مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۸، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۷

پاشندگی امواج مغناطوآکوستیکی در یک پلاسمای کوانتومی

احمد مهرآمیز و الهام شعبان سلیمانی

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین

پست الکترونیکی: mehramiz@sci.ikiu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۵/۳۰ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۶/۰۹/۲۷)

چکیده

در پژوهش حاضر به بررسی ویژگی‌های پاشندگی امواج مغناطوآکوستیکی در پلاسما و در حضور اثرات کوانتومی پرداخته می‌شود. بدین‌منظور، مجموعه‌ای شامل معادلات سیال کوانتومی و معادلات ماکسول به کار گرفته می‌شوند تا نوعی رابطهٔ پاشندگی تعمیم یافته به دست آید. نتایج تحلیلی ما گویای تغییر رابطهٔ پاشندگی توسط تصحیحات کوانتومی است. علاوه بر این، برآوردهای عددی نشان می‌دهند که تصحیحات مرتبط با آثار گرمایی نسبت به اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی از اهمیت بیشتری برخوردارند. به علاوه، نتایج نشان می‌دهند که آثار کوانتومی به جز در حد طول موج‌های کوتاه در مقایسه با آثار حرارتی و مغناطیسی قابل چشم‌پوشی هستند. سرانجام، برخی حالت‌های ویژه و نتایج آنها نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: پلاسمای کوانتومی، موج مغناطو آکوستیکی

۱. مقدمه

یک رده از امواج بنیادی پلاسما، نوسان‌های یونی با بسامد کم در حضور میدان مغناطیسی است. این نوسانات، امواجی همچون مغناطوآکوستیکی و آلفون را شامل می‌شوند و بخشی موسوم به ناحیه مگنتوهیدرودینامیک در نمودار امواج پلاسمایی را به وجود می‌آورند. در حالت کلی‌تر به آنها امواج الکترومغناطیسی یونی نیز گفته می شود [۱- ۳]. روابط پاشندگی مربوط به این امواج جفت شدگی بین امواج آکوستیکی و امواج تراکمی (ناشی از سوق مربوط به میدان الکتریکی) را به خوبی نشان می‌دهند. وجود این امواج در محیط‌های پلاسمایی گوناگون به اثبات رسیده و تحت رژیم‌های مختلف فیزیکی مورد پژوهش قرار گرفته است [۴-۶]. در پژوهش‌هایی که تاکنون در زمینهٔ مطالعه امواج گفته شده انجام گرفته است، محیط پلاسما و اجزای تشکیل دهندهٔ آن بیشتر کلاسیکی و یا نسبیتی در نظر گرفته شده‌اند [۶- ۷]. از سوی دیگر بیش از یک دهه است که در نظر گرفتن جنبه‌های کوانتومی برای اجزاء تشکیل دهندهٔ پلاسما، پدیدار شدن ویژگی‌های جدیدی را برای برخی از محیط‌های پلاسمایی و

امواج و ناپایداری‌های موجود در آنها نمایان کرده است [۸–۱۴]. در پژوهش حاضر، نخست با در نظر گرفتن جنبه‌های کوانتومی برای یک محیط پلاسمای گرم و مغناطیسی، به بررسی مجموعه معادلات حاکم بر محیط پرداخته می‌شود. سپس، ضمن به دست آوردن نوعی رابطهٔ پاشندگی تعمیم یافته، انتشار امواج مغناطو آکوستیکی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در پایان پس از انجام برآوردهای عددی و بررسی حالت‌های خاص، نتیجه‌گیری پژوهش ارائه می‌شود.

۲. فرضیات و محاسبات تحلیلی

فرض می‌شود که محیط پلاسما متشکل از الکترون‌ها ویون‌های تک بار یونیده است و معادلات حاکم بر اجزا محیط، متأثر از نیروهای مرتبط با جنبه‌های گرمایی، کوانتومی و الکترومغناطیسی هستند. علاوه بر این، فرض می‌شود که محیط پلاسما تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_o$ (هم راستا با محور z) قراردارد. به منظور تحلیل رفتار الکترودینامیکی محیط و امواج مورد نظر، نخست دو معادلهٔ زیر را یادآوری می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right)-\nabla^{2}\vec{E}=\vec{\nabla}\times\dot{\vec{B}}, \tag{۱}$$

$$\varepsilon_o c^{2}\left(\vec{\nabla}\times\dot{\vec{B}}\right)=\sum_{\alpha=i,e}\dot{\vec{J}}_\alpha+\varepsilon_o\ddot{\vec{E}}, \tag{۲}$$

این دو معادله به ترتیب نمایانگر تاو معادلهٔ سوم ماکسول (قانون فاراده) و مشتق زمانی معادلهٔ چهارم ماکسول (قانون آمپر تعمیم یافته) هستند. در عبارت های فوق، $\vec{J}_\alpha$ نشانگر چگالی جریان ناشی از حامل‌های بار موجود در محیط است و بقیه کمیت‌ها معنی متعارف خود را دارند. با در نظر گرفتن تبدیل فوریه برای عملگرهای زمانی و فضایی، ترکیب دو معادلهٔ فوق و اندکی عملیات ریاضی، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$-\vec{k}\left(\vec{k}.\vec{E}\right)+k^{2}\vec{E}=\frac{i\omega}{\varepsilon_o c^{2}}\sum_{\alpha=i,e}\vec{J}_\alpha+\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\vec{E}, \tag{۳}$$

با توجه به عرضی بودن امواج الکترومغناطیسی یونی، معادلهٔ بالا به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\left(\omega^{2}-k^{2}c^{2}\right)\vec{E}=\frac{-i\omega}{\varepsilon_o}\vec{J}, \tag{۴}$$

با لحاظ کردن شکل صریح چگالی جریان به صورت $\sum_{\alpha=i,e}\vec{J}_\alpha=-en_o\left(\vec{v}_e-\vec{v}_i\right)$ و با فرض اینکه میدان الکتریکی نوسانی مؤثر بر حامل‌های بار محیط، در راستای محور x باشد، رابطهٔ آخر به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\varepsilon_o\left(\omega^{2}-k^{2}c^{2}\right)E_x=-i\omega en_o\left(v_{ix}-v_{ex}\right), \tag{۵}$$

در محاسبات بعدی برای جایگذاری مؤلفه‌های سرعت یون‌ها و الکترون‌ها، از معادلهٔ اصلاح شدهٔ اویلر استفاده خواهیم کرد. فرض می‌کنیم در معادلهٔ گفته شده نیروهای مؤثر بر حرکت دو سیال یونی و الکترونی، نیروهای لورنتس، گرادیان فشار کلاسیکی و کوانتومی بوهم باشند:

$$\mathrm{m}_\alpha n_\alpha\left(\partial_t+\vec{v}_\alpha.\vec{\nabla}_\alpha\right)\vec{v}_\alpha=\vec{F}_L+\vec{F}_p+\vec{F}_Q, \tag{۶}$$

در اینجا جملات سمت راست معادله به ترتیب نشان دهندهٔ نیروی لورنتس $q_\alpha n_\alpha\left(\vec{E}+\vec{v}_\alpha\times\vec{B}\right)$، نیروی گرادیان فشار کلاسیکی $\left(-\gamma_\alpha K_B T_\alpha\vec{\nabla}n_\alpha\right)$ و نیروی کوانتومی بوهم $\frac{\hbar^{2}n_\alpha}{2m_\alpha}\vec{\nabla}\left(\frac{\nabla^{2}\sqrt{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha}}\right)$ هستند [۸].

در اینجا زیرنویس α نوع ذرات پلاسما یعنی الکترون‌ها و یون‌ها و γ نسبت گرماهای ویژه را نشان می‌دهند.

در ادامه به خطی سازی جملات موجود در معادلهٔ (۶) می‌پردازیم، بدین منظور کمیت ξ را بیانگر هر یک از کمیت‌های فیزیکی $(\vec{B},\vec{E},\vec{v}_\alpha,n_\alpha)$ در نظر می‌گیریم. کمیت فوق شامل یک بخش تعادلی ξ_o و یک بخش کوچک نوسانی ξ_1 است. با در نظر گرفتن بخش نوسانی به صورت زیر:

$$\xi_1=\bar{\xi}_1\exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{k}.\vec{r}-\omega t\right)\right], \tag{۷}$$

رابطهٔ (۶) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}m_\alpha n_{\alpha o}\left[\partial_t\right]\vec{v}_{\alpha 1}&=q_\alpha n_{\alpha o}\left\{\vec{E}_1+\vec{v}_{\alpha 1}\times\vec{B}_o\right\}\\&+\left(\gamma_\alpha K_B T_\alpha\vec{\nabla}n_{\alpha 1}\right)+\frac{\hbar^{2}n_{\alpha o}}{2m_\alpha}\vec{\nabla}\\&\left(\frac{\vec{\nabla}.\left(\frac{1}{2}n_{\alpha o}^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{n_{\alpha 1}}{n_{\alpha o}}\right)\vec{\nabla}n_{\alpha 1}\right)}{n_{\alpha o}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{n_{\alpha 1}}{n_{\alpha o}}\right)}\right),\end{aligned} \tag{۸}$$

کمیت‌های تعادلی حالت پلاسما را در غیاب نوسان بیان می‌کنند. در حالت تعادل، یکنواختی و سکون پلاسما داریم:

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla} n_{\alpha o}=\vec{v}_{\alpha o}=\vec{E}_o=o,\\&\partial_t n_{\alpha o}=\partial_t \vec{v}_{\alpha o}=o,\end{aligned} \tag{۹}$$

لازم به ذکر است برای ساده سازی جمله سوم در معادلهٔ (۸)، از بسط $(1+\varepsilon)^n$ استفاده کرده‌ایم، بنابراین با استفاده از این بسط و تساوی‌های آورده شده در رابطهٔ (۹)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}m_\alpha n_{\alpha o}\left[\partial_t\right]\vec{v}_{\alpha 1}&=q_\alpha n_{\alpha o}\left\{\vec{E}_1+\vec{v}_{\alpha 1}\times\vec{B}_o\right\}\\&-\left(\gamma_\alpha K_B T_\alpha \vec{\nabla} n_{\alpha 1}\right)\\&+\frac{\hbar^2}{4m_\alpha}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} n_{\alpha 1}\right)\right),\end{aligned} \tag{۱۰}$$

در ادامهٔ تحلیل مسئله لازم است معادلهٔ پیوستگی را نیز به کار گیریم. بر پایه فرضیات قبلی فرم خطی شده رابطه پیوستگی، شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$n_{\alpha 1}=\frac{n_{\alpha o} k v_{\alpha 1}}{\omega}, \tag{۱۱}$$

از ترکیب روابط (۱۰) و (۱۱) به همراه اندکی عملیات ریاضی خواهیم داشت:

$$-i\omega\vec{v}_{\alpha 1}=\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\vec{E}_1+\vec{v}_{\alpha 1}\times\vec{B}_o\right)+\varphi\left(\vec{k}.\vec{v}_{\alpha 1}\right)\vec{k}. \tag{۱۲}$$

در رابطهٔ اخیر کمیت φ، به صورت زیر تعریف شده است:

$$\varphi=-\frac{i}{\omega}\left[\frac{\hbar^2 k^2}{4m_\alpha^2}+\frac{\gamma_\alpha K_B T_\alpha}{m_\alpha}\right]. \tag{۱۳}$$

با در نظر گرفتن کمیت‌های برداری به صورت $\vec{E}=E_1\hat{e}_x$ ،$\vec{B}_o=B_o\hat{e}_z$ و $\vec{k}=k\hat{e}_y$، می‌توان مؤلفه‌های سرعت حامل‌های بار را به دست آورد. در چنین حالتی سوق‌های $\vec{E}\times\vec{B}_o$ در امتداد $\vec{k}$ قرار می‌گیرند، به طوری که پلاسما در طی نوسانش متراکم و منبسط می‌شود. بنابراین لازم است جملهٔ $\vec{\nabla}p$ را در معادلهٔ حرکت (برای مؤلفهٔ y) نگه داریم. بدین منظور رابطهٔ (۱۲) را می‌توان برای مؤلفه‌های x و y سرعت یون‌ها به ترتیب زیر نوشت:

$$v_{ix}=\frac{ie}{m_i\omega}\left(E_x+v_{iy}B_o\right), \tag{۱۴ـ الف}$$

$$v_{iy}=\frac{ie}{m_i\omega}\left(-v_{ix}B_o\right)+\frac{k^2}{\omega^2}\left(\frac{\gamma_i K_B T_i}{m_i}+\frac{\hbar^2 k^2}{4m_i^2}\right)v_{iy}. \tag{۱۴ـ ب}$$

همچنین با معرفی کمیت α_i به شکل زیر:

$$\alpha_i=\frac{k^2}{\omega^2}\left(\frac{\gamma_i K_B T_i}{m_i}+\frac{\hbar^2 k^2}{4m_i^2}\right), \tag{۱۵}$$

رابطهٔ (۱۴ـ ب) برابرخواهد شد با:

$$v_{iy}=\frac{-i\omega_{ci}}{\omega\left(1-\alpha_i\right)}v_{ix}. \tag{۱۶}$$

با ترکیب این معادله و معادلهٔ (۱۴– الف)، مؤلفه x سرعت یون به صورت زیر خواهد شد:

$$v_{ix}=\frac{\frac{ie}{m_i\omega}E_x}{\left(1-\frac{\frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2}}{1-\alpha_i}\right)}. \tag{۱۷}$$

به طور مشابه، مولفهٔ x سرعت الکترون نیز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v_{ex}=\frac{-\frac{ie}{m_e\omega}E_x}{\left(1-\frac{\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}}{1-\alpha_e}\right)}, \tag{۱۸}$$

که در آن تعریف زیر را به کار برده‌ایم:

$$\alpha_e=\frac{k^2}{\omega^2}\left(\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_e}+\frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2}\right). \tag{۱۹}$$

در رابطهٔ (۱۸) با فرض $(\omega \ll \omega_{ce})$، می‌توان از جمله اول مخرج کسر در برابر جملهٔ دوم صرف نظر کرد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}v_{ex}&=\frac{ie}{m_e\omega}E_x\frac{\omega^2}{\omega_{ce}^2}\left(1-\alpha_e\right)\\&=\frac{ie}{m_e\omega}\frac{\omega^2}{\omega_{ce}^2}\left(1-\frac{k^2}{\omega^2}\left(\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_e}+\frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2}\right)\right)E_x,\end{aligned} \tag{۲۰}$$

در ادامه سرعتی را بدین شکل برای محیط پلاسمایی تعریف می‌کنیم:

$$v_{qts}^2=\left(\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_e}+\frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2}\right), \tag{۲۱}$$

با توجه به فرضیاتی که بیان کرده‌ایم و اعمال تقریب های $(\omega^2 \ll k^2 v_{qts}^2, \omega \ll \omega_{ce})$ و تعریف بسامد سیکلوترونی الکترون $\omega_{ce}^2=\frac{e^2 B_o^2}{m_e^2}$، رابطهٔ (۲۰) را بدین صورت می‌توان نوشت:

$$v_{ex} = -\frac{ik^{2}}{\omega B_o^{2}}\frac{\gamma_e K_B T_e}{e}E_x - i\frac{\hbar^{2}k^{4}}{4\omega m_e e B_o^{2}}E_x, \qquad (۲۲)$$

برای انجام ساده‌تر محاسبات، می‌توان صورت و مخرج جملات سمت راست رابطهٔ بالا را در جرم یون ضرب کرد، بدین ترتیب رابطهٔ زیر به دست خواهد آمد:

$$v_{ex} = -\frac{ik^{2}}{\omega B_o^{2}}\frac{m_i}{m_i}\frac{\gamma_e K_B T_e}{e}E_x - i\frac{\hbar^{2}k^{4}m_i}{4\omega m_e m_i e B_o^{2}}E_x. \qquad (۲۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۷) و (۲۳) در معادلهٔ (۵) خواهیم داشت:

$$(\omega^{2}-k^{2}c^{2}) = \frac{-ien_o\omega}{\varepsilon_o}\left[\frac{ie}{m_i\omega}\frac{1-\alpha_i}{(1-\alpha_i-\frac{\omega_{ci}^{2}}{\omega^{2}})} + \frac{ik^{2}}{\omega B_o^{2}}m_i\gamma_e\frac{K_B T_e}{em_i} + \frac{i\hbar^{2}k^{4}m_i}{4m_e m_i\omega e B_o^{2}}\right], \qquad (۲۴)$$

معادلهٔ به دست آمده، با توجه به تعاریف سرعت آلفون ($v_A = \frac{B_o}{\sqrt{\mu_o\rho}}$)، بسامد پلاسمایی یون ($\omega_{pi}^{2} = \frac{n_o e^{2}}{m_i\varepsilon_o}$)، چگالی جرمی ($\rho = m_i n_o$)، سرعت نور و با اندکی عملیات ریاضی به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{\omega^{2}-k^{2}c^{2}\left[1+\frac{\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_e m_i}}{v_A^{2}}\right]\right\} \times\left((1-\alpha_i)-\frac{\omega_{ci}^{2}}{\omega^{2}}\right) = \omega_{pi}^{2}(1-\alpha_i), \qquad (۲۵)$$

با اندکی ضرب و تقسیم رابطهٔ اخیر را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}&\omega^{4}(1-\alpha_i)-\omega^{2}(1-\alpha_i)\\ &\times\left\{k^{2}c^{2}\left(1+\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i v_A^{2}}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_e m_i v_A^{2}}\right)+\omega_{pi}^{2}\right\}\\ &=\omega_{ci}^{2}\left[\omega^{2}-k^{2}c^{2}\left(1+\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i v_A^{2}}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_e m_i v_A^{2}}\right)\right],\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

$$\left\{\omega^{2}-k^{2}c^{2}\left[1+\frac{\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_e m_i}}{v_A^{2}}\right]\right\} \times\left((1-\alpha_i)-\frac{\omega_{ci}^{2}}{\omega^{2}}\right) = \omega_{pi}^{2}(1-\alpha_i),$$

در گام بعدی با جایگذاری عبارت معرف α_i، در رابطهٔ (۲۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\omega^{4}-\omega^{2}\left\{\omega_{ci}^{2}+k^{2}\left(\frac{\gamma_i K_B T_i}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_i^{2}}\right)\right\}\\ &-\omega^{2}\left\{k^{2}c^{2}\left(1+\frac{\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_e m_i}}{v_A^{2}}\right)+\omega_{pi}^{2}\right\}\\ &+k^{2}c^{2}\omega_{ci}^{2}\left\{1+\frac{\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_e m_i}}{v_A^{2}}\right\}\\ &+\left(k^{2}c^{2}\left[1+\frac{\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_e m_i}}{v_A^{2}}\right]+\omega_{pi}^{2}\right)\\ &\left(k^{2}\left(\frac{\gamma_i K_B T_i}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_i^{2}}\right)\right)=o,\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

به منظور کوتاه نویسی این رابطه، پارامتر های زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\beta = 1+\frac{\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_e m_i}}{v_A^{2}},\\ &\chi = k^{2}\left(\frac{\gamma_i K_B T_i}{m_i}+\frac{\hbar^{2}k^{2}}{4m_i^{2}}\right).\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

در نتیجه رابطهٔ (۲۷) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\omega^{4}-\omega^{2}(\omega_{ci}^{2}+k^{2}c^{2}\omega_{pi}^{2}+k^{2}c^{2}\beta+\chi)\\ &+k^{2}c^{2}\beta\omega_{ci}^{2}+\chi\left(k^{2}c^{2}\beta+\omega_{pi}^{2}\right)=o.\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

حل معادلهٔ فوق با در نظر گرفتن ضرایب زیر قابل انجام است:

$$\begin{aligned}&a=1,\\ &b=-(\omega_{ci}^{2}+k^{2}c^{2}\omega_{pi}^{2}+k^{2}c^{2}\beta+\chi),\\ &c=k^{2}c^{2}\beta\omega_{ci}^{2}+\chi(k^{2}c^{2}\beta+\omega_{pi}^{2}).\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

با توجه به پیچیدگی عبارت به دست آمده از تقریبی مناسب برای ساده سازی استفاده می‌کنیم. بدین منظور در مخرج جملهٔ اول سمت راست رابطهٔ (۲۴)، از عبارت $(1-\alpha_i)$ در مقایسه با جمله $\frac{\omega_{ci}^{2}}{\omega^{2}}$ صرف نظر می‌کنیم، لذا با توجه به تعریف سرعت آلفون داریم:

$$\omega^2 - k^2c^2\left[1+\frac{\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}+\frac{\hbar^2k^2}{4m_em_i}}{v_A^2}\right] = -\frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2}\omega_{pi}^2(1-\alpha_i), \quad (31)$$

با مد نظر قرار دادن معادلهٔ (۱۵)، رابطه اخیر به معادلهٔ زیر تبدیل می‌یابد:

$$\left\{\omega^2 - k^2c^2\left[1+\frac{\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}+\frac{\hbar^2k^2}{4m_em_i}}{v_A^2}\right]\right\} = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}\left(\omega^2 - k^2\left[\frac{\gamma_i K_B T_i}{m_i}+\frac{\hbar^2k^2}{4m_i^2}\right]\right). \quad (32)$$

به منظور ارائهٔ شکل بهتری از معادلهٔ فوق، دو تساوی و تعریف زیر را به کار می‌بریم:

$$\frac{c^2}{v_A^2} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}, \quad (33)$$

$$v_s^2 = \frac{\gamma_i K_B T_i}{m_i}+\frac{\gamma_e K_B T_e}{m_i}. \quad (34)$$

همانگونه که می دانیم رابطهٔ آخر معرف سرعت یون آکوستیکی است. سرانجام رابطه (۳۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\omega^2(c^2+v_A^2) = k^2c^2\left(v_s^2+v_A^2+\frac{\hbar^2k^2}{4m_i^2}+\frac{\hbar^2k^2}{4m_em_i}\right). \quad (35)$$

عبارت به دست آمده، بیانگر رابطهٔ پاشندگی در پلاسما است که در یک حالت کلی با احتساب آثار کوانتومی، حرارتی و میدان مغناطیسی به دست آمده است. دو جملهٔ آخر سمت راست معادله به خوبی تأثیر ناشی از پتانسیل کوانتومی بوهم بر پاشندگی امواج در محیط پلاسمارا نشان می‌دهند. علاوه بر این، در بخش بعدی نشان داده می‌شود که حالت‌های ویژهٔ این معادله، روابط و نتایج شناخته شده ای را در بر خواهد داشت.

۳. بحث و بررسی حالت‌های ویژه

در این بخش به منظور داشتن درک بهتری از نتایج به دست آمده، به بررسی حالت های ویژه در معادلهٔ (۳۵) می‌پردازیم.

الف) حالت پلاسمای سرد کوانتومی و مغناطیسی (در غیاب آثار دمایی یعنی؛ $T_i, T_e \to o$)، در این حالت معادلهٔ (۳۵) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\omega^2\left(c^2+v_A^2\right) = k^2c^2\left(v_A^2+\frac{\hbar^2k^2}{4m_i^2}+\frac{\hbar^2k^2}{4m_em_i}\right). \quad (36)$$

می‌توان این رابطه را معرف موج آلفون تغییر شکل یافته و متأثر از آثار کوانتومی نامید.

ب) در غیاب آثار کوانتومی (یعنی؛ $\hbar \to o$)، رابطهٔ (۳۵) تبدیل می‌شود به:

$$\omega^2(c^2+v_A^2) = k^2c^2\left(v_s^2+v_A^2\right). \quad (37)$$

همان طور که می‌دانیم این عبارت، رابطهٔ مربوط به یک موج مغناطوآکوستیکی غیرپاشنده است که در امتداد عمود بر میدان مغناطیسی در محیط کلاسیکی منتشر می‌شود [۱۵- ۱۶]. سرعت فاز این مد مگنتوسونیک از سرعت آلفون بزرگ‌تر است؛ به همین دلیل، معمولا آن را موج هیدرومغناطیسی "تند" می‌نامند.

پ) در غیاب آثار کوانتومی و مغناطیسی (یعنی؛ $\hbar \to o$ و $B_o \to o$)، رابطهٔ پاشندگی (۳۵) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\omega^2 = k^2v_s^2. \quad (38)$$

که در واقع رابطهٔ پاشندگی موج آکوستیکی یونی است، به بیان دیگر در این حالت موج مغناطوآکوستیکی به یک موج آکوستیکی معمولی تبدیل می‌شود.

از نتایج و بحثی که تا اینجا ارائه شد، آثار در نظر گرفتن جنبه‌های گرمایی، کوانتومی و میدان مغناطیسی بر رابطهٔ پاشندگی و به‌ویژه تأثیر ملاحظات کوانتومی بر پاشندگی امواج آشکار است، لیکن مجدداً به منظور داشتن درک بهتری از نتایج تحلیلی به دست آمده، مناسب است برآوردهای عددی انجام گیرد.

۴. بحث و بررسی عددی

در این بخش برای جملات مختلف موجود در معادلات (۳۵) تا (۳۸) برآوردهایی عددی انجام می‌دهیم. بدین منظور و در صورت انجام محاسبات عددی برای یک محیط فیزیکی مانند: ابر بین ستاره‌ای[1] (ابر مولکولی) [۱۷- ۱۸]، با داده‌های متعارفی به شکل:

$$\left(B_o = 10\,\mu G = 10^{-10}\,T, \mathrm{n}_{io} = \mathrm{n}_{eo} = 2\times10^{3}\,m^{-3}, T = 10\,K\right)$$

۱. Interstellar cloud (molecular cloud)

معلوم می‌شود که گرچه محیط مورد نظر چندان گرم نیست ولی مقدار سرعت یون آکوستیکی، بیشتر از مقدار سایر جملات است. لذا آثار حرارتی در دمای کم نیز قابل ملاحظه است.

برآوردی مشابه برای یک محیط اختر فیزیکی دیگر [۱۹] با مقادیر متعارفی به صورت: $\left(B_o = ۱\, T, n_o = ۱۰^{۳۳}\, m^{-۳}, T = ۱۰^{۵}\, K\right)$ نیز، نشان می‌دهد که اثرات حرارتی نسبت به اثرات مغناطیسی و کوانتومی، چشمگیرتر است. در ضمن تأثیر جملات کوانتومی نیز تنها در حد طول موج‌های کوتاه، قابل مقایسه با دیگر آثار خواهند بود.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله انتشار امواج مغناطو آکوستیکی در محیط پلاسمای کوانتومی بررسی شد. بدین منظور مجموعه‌ای از معادلات سیال کوانتومی (شامل معادلات ماکسول و معادلات سیالی حرکت و پیوستگی) به کار گرفته شدند تا رابطهٔ پاشندگی تعمیم یافته‌ای برای امواج مورد نظر به دست آورده شود. در رابطهٔ تحلیلی به دست آمده معادلهٔ (۳۵) تأثیر عوامل مختلف بر رابطهٔ پاشندگی امواج به ویژه پاشندگی ناشی از تصحیح کوانتومی به خوبی نمایان شد. در ادامه، بررسی حالت‌های حدی نشان داد که رابطهٔ تعمیم یافتهٔ حاصل در حالت‌های ویژه، به ترتیب معرف موج تغییر یافتهٔ آلفون کوانتومی، موج تغییر یافتهٔ آلفون کلاسیکی و موج آکوستیکی معمولی خواهد بود. علاوه بر این، برآوردهای عددی بر روی جملات موجود در روابط پاشندگی نشان می‌دهند که آثار کوانتومی در حد طول موج‌های کوتاه قابل ملاحظه خواهند بود.

مراجع

1. D G Swanson, "*Plasma Waves*", Academic Press (2003).
2. S E Braginskii, *Sov. Phys*. **2** (1957) 345.
3. N A Krall and A W Trivelpiece, "*Principles of Plasma Physics*", Mcgraw- Hill New York (1973).
4. L Stenflo, and N L Tsintsadze, *Astrophys. Space Sci.* **64** (1979) 513.
5. L Stenflo, *Physica Scripta* **14** (1976) 320.
6. G S S Sweeney and P Stewart, *Astron. Astrophys.* **66** (1978) 139.
7. M Marklund and P K Shukla, *Phys. Plasmas* **13** (2006) 094503.
8. F Haas, *Phys. Plasmas*. **12** (2005) 062117.
9. B Shokri and A A Rukhadze, *Phys. Plasmas*. **6** (1999) 4467.
10. M Shahmansouri and B Farokhi, *Journal of Science* (*JSIAU*) **19** 71 (2009) 1.
11. L Ghderipoor and A Mehramiz, *Phys. Plasmas* **19** (2012) 122110.
12. M R Rouhani, A Akbarian, and Z Mohammadi, *Iranian Journal of Physics Research* **16** 3 (2016) 91.

۱۲. م ر روحانی، ا اکبریان و ز محمدی، *مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران* ۱۶ ۳ (۱۳۹۵) ۹۱.

13. P K Shukla, *Phys. Lett. A* **369** (2007) 312.
14. Ren Haijun, Wu Zhengwei, Cao Jinato, K Chu Paul, *Phys. Lett. A* **372** (2008) 26763.
15. F F Chen, "*Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*", **1** springer Los Angeles (1984).

۱۶. ف ا چن، (مترجم: ص سبحانیان)، "*مقدمه‌ای بر فیزیک پلاسما و همجوشی کنترل شده* "، انتشارات دانشگاه تبریز (۱۳۸۱).

17. P K Shukla and S Ali, *Phys. Plasmas* **13** (2006) 082101.
18. A A Mamun, and P K Shukla, *Phys. Plasmas* **8** (2001) 3513.
19. Wu Zhengwei, Ren Haijun, Cao Jintao, and K Chu Paul, *Phys. Plasmas* **15** (2008) 082103.