌آوریم و شرایط ناتباهدگی این انشعاب را مشخص می‌کنیم و در آخر با استفاده از جعبه ابزار متکونت ام انشعابات هم‌بعد یک، هم‌بعد دو، منحنی‌های انشعاب و نماهای فاز دستگاه را به دست می‌آوریم. هر کدام از این انشعابات موضعی تغییرات دینامیکی امواج حرکت را نشان می‌دهد. انشعاب فولد بیانگر آن است که

$$\langle p, R_p \rangle = 0,$$

صدق کند، که برداری از فضای پوچ ماتریس A^* است. اگر R_p به ضریب بحرانی g_p از G بستگی داشته باشد، سپس L منفرد است و از شرط حل‌پذیری فردهولم g_p را به دست می‌آوریم.

برای انشعاب‌های هم‌بعد یک و دو ممکن است نیاز به به دست آوردن h_p داشته باشیم، در حالی که L ماتریس منفرد است. برای حل چنین معادلاتی می‌توانیم از روش مرزی استفاده کنیم [۱۵] (فصل ۳ صفحات ۴۹ الی ۶۷).

اگر ماتریس L منفرد باشد، برای حل (۱۰) دو حالت در نظر می‌گیریم

۱. فرض می‌کنیم فضای پوچ ماتریس L دارای بعد یک باشد و به وسیله بردار q که بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه ساده صفر باشد، تولید شود و به طور مشابه فرض می‌کنیم p بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر ماتریس L^* باشد. سپس ماتریس نامنفرد $(n+1) \times (n+1)$ ، $\begin{pmatrix} L^* & q \\ p & 0 \end{pmatrix}$ را می‌سازیم. بنابراین می‌توانیم دستگاه

$$\begin{pmatrix} L^* & q \\ p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

را حل کنیم، که s یک متغیر کمکی است. جواب دستگاه فوق را به صورت $h_p = L^{INV} R_p$ می‌نویسیم. بنابراین $s = 0$ است.

۲. فرض می‌کنیم L یک ماتریس منفرد با فضای پوچ دو بعدی باشد، که توسط بردارهای q_1, q_2 تولید شده است. به طور مشابه فرض می‌کنیم $\{p_1, p_2\}$ یک پایه برای فضای پوچ L^* باشد. بنابراین ماتریس نامنفرد $(n+2) \times (n+2)$ را می‌سازیم. بنابراین می‌توانیم دستگاه زیر را حل کنیم

$$\begin{pmatrix} L^* & p_1 & p_2 \\ q_1 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_p \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

که در آن $s_1, s_2 \in R$ متغیر کمکی می‌باشند. جواب دستگاه فوق را به صورت $h_p = L^{INV} R_p$ می‌نویسیم.

۱. Irreducible

۲. Reynold number

با توجه به اینکه

$$\lambda_0(0) = 0, \lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 1$$

شکل نرمال بحرانی پوانکاره دولاک نگاشت فوق به صورت

$$\begin{cases} x_1 \mapsto x_1 + a_1 x_1^2 + b_1 x_1^3 + c_1 x_1^4 + c_7 x_1 x_7^2, \\ x_7 \mapsto x_7 + e_1 x_1 x_7 + c_7 x_1^2 x_7 + c_7 x_7^2, \end{cases} \quad (13)$$

می باشد.

۳.۱.۲ شکل نرمال فوق العاده^۴

شکل نرمال وابسته به پارامتر فوق العاده دستگاه (۱۲) در سال

۲۰۱۳ به دست آمده است [۹]، که به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} x_1 \mapsto \mu_1 + (1 + \mu_1)x_1 + \frac{1}{2!}a(\mu)x_1^2 \\ + \frac{1}{2!}b(\mu)x_1^3 + \frac{1}{3!}c(\mu)x_1^4 + \frac{1}{2!}d(\mu)x_1 x_7^2, \\ x_7 \mapsto x_7 - x_1 x_7, \end{cases} \quad (14)$$

برای جزئیات بیشتر به [۹] مراجعه کنید.

۳.۲ تحلیل عددی انشعابات موضعی فولد- چنگال با

تقارن Z_7

در این بخش انشعابات موضعی را به صورت عددی بررسی می کنیم، برای این منظور از شکل نرمال (۱۴) استفاده می کنیم، فرض می کنیم

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_7 \end{pmatrix} \mapsto N(x, \mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 + (1 + \mu_1)x_1 \\ + \frac{1}{2!}a(\mu)x_1^2 + \frac{1}{2!}b(\mu)x_1^3 \\ + \frac{1}{3!}c(\mu)x_1^4 + \frac{1}{2!}d(\mu)x_1 x_7^2 \\ x_7 - x_1 x_7 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$A(x, \mu) = N_x(x, \mu) = \begin{pmatrix} 1 + \mu_1 + a(\mu)x_1 \\ + \frac{1}{2}c(\mu)x_1^3 + \frac{1}{2}d(\mu)x_7^2 & b(\mu)x_7 + d(\mu)x_1 x_7 \\ -x_7 & 1 - x_1 \end{pmatrix}.$$

سه انشعاب هم بعد یک برای خانواده نگاشت های (۱۵) در

همسایگی کوچک $(x, \mu) = (0, 0)$ وجود دارد.

قضیه ۱: روی منحنی $(x_1, x_7, \mu_1) =$

$$\left(-\frac{\mu_1}{a_0} + O(\mu_1^2), \frac{\mu_1}{4a_0} + O(\mu_1^3)\right)$$

انشعاب فولد رخ می دهد، اگر $a_0 \neq 0$ باشد آن گاه انشعاب فولد ناتباهیده است.

اثبات: نگاشت (۱۵) نقطه تعادل با مقدار ویژه +۱ دارد هر گاه

با تغییر پارامترها از حالت حرکت بدون تعادلی می توان به دو حرکت تعادلی یکی پایدار و دیگری ناپایدار رسید. در انشعاب نایمارک ساکر از یک حرکت تعادلی موجی یک منحنی پایای بسته از حرکت موجی ایجاد می شود.

۳.۱ شکل نرمال

۳.۱.۱ شکل نرمال بحرانی^۱ پوانکاره دولاک^۲

فرض می کنیم نگاشت

$$x \mapsto f(x, \alpha), x \in R^n, \alpha \in R^r \quad (11)$$

دارای گروه تقارن Z_7 باشد و به ازای $\alpha = 0$ دارای نقطه ثابت x_0 با دو مقدار ویژه +۱ باشد و مقدار ویژه دیگری روی دایره واحد نداشته باشد. منیفلد مرکزی متناظر به (۱۱) دوبعدی می باشد و

تحدید دستگاه (۱۱) به منیفلد مرکزی به صورت زیر است

$$x \mapsto L(\alpha)x + P(x, \alpha), x \in R^2, \alpha \in R^r, \quad (12)$$

که L قسمت خطی و P قسمت غیرخطی نگاشت است. چون Z_7 گروه لی فشرده^۳ است، بنابراین منیفلد مرکزی تحت عمل Z_7 پایا است، در این صورت دستگاه (۱۲) نیز دارای تقارن $Z_7 = \{S, I\}$ است (که در آن ماتریس همانی 2×2 است و S ماتریس 2×2 با خاصیت $S^2 = I$ و $S \neq I$ است) است. با در نظر گرفتن عمل Z_7 روی R^2 به صورت یک عمل بدیهی و یک عمل غیربدیهی و جابه جایی قسمت خطی نگاشت (۱۲) با S و این حقیقت که L_0 دو مقدار ویژه +۱ دارد، به دست می آوریم

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

فرض می کنیم $P(x, \alpha) = (P_1(x, \alpha), P_7(x, \alpha))$ با توجه به رابطه (۴) داریم

$$\begin{aligned} P_1(x_1, -x_7, \alpha) &= P_1(x_1, x_7, \alpha), \\ P_7(x_1, -x_7, \alpha) &= -P_7(x_1, x_7, \alpha), \end{aligned}$$

بنابراین شکل نرمال تا مرتبه ۳ به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} x_1 \mapsto \lambda_0(\alpha) + \lambda_1(\alpha)x_1 + g_{70}(\alpha)x_1^2 \\ + g_{72}(\alpha)x_1^3 + g_{73}(\alpha)x_1^4 + g_{74}(\alpha)x_1 x_7^2, \\ x_7 \mapsto \lambda_7(\alpha)x_7 + (\alpha)x_1 x_7 + h_{71}(\alpha)x_1^2 + h_{73}(\alpha)x_7^2, \end{cases}$$

۱. Critical normal form

۲. Poincare-Dulac

۳. Compact Lie group

۴. Hyper normal form

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ \mu_1 + \frac{1}{2} b x_1^2 = 0, \\ -b x_1^2 = 0. \end{cases}$$

از رابطه فوق به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \mu_1 = 0. \end{cases}$$

در این حالت $A = \begin{pmatrix} 1 + \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، بنابراین بردارهای ویژه A و

A^T متناظر با مقدار ویژه بحرانی $+1$ عبارتند از $q = p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و

$v = (v_1, v_2)$ و $u = (u_1, u_2)$ که $B(u, v) = \begin{pmatrix} a_0 u_1 v_1 + b_0 u_2 v_2 \\ -u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$

به وضوح $C(q, q, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\langle p, B(q, q) \rangle = 0$. بنابراین

ضریب بحرانی انشعاب چنگال عبارت است از

$$a_{\text{pitch}} = \left\langle p, C(q, q, q) + \mathfrak{r} B(q, (I - A)^{\text{INV}} B(q, q)) \right\rangle,$$

برای جزئیات بیشتر به [۶] مراجعه کنید. در این حالت ضریب

انشعاب چنگال برابر است با $a_{\text{pitch}} = -\frac{\mathfrak{r} b_0}{\mu_1}$. بنابراین اگر

$b_0 \neq 0$ انشعاب مورد نظر ناتباهیده می‌باشد.

قضیه ۳: اگر $b_0 > 0$ و $\mu_1 < 0$ روی منحنی

$$(x_1, x_2, \mu_1) = \left(0, \sqrt{-\frac{\mathfrak{r} \mu_1}{b_0}} + O\left(\mu_1^{\frac{2}{3}}\right), \frac{\mathfrak{r} b_0 + d_0}{b_0} \mu_1 + O(\mu_1^2) \right)$$

انشعاب نایمارک ساکر رخ می‌دهد، این انشعاب ناتباهیده

می‌باشد هرگاه $\frac{1}{\mathfrak{r}}(-a_0^2 b_0 - \mathfrak{r} a_0 b_0 - \mathfrak{r} a_0 d_0 + b_0 c_0) \neq 0$.

اثبات: نقطه ثابت نگاشت (۱۵) که ماتریس ژاکوبی دستگاه

حول این نقطه دارای دترمینان $+1$ باشد را در نظر می‌گیریم.

بنابراین داریم

$$\begin{cases} N(x, \mu) = x, \\ \det(A(x, \mu)) - 1 = 0. \end{cases}$$

جواب دقیق دستگاه فوق به صورت

$$x_1 = 0, \frac{1}{\mathfrak{r}} b_0 x_1^2 + \mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{\mathfrak{r} b_0 + d_0}{b_0} \mu_1, \quad (17)$$

است. ماتریس ژاکوبی دستگاه (۱۵) در جواب‌های به دست

آمده از (۱۷) به صورت $A = \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{r} \mu_1 & b_0 \sqrt{-\frac{\mathfrak{r} \mu_1}{b_0}} \\ \sqrt{-\frac{\mathfrak{r} \mu_1}{b_0}} & 1 \end{pmatrix}$ است. به

داشته باشیم

$$\begin{cases} N(x, \mu) = x, \\ \det(A(x, \mu) - I_{\mathfrak{r}}) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

که در آن $I_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ بنابراین داریم

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ \mu_1 + \mu_2 x_1 + \frac{1}{2} a x_1^2 + \frac{1}{3!} c x_1^3 = 0, \\ \mu_2 + a x_1 + \frac{1}{2!} c x_1^2 = 0, \end{cases}$$

از رابطه فوق در می‌یابیم که x_1 ریشه مضاعف معادله

$$\mu_1 + \mu_2 x_1 + \frac{1}{2!} a x_1^2 + \frac{1}{3!} c x_1^3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\mathfrak{r} c \mu_1 - a \mu_2}{a^2 - \mathfrak{r} c \mu_2}, \\ \mathfrak{r} a \mu_1 - \mu_2^2 = \frac{\mathfrak{r} c}{a^2} (\mathfrak{r} a \mu_1 \mu_2 - c \mu_1^2 - \frac{\mathfrak{r}}{9} \mu_2^3). \end{cases}$$

با بسط x_1 و μ_1 نسبت به توان‌های μ_2 داریم

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\mu_2}{a} \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{c \mu_2^2}{a^2} + \dots \right), \\ \mathfrak{r} a \mu_1 = \mu_2^2 + \dots \end{cases}$$

بنابراین روی منحنی $(x_1, x_2, \mu_1) =$

$$\left(-\frac{\mu_2}{a_0} + O(\mu_2^2), 0, \frac{\mu_2^2}{\mathfrak{r} a_0} + O(\mu_2^3) \right)$$
 انشعاب فولد داریم.

برای به دست آوردن شرط ناتباهیدگی این انشعاب به

صورت زیر عمل می‌کنیم

$q = p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ بردارهای ویژه A و A^T متناظر با مقدار ویژه

بحرانی $+1$ است و $B(u, v) = \begin{pmatrix} a_0 u_1 v_1 + b_0 u_2 v_2 + O(\mu_2) \\ -u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$ که

$u = (u_1, u_2)$ و $v = (v_1, v_2)$ ضریب بحرانی انشعاب فولد

توسط کوزنتسوف در [۶] به صورت $a_{\text{fold}} = \langle p, B(q, q) \rangle$ به

دست آمده است. بنابراین در این حالت ضریب بحرانی انشعاب

فولد $a_{\text{fold}} = a_0 + O(\mu_2)$ است. اگر $a_0 \neq 0$ انشعاب فولد

ناتباهیده است.

قضیه ۲: انشعاب چنگال روی منحنی $(x_1, x_2, \mu_1) = (0, 0, 0)$ رخ

می‌دهد و این انشعاب ناتباهیده است، هرگاه $b_0 \neq 0$.

اثبات: طبق (۱۶) داریم

ازای $\mu_1 < 0$ (به اندازه کافی کوچک) ماتریس فوق یک جفت

مقدار ویژه مختلط روی دایره واحد به صورت

$$e^{\pm i\theta} = (1 + \mu_1) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mu_1^2 + 8\mu_1}$$

دارد. بنابراین اگر $b_1 > 0$ و $\mu_1 < 0$ روی منحنی مورد نظر

انشعاب نایمارک ساکر رخ می دهد. حال برای مشخص کردن

شرط ناتباهدگی این انشعاب ضریب اول لیپانوف انشعاب

نایمارک ساکر را به دست می آوریم. برای این منظور داریم

$$q = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{-2\mu_1}{b_1} \left(1 - \frac{\sqrt{4\mu_1^2 + 8\mu_1}}{2\mu_1} \right)},$$

$$p = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-2\mu_1}{b_1} \left(1 - \frac{\sqrt{4\mu_1^2 + 8\mu_1}}{2\mu_1} \right)}$$

که p و q در رابطه $Aq = e^{i\theta} q$ و $A^T p = e^{-i\theta} p$ صدق می کنند. ضریب اول لیپانوف مربوط به انشعاب نایمارک ساکر

به صورت $c_{NS} = \text{Re}(e^{-i\theta} d)$ است، که در آن

$$d = \langle p, C(q, q, \bar{q}) + 2B(q, (I-A)^{-1} B(q, \bar{q})) + B(\bar{q}, (e^{i\theta} I - A)^{-1} B(q, q)) \rangle,$$

است برای جزئیات بیشتر به مرجع [۶] مراجعه نمایید. در این

حالت ضریب اول لیپانوف به صورت

$$\frac{1}{2} (-a_1^* b_1 - 3a_1 b_1 - 2a_1 d_1 + b_1 c_1)$$

ساگر (فوق بحرانی یا زیر بحرانی) بستگی به علامت ضریب اول لیپانوف دارد.

۳.۳. محاسبه ضرایب بحرانی انشعاب فولد- چنگال با

تقارن Z_T

این انشعاب به وسیله دو مقدار ویژه ساده +۱ روی دایره واحد

مشخص می شود، برای به دست آوردن ضرایب بحرانی این

انشعاب از شکل نرمال بحرانی پوانکاره دولاک (۱۳) استفاده

می کنیم. در این حالت فضای پوچ $A-I$ و $(A-I)^T$ دارای

بعد دو است، بنابراین فرض می کنیم،

$$N(A-I) = \text{span}\{q_1, q_2\},$$

$$N((A-I)^T) = \{p_1, p_2\}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \langle p_1, q_1 \rangle &= \langle p_2, q_2 \rangle = 1, \\ \langle p_1, q_2 \rangle &= \langle p_2, q_1 \rangle = 0, \\ \langle q_1, q_2 \rangle &= \langle p_1, p_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

با گردآوری توان های x و x^2 و x^3 در معادله همگن (۹) به

دست می آوریم:

$$\begin{aligned} x_1: Ah_{10} = h_{10} &\Rightarrow h_{10} = q_1, \\ x_2: Ah_{20} = h_{20} &\Rightarrow h_{20} = q_2, \\ x_1^2: (A-I)h_{12} = 2a_1 q_1 - B(q_1, q_1) &\Rightarrow a_1 \\ &= \frac{1}{2} \langle p_1, B(q_1, q_1) \rangle, h_{12}, \\ &= (A-I)^{INV} (2a_1 q_1 - B(q_1, q_1)), \\ x_1 x_2: (A-I)h_{11} = e_1 q_2 - B(q_1, q_2) &\Rightarrow e_1 \\ &= \frac{1}{2} \langle p_2, (q_1, q_2) \rangle, h_{11} \\ &= (A-I)^{INV} (e_1 q_2 - B(q_1, q_2)), \\ x_2^2: (A-I)h_{22} = 2b_1 q_1 - B(q_2, q_2) &\Rightarrow b_1 \\ &= \frac{1}{2} \langle p_1, B(q_2, q_2) \rangle, h_{22} \\ &= (A-I)^{INV} (2b_1 q_1 - B(q_2, q_2)), \end{aligned}$$

که بردارهای h_{10}, h_{11}, h_{20} در رابطه زیر صدق می کنند

$$\begin{aligned} \langle p_1, h_{10} \rangle &= \langle p_2, h_{11} \rangle = \langle p_1, h_{20} \rangle = 0, \\ x_1^3: (A-I)h_{13} = \epsilon c_1 q_1 + \epsilon a h_{10} &- C(q_1, q_1, q_1) - 2B(q_1, h_{10}), \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{\epsilon} \langle q_1, C(q_1, q_1, q_1) + 2B(q_1, h_{10}) \rangle, \\ x_1 x_2^2: (A-I)h_{12} = 2c_2 q_1 + 2b_1 h_{10} - 2e h_{12} &- C(q_1, q_1, q_2) - 2B(q_2, h_{11}) - B(q_1, h_{20}), \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{1}{\epsilon} \langle q_1, C(q_1, q_2, q_2) + B(q_1, h_{20}) \\ &+ 2B(q_2, h_{11}) \rangle, \\ x_2^3: (A-I)h_{23} = 2c_3 q_2 + 2(e-a)h_{20} &- C(q_1, q_1, q_2) - 2B(q_2, h_{11}) - B(q_2, h_{20}), \\ \Rightarrow c_3 &= \frac{1}{\epsilon} \langle p_2, C(q_1, q_1, q_2) + B(q_2, h_{20}) \\ &+ 2B(q_2, h_{11}) \rangle, \\ x_2^2 x_1: (A-I)h_{22} = \epsilon c_4 q_2 - \epsilon b_1 h_{11} - C(q_2, q_2, q_2) &- 2B(q_2, h_{20}), \\ \Rightarrow c_4 &= \frac{1}{\epsilon} \langle p_2, C(q_2, q_2, q_2) + 2B(q_2, h_{20}) \rangle. \end{aligned}$$

اگر $e_1 \neq 0$ می توانیم با توجه به ضرایب بحرانی شکل

نرمال پوانکاره دولاک، ضرایب بحرانی شکل نرمال

فوق العاده یعنی a_1 و b_1 و c_1 و d_1 را به صورت زیر به دست

آوریم

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_1}{d_1}, b_1 = b_1 e_1, c_1 = \frac{c_1}{e_1}, \\ d_1 &= c_2 + \frac{1}{e_1} (b_1 c_3 - (e_1 + a_1) c_4). \end{aligned}$$

۲. **انشعاب نایمارک ساکر:** اگر μ_4 پارامتر کنترل باشد انشعاب نایمارک ساکر در نقطه $(x_1, x_2) = (0.000000, 0.063246)$ به ازای $\mu_4 = 0.010000$ با ضریب بحرانی $10^{-1} \times 0.020000 \times 5/34$ توسط متکونت ام تشخیص داده می‌شود

در شکل‌های ۱-۴ نمای فاز دستگاه (۱۸) را به ازای $\mu_4 = 0.0009, 0.001, 0.0015, 0.0019$ به دست می‌آوریم.

ملاحظه ۳: با توجه به گزارش متکونت ام برای مشخص کردن انشعاب نایمارک ساکر، ضریب بحرانی (یا ضریب اول لیاپانوف) انشعاب نایمارک ساکر منفی می‌باشد پس بنابراین انشعاب نایمارک ساکر زیر بحرانی (فوق بحرانی) است، بنابراین انتظار داریم یک منحنی بسته پایا ظاهر شود، که شکل ۴ این گفته ما را تصدیق می‌کند اما با افزایش مقدار پارامتر کنترل این منحنی بسته شکسته می‌شود، به شکل‌های ۳ و ۴ مراجعه کنید.

۳.۴.۲. انشعابات هم‌بعد ۲

۱. **انشعابات هم‌بعد یک روی منحنی فولد:** حال نقطه فولد تشخیص داده شده توسط جعبه ابزار متکونت ام را انتخاب می‌کنیم و با ادامه دادن امتداد با دو پارامتر کنترل μ_1, μ_2 انشعاب گوشه در نقطه $(x_1, x_2) = (0.198188, 0.000000)$ به ازای پارامترهای $\mu_1 = 0.006874$ و $\mu_2 = -0.104049$ ، با ضریب بحرانی $10^{-1} \times 830000 \times 8$ توسط متکونت ام گزارش داده می‌شود. تنها انشعاب هم‌بعد دو که روی منحنی فولد رخ می‌دهد انشعاب گوشه می‌باشد. منحنی فولد محاسبه شده توسط جعبه ابزار متکونت ام در شکل ۵ آمده است.

۴. انشعابات هم‌بعد دو روی منحنی نایمارک ساکر

اگر نقطه نایمارک ساکر که در بخش قبل توسط جعبه ابزار در متکونت ام اگر نقطه نایمارک ساکر را انتخاب کنیم و با دو پارامتر کنترل μ_1 و μ_2 امتداد را ادامه دهیم سه انشعاب هم‌بعد دو به صورت زیر به دست خواهیم آورد:

با توجه به بخش ۳-۲ شرایط ناتباهیدگی انشعاب فولد-چنگال با تقارن Z_7 عبارتند از $a_6 \neq 0, b_6 \neq 0$ و اگر $b_6 > 0$ باشد، شرط $-a_6^2 b_6 - 3a_6 b_6 - 2a_6 d_6 + b_6 c_6 \neq 0$ نیز مورد نیاز است.

۳.۴.۳. بررسی عددی انشعاب فولد-چنگال با تقارن Z_7 با استفاده از جعبه ابزار متکونت

همان طور که گفتیم ما در این بخش انشعاب فولد-چنگال را به صورت عددی بررسی می‌کنیم. برای این منظور دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} x_1 \mapsto \mu_1 + (1 + \mu_2)x_1 + 0.525x_1^2 + 0.25x_1^3 \\ -0.883x_1^3 - 0.75x_2x_1^2, \\ x_2 \mapsto x_2 - x_1x_2. \end{cases} \quad (18)$$

به وضوح دستگاه فوق دارای گروه تقارن $Z_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ است و به ازای پارامترهای $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ دستگاه فوق دارای نقطه تعادل $x_0 = (0, 0)$ با دومقدار ویژه $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$ است، بنابراین انتظار داریم که در این دستگاه انشعاب فولد-چنگال رخ دهد پس بنابراین شرایط ناتباهیدگی این انشعاب را بررسی می‌کنیم. ابتدا با توجه به فرمول‌های به دست آمده از بخش ۳.۳ ضرایب بحرانی مربوط به این انشعاب عبارتند از

$$a_6 = 1/0.5, b_6 = 0.5, c_6 = -0.53, d_6 = -1/0.5,$$

پس بنابراین شرایط ناتباهیدگی انشعاب فولد-چنگال برقرار می‌باشد. حال به بررسی عددی انشعاب فولد-چنگال با استفاده از جعبه ابزار متکونت می‌پردازیم.

۳.۴.۳.۱. انشعابات هم‌بعد ۱

۱. **انشعاب فولد:** اگر μ_1 پارامتر کنترل باشد، متکونت ام انشعاب فولد را در نقطه $(x_1, x_2) = (-0.057549, 0.000000)$ به ازای $\mu_1 = 0.002075$ با ضریب بحرانی 0.06774480 تشخیص می‌دهد.

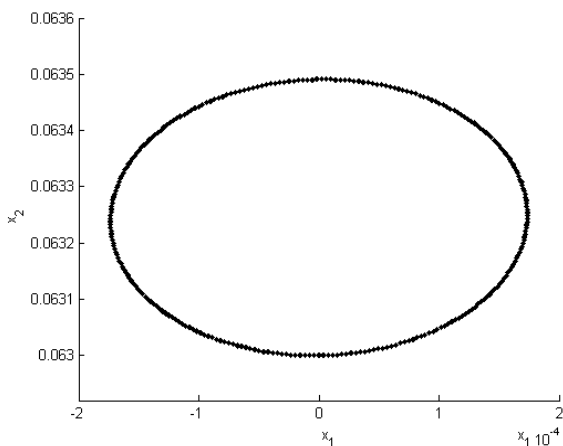
First point found

Tangent vector to first point found

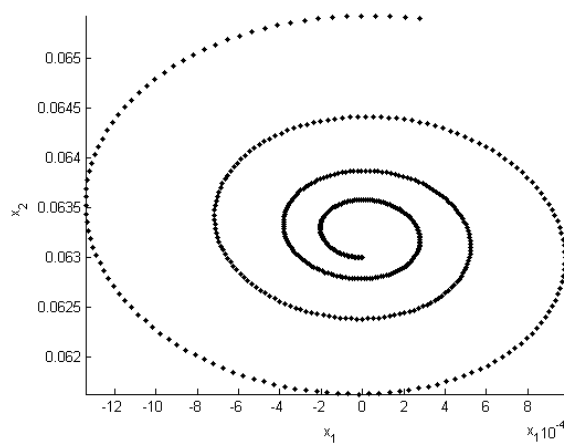
Label = LP, $x = (-0.057549, 0.000000, 0.002075)$

Normal form coefficient of LP = $6.7774480e-01$.

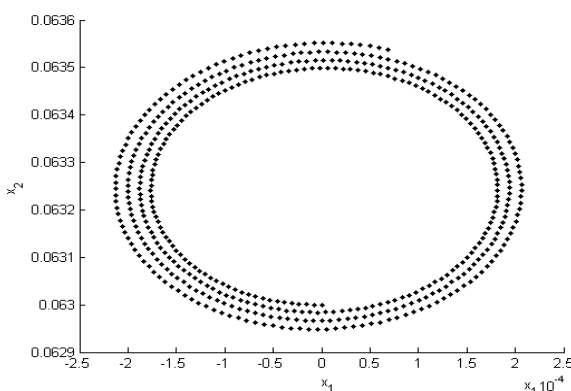
است.



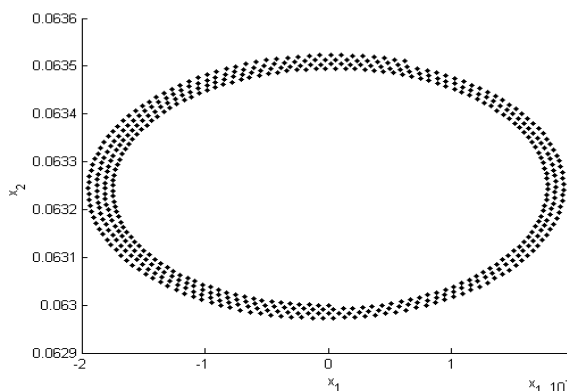
شکل ۲. نمای فاز دستگاه (۱۸) به ازای $\mu_2 = 0.0001$.



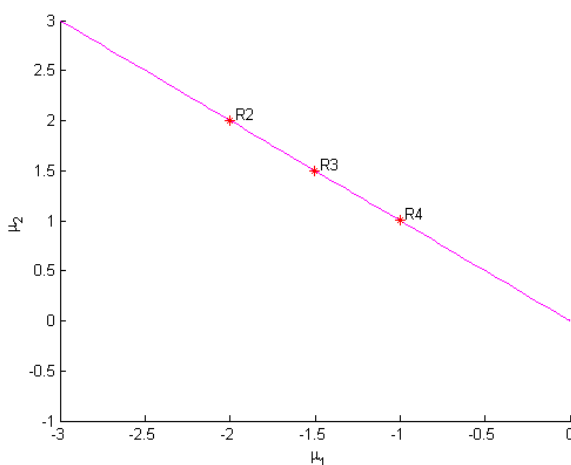
شکل ۱. نمای فاز دستگاه (۱۸) به ازای $\mu_2 = 0.00009$.



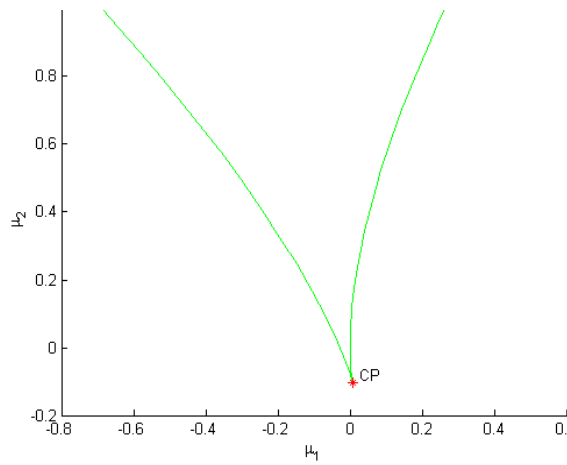
شکل ۴. نمای فاز دستگاه (۱۸) به ازای $\mu_2 = 0.00019$.



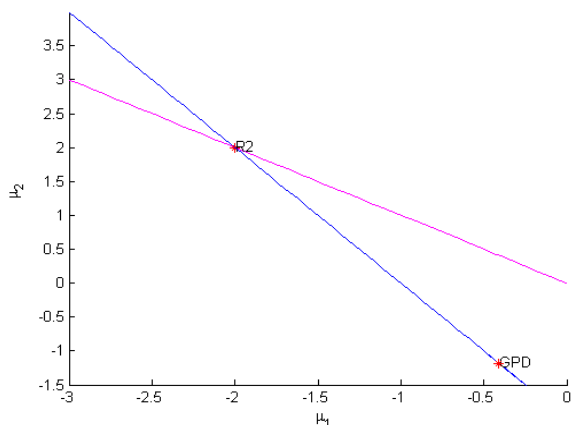
شکل ۳. نمای فاز دستگاه (۱۸) به ازای $\mu_2 = 0.00015$.



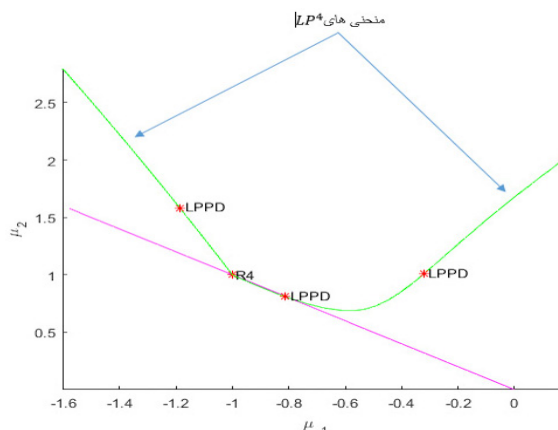
شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی انشعاب نایمارک ساگر.



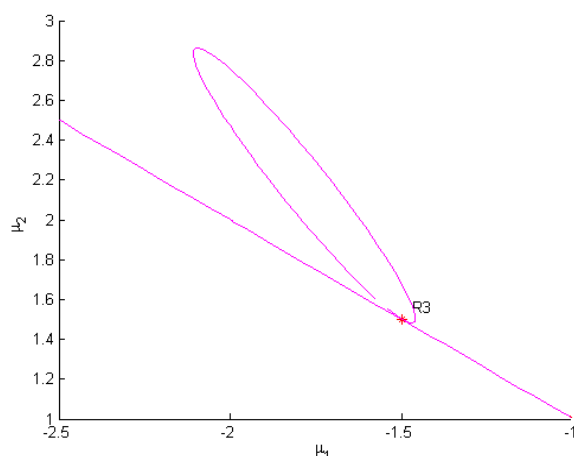
شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی انشعاب فولد محاسبه شده توسط متکونت ام.



شکل ۸ (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی PD^2 شروع شده از نقطه R_2 .



شکل ۷ (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی LP^4 شروع شده از نقطه R_4 .



شکل ۹ (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی انشعاب گره زینی تکرار سوم به ازای $\mu_4 = 1/5$.

بحرانی $Re(c_1) = -4/929261 \times 10^{-1}$ توسط متکونت ام تشخیص داده می شود.

۳. انشعاب تشدید ۱:۲ در نقطه $(x_1, x_2) = (0/000000, 2/828427)$ به ازای پارامترهای $\mu_1 = 2/000000$ و $\mu_2 = 2/000000$ با ضریب بحرانی $[c, d] = [1/695467 \times 10^1, -3/913350 \times 10^1]$ توسط متکونت ام گزارش داده می شود.

۱. انشعاب تشدید ۱:۴ در نقطه $(x_1, x_2) = (0/000000, 2/000000)$ به ازای پارامترهای $\mu_1 = 1/000000$ و $\mu_2 = -1/000000$ با ضریب بحرانی $A = -9/288286 \times 10^{-1} + 1/073342i$ توسط متکونت ام تشخیص داده می شود. چون ضریب A ، در رابطه $|A| > 1$ صدق می کند، بنابراین دو سیکل متناوب مرتبه ۴ از نگاشت منشعب می شوند. منحنی های LP^4 محاسبه شده در شکل ۷ آورده شده اند.

۲. انشعاب تشدید ۱:۳ در نقطه $(x_1, x_2) = (0/000000, 2/449490)$ به ازای پارامترهای $\mu_1 = 1/500000$ و $\mu_2 = -1/500000$ با ضریب

مراجع

- AUTO-07p, "Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations", Concordia University, Version 0.9.1 (2012).
12. A Dhooge, W Govaerts, Yu A Kuznetsov, H G E Meijer, and B Sautois, *Math. Com. Mod. Dyn. Systems.* **14** (2008) 147.
 13. R Mazrooei-Sebdani, Z Eskandari, and H G E Meijer, "Numerical Bifurcation Analysis of Double +1 Multiplier in Z_3 -Symmetric Maps", TW memorandum 2058, Department of Mathematics, University of Twente (2017).
 14. M Golubitsky, I Stewart, and D G Schaeffer, "Singularities and Groups in Bifurcation Theory", Springer-Verlag, Berlin. (1980).
 15. W Govarets, "Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria", Society for Industrial and Applied Mathematics (2000).
 ۱۶. م ر سرکرده‌ای، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۵، ۲، (۱۳۸۰) ۲۷۶.
 16. M R Sarkardei, *Iranian Journal of Physics Research*, **2**, 5 (2001) 74.
 1. K A Cliffe, A Spence, and S J Tavener, *Acta Numer.* **17** (2008) 39.
 2. H A Dijkstra *et al.*, *Commun. Comput. Phys.* **15** (2014) 1.
 3. J D Crawford and E Knobloch, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23** (1991) 341.
 4. F Marques, F Mellibovsky, and A Meseguer, *Physical Review E* **88** (2013) 013006.
 5. F Mellibovski and B Eckhardt, *J. Fluid Mechanics* **709** (2012) 149.
 6. H Meijer, "Codimension 2 Bifurcations of Iterated Maps", Utrecht University (2006).
 7. Y Kuznetsov, "Elements of Applied Bifurcation Theory", Springer-Verlag, Berlin (1998).
 8. Y Kuznetsov, H Meijer, and L V Veen, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **7** (2004) 2253.
 9. Y Kuznetsov and H Meijer, *SIAM. J. Sci. Comput.* **26** (2005) 1932.
 10. W Govarets, R Khoshsiar Ghaziani, Y Kuznetsov, and H Meijer, *SIAM. J. Sci. Comput.* **29** (2007) 2644.
 11. E J Doedel, B E Oldeman, A R Champneys, F Dercole, T F Fairgrieve, Y Kuznetsov, R C Paffenroth, B Sandsted, X J Wang, and C H Zhang,