

بلورهای مایع دربردارنده نانو ذرات و نیروهای القایی

فهیمة کریمی پور حدادان

دانشکده فیزیک، دانشگاه خوارزمی، تهران

پست الکترونیکی: f.karimi@khu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۲۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۰۹/۲۸)

چکیده

ضمن معرفی کوتاهی از بلورهای مایع نماتیک و برهم‌کنش آنها با میدان‌های خارجی، به اثر یک میدان خارجی بی‌نظم که نقش ناپایدار کننده را روی نظم جهتی مولکولی یک تیغه نماتیک داشته باشد می‌پردازیم. ما اثر بی‌نظمی در میدان اعمالی را روی نیروی شبه کازیمیر، که به دلیل افت و خیزهای حرارتی بر دیواره‌های تیغه نماتیک القا می‌شود، بررسی می‌کنیم. نشان داده می‌شود که یک بی‌نظمی از نوع گرماده شدت مؤثر برهم‌کنش را به طور ویژه‌ای افزایش می‌دهد که این به نوبه در تعدیل نیروی القایی نقش آفرین است.

واژه‌های کلیدی: کریستال مایع، اثر کازیمیر، بی‌نظمی

۱. مقدمه

با اندازه واحد، توصیف می‌شود و از آنجایی که فقط راستا در این فاز از ماده نظم موجود را توصیف می‌کند n و $-n$ معادل هستند. بردار جهت نما یک میدان برداری است و در هر نقطه از فضا، r ، می‌تواند از راستای میانگین n انحراف‌های کوچکی داشته باشد. این افت و خیزهای کوچک را در ادامه با $\delta n(r)$ نمایش می‌دهیم به طوری که $n = n_0 + \delta n(r)$ ؛ و از آنجایی که n یک بردار یکه است $\delta n(r)$ بر n_0 عمود است. بلورهای مایع موادی کشسان هستند و در آنها تابع دو نقطه‌ای همبستگی پارامتر نظم در مجاورت گذار فاز از حالت همسانگرد، که در آن نظم جهتی از بین رفته است، به فاز نماتیک به صورت $(\frac{kT}{Kr})e^{-r/\xi}$ با فاصله بین دو نقطه r افت می‌کند [۱]. در اینجا K

بلورهای مایع [۱] مواد نرم و همبسته‌ای هستند که عمدتاً توسط نظم‌های جهتی (و در بعضی از موارد همچنین با نظم مکانی) واحدهای سازنده شان دسته‌بندی می‌شوند. در ساده‌ترین انواع این مواد که به عنوان بلورهای مایع نماتیک^۱ شناخته شده‌اند، مولکول‌های سازنده که عمدتاً دارای شکلی ناهمسانگرد، به عنوان نمونه همچون میله، هستند در محدوده‌های دمایی خاصی محور بلند آنها هم راستا می‌شوند. در این فاز هیچ نظم مکانی برای موقعیت مولکول‌ها وجود ندارد و از این لحاظ همچون مایعات هستند. نظم جهتی در این حالت با بردار جهت نما^۲ n ،

۱. Nematic

۲. director

در بلورهای مایع افت و خیزهای حرارتی که علی الاصول بزرگ نیز هستند [۱] نه تنها از نقطه نظر اپتیکی که منجر به کاربردهایی در زمینه نمایشگرها می شوند حایز اهمیت اند بلکه از جنبه های نظری نیز شایان توجه اند. به عنوان نمونه انرژی آزاد افت و خیزهای حرارتی میدان جهت نما در یک تیغه نماتیک، که در آن بلور مایع نماتیک بین دو سطح موازی به فاصله d از یکدیگر محصور شده است، وابستگی غیر بدیهی به d پیدا می کند. بدین معنی که علاوه بر انرژی های سطحی و حجمی که علی الاصول نامتناهی اند یک سهم متناهی باقی می ماند که بسته به شرایط مرزی و همچنین ویژگی های حجمی ماده رفتاری متمایز از سایر سهم ها، منجمله انرژی سطحی که مستقل از d است و انرژی حجمی که متناسب با d است، دارد [۳-۶]. این اثر [۷-۱۰] که به اثر شبه کازیمیر معروف شده است و در واقع مشابه حرارتی اثر افت و خیزهای کوانتومی خلأ [۱۱] است، ابتدا در محاسبه انرژی نقطه صفر امواج الکترو مغناطیس در خلأ بین دو سطح مسطح موازی آینه ای توسط کازیمیر پیشگویی شد. بنابراین مشابه نیروی کازیمیر که نیروی جاذب بین دو ورقه نارسا است که وقتی در فاصله نزدیک از یکدیگر قرار می گیرند، تغییر انرژی آزاد افت و خیزهای حرارتی نظم جهتی در نماتیک با فاصله منجر به نیرو می شود که به آن نیروی القا شده توسط افت و خیزها نیز گفته می شود [۵، ۶].

از نقطه نظر ابعادی نیروی f بین دو سطح مسطح آینه ای به مساحت A و به فاصله d از یکدیگر در خلأ به صورت $f/A \sim hc/d^4$ داده می شود که در آن h ثابت پلانک و c سرعت نور می باشد. این نیرو که بعد از گذشت دهه ها [۱۲] از پیشگویی نظری آن مورد اندازه گیری های دقیق قرار گرفت با دقت بالا در توافق با برآورد نظری آن است [۱۳، ۱۴]. افت و خیزهای حرارتی نظم بلند برد جهتی نماتیک به طور مشابه صرف نظر از ضرایب عددی منجر به نیروی $f/A \sim kT/d^3$ می شوند. انرژی حرارتی، kT ، در دمای اتاق از مرتبه $10^{-21} J$ است و این به فشاری از مرتبه بزرگی $10^{-3} Pa$ در فاصله $1 \mu m$ صفحه ها از یکدیگر منجر می شود.

برای بهره وری این نیرو در جنبه های عملی و کاربردی از

ثابت الاستیک و kT انرژی حرارتی است که در آن k ثابت بولتزمن و T دما است. طول همبستگی ξ ، که مقیاس طولی است و بزرگی نواحی حاصل از هسته زایی فاز نماتیک را نشان می دهد، در فاز نماتیک به سمت بی نهایت میل می کند که مبین این نکته است که محیط کاملاً همبسته است. بلورهای مایع نماتیک در واقع سه ثابت الاستیک K_1 ، K_2 ، K_3 دارند که به ترتیب میزان سختی اعوجاج های پهن شدگی، خمیدگی، و پیچش در آرایش مولکول ها را نشان می دهند. این ثابت ها از مرتبه $10^{-11} N$ هستند و تابعی انرژی آزاد تغییرات کوچک میدان جهت نما توسط چگالی انرژی آزاد فرانک داده می شود [۱]:

$$f_b[n(r)] = \frac{1}{2} [K_1 (\nabla \cdot n)^2 + K_2 (n \cdot \nabla \times n)^2 + K_3 (n \times \nabla \times n)^2]. \quad (1)$$

مولکول های بلور مایع عمدتاً توسط اثرات سطحی منظم می شوند [۱]. مولکول ها در مجاورت سطح بسته به نوع آماده سازی آن یا به طور عمود بر سطح و یا به صورت تخت نسبت به سطح قرار می گیرند. انرژی سطحی را می توان تا مرتبه دو از میدان به صورت انتگرال زیر روی سطح S نوشت [۲]:

$$F_s = -\frac{W}{2} \int_S dS (n \cdot e)^2, \quad (2)$$

که در آن W انرژی دوخته شدگی^۱ بر واحد سطح و e ، محور آسان، همان جهت مرجحی است که توسط سطح به مولکول ها دیکته شده است. علاوه بر میدان های اعمالی توسط سطوح در بردارنده نماتیک، میدان های الکتریکی و مغناطیسی نیز در یکسو سازی مولکول های بلورهای مایع و گذارهای ساختاری مؤثرند. به عنوان یک ماده ناهمسانگرد پا سخ نماتیک به میدان های اعمالی ناهمسانگرد است. به عنوان مثال، اگر ناهمسانگردی (دیامغناطیسی) $\chi_a = \chi_{||} - \chi_{\perp}$ که در آن $\chi_{||}$ پاسخ دهی مغناطیسی در راستای محور بلند مولکول ها و $\chi_{\perp}$ پاسخ دهی مغناطیسی در راستای عمود بر محور است، مثبت باشد، میدان اعمالی باعث می شود که بردار جهت نما در راستای میدان قرار گیرد و در غیر این صورت برای $\chi_a < 0$ میدان سعی می کند که n را در امتداد عمود بر خود قرار دهد [۱].

۱. anchoring energy

ذرات میله مانند پردازیم، که ابعادشان نیز از ابعاد مولکول‌های میزبان بزرگ‌تر باشند و در نتیجه بتوانند موضعی برای دوخته شدگی و در نتیجه برهم‌کنش با مولکول‌های بلور مایع فراهم کنند. در بخش ۲ بعد از معرفی گام به گام سامانه و رهیافت لازم، به محاسبه انرژی آزاد n در حضور یک میدان دوخته شدگی بی نظم، که متوسط آن به تقویت افت و خیزهای حرارتی می‌انجامد، می‌پردازیم. سپس در تقریب نقطه زینی، که یک شدت برهم‌کنشی مؤثر به ما می‌دهد، نیروی شبه کازیمیر جهان شمول [۱۷] در بخش ۳ حاصل می‌شود که ما تأثیر واریانس در بی نظمی را در آن مطالعه می‌کنیم. و سرانجام در بخش ۴ به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

۲. انرژی آزاد

حال به این پردازیم که چگونه انرژی آزاد نماتیک محصور شده بین دو دیواره را محاسبه کنیم. وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن مولکول‌های بلور مایع به طور میانگین به صورت عمود بر سطح‌های دربردارنده بلور مایع، که دو سطح تخت هستند و موازی یکدیگر قرار گرفته‌اند، منظم شده باشند. این محیط را با یک میدان برداری $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ توصیف می‌کنیم و مطابق با نظریه پیوستگی فرانک [۱]، هامیلتونین سامانه که تابعی انرژی آزاد فرانک است، را برای اعوجاج‌های کوچک حرارتی حول جهت میانگین میدان تا مرتبه دو می‌نویسیم. فرض می‌کنیم که دیواره‌ها به ترتیب در $z=0, d$ یک دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z) قرار گرفته باشند و اگر میانگین بردار جهت نما $\mathbf{n}_0$ در راستای z باشد، سپس افت و خیزهای کوچک میدان با $\delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (n_x, n_y, 0)$ داده می‌شوند و در نتیجه بردار یکجهت نما عبارت است از $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (n_x, n_y, \sqrt{1-n_x^2-n_y^2})$ که در آن $\mathbf{r} = (x, y, z)$. حال تابعی انرژی آزاد فرانک (رابطه (۱)) برای مؤلفه های n_x و n_y تا مرتبه ۲ و در تقریب تک ثابتی، که در آن $K_1 = K_2 = K_3 = K$ است، در حجم V می‌شود:

$$F_b[\mathbf{n}(\mathbf{r})] = \frac{K}{2} \left[\int_V dV [(\nabla n_x)^2 + (\nabla n_y)^2] \right], \quad (3)$$

از طرفی دیگر فرض می‌کنیم که مولکول‌ها بر روی دو سطح

جمله ساختن موتورهای مکانیکی و یا بهتر نانو ماشین‌ها [۱۵]، [۱۶] خوب است که شناخت بهتری نسبت به خواص این نیرو در وضعیت‌هایی که دارای مشخصه‌های ویژه‌ای هستند، که البته مستقیماً در نیرو نقش ایفا می‌کنند، پیدا کنیم. این مشخصه‌ها می‌توانند هم در حجم بلور مایع و یا هم در برهم‌کنش‌های سطحی سطوح محصورکننده با بلور مایع وارد شوند، زیرا در اثر کازیمیر همبستگی‌های حجمی و شرایط مرزی روی میدان ویژگی‌های نیرو را به یکتایی تعیین می‌کنند [۱۷، ۱۸]. افت و خیزهای در حجم را می‌توان با برهم‌کنش میدان‌های اعمالی خارجی با بلور مایع از جمله میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی دستخوش تغییر کرد [۱]. همچنان که پیشتر گفته شد به دلیل ناهمسانگردی محیط ویژگی‌های فیزیکی در دو راستای متفاوت، که یکی راستای بردار جهت نما است و دیگری عمود بر آن، متمایز هستند. میدان‌های اعمالی، بسته به شرایط نماتیک و جهت میدان اعمال شده، یا می‌توانند موجب پایداری ساختار میدان برداری $\mathbf{n}$ و در نتیجه سرکوب افت و خیزهای حرارتی آن شوند، و یا از طرفی دیگر می‌توانند منجر به ناپایداری الگوی آرایشی میدان برداری جهت نما و در نتیجه گذار ساختاری شوند، که این به نوبه می‌تواند افت و خیزها را تقویت کند. علاوه بر این، مطالعات نشان داده‌اند که بلورهای مایع نماتیک می‌توانند نانو لوله‌های کربن را هم راستا کنند [۱۹-۲۱]. نانو لوله‌ها، بسته به شرایط، یا در امتداد بردار $\mathbf{n}$ و یا در امتداد عمود بر $\mathbf{n}$ هم راستا می‌شوند. بنابراین با معرفی کردن ذرات کلوییدی در حجم بلور مایع می‌توان یک انرژی برای دوخته شدگی مولکول‌های نماتیک بر سطح ذرات کلوییدی فراهم کرد که این میدان می‌تواند افت و خیزهای حرارتی را متأثر سازد.

مواد ترکیبی از جمله مخلوطی از ذرات کلوییدی پخش شده در بلور مایع حایز اهمیت‌اند، زیرا از ویژگی‌های خاصی که فراهم می‌کنند می‌توان در بهره‌وری بهتر از آنها استفاده کرد. به‌عنوان مثال نانو لوله‌های کربن در بلورهای کاربردهای الکترواپتیکی این مواد را بهینه می‌سازند [۲۲]. این مواد پیچیده تا به امروز مورد مطالعه وسیعی قرار گرفته‌اند [۲۳، ۲۴] و ما در اینجا قصدمان این است که به اثر کازیمیر بلور مایعی در حضور

میانگین $W_0 > 0$ با یک احتمال گاوسی $P[W(\mathbf{r})] = Ce^{-[dr(W(\mathbf{r})-W_0)]^2/2g}$ توزیع شده باشند که در آن g واریانس و C ضریب باز بهنجارش است [۲۷، ۲۸]. در ضمن بی نظمی در میدان $W(\mathbf{r})$ را نیز از نوع گرما زده^۱ در نظر می گیریم.

تابع پارش سامانه یک انتگرال تابعی روی میدان جهت نما با وزنی است که توسط تابع توزیع بولتزمن داده می شود. حال این تابع یک تابعی از کمیت کاتوره ای $W(\mathbf{r})$ نیز هست که بایستی علی الاصول روی تمامی مقادیر آن با توجه به وزن گاوسی داده شده انتگرال گیری شود [۲۷، ۲۸]. بنابراین میانگین تابع پارش $Z[W(\mathbf{r})]$ می شود:

$$\langle Z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} DW(\mathbf{r}) P[W(\mathbf{r})] Z[W(\mathbf{r})], \quad (5)$$

که در آن $\int DW(\mathbf{r})$ در نمایش فضای شبکه ای عبارت است از $\prod_i \int dW(\mathbf{r}_i) / \sqrt{2\pi}$. مشابه انتگرال مسیر در مکانیک کوانتمی، تابع پارش مؤلفه های تبهگن میدان افت و خیزی n_x و n_y به تفکیک توسط انتگرال تابعی زیر داده می شود [۱۷، ۳۰].

$$Z^{1/2}[W(\mathbf{r})] = \int_{(n(x,0)=0,0)}^{(n(x,d)=0,d)} Dn(x,z) e^{-\beta F[n(x,z)]}, \quad (6)$$

که در آن کران های بالا و پایین انتگرال تابعی به ترتیب شرایط مرزی حاکم بر روی میدان n در $z=0, d$ هستند، $\beta = 1/(kT)$ و $F[n]$ با توجه به روابط (۳) و (۴)، صرف نظر از یک مقدار ثابت، عبارت است از:

$$F[n(x,z)] = \frac{K}{\gamma} \int_V dV \left[(\nabla n)^2 - \frac{W(\mathbf{r})}{K} n^2 \right], \quad (7)$$

علامت منفی در رابطه بالا دربردارنده این نکته است که ما در واقع با یک میدان برهم کنشی ناپایدار کننده آرایش بردار جهت نما مواجه هستیم. این ناپایداری به نوبه مؤلفه جدیدی را در اثر کازیمیر به وجود می آورد [۱۷] که در اینجا اثر بی نظمی در میدان ناپایدار کننده در نیروی کازیمیر بررسی می شود. ما رهیافت ارائه شده در مرجع [۲۵] (و مراجع پیشین [۲۶، ۳۰]) را دنبال می کنیم که در آنجا [۲۵] جهت مرجح برای بردار جهت نما، بر خلاف اینجا، در امتداد ذرات می بود و در نتیجه میانگین میدان دوخته شدگی به پایداری آرایش یکنواخت بردار جهت نما کمک می کرد.

دیواره های خارجی به طور محکم عمودی قرار گرفته باشند، که اصطلاحاً به آن دوخته شدگی عمودی قوی گفته می شود. در این صورت افت و خیزهای حرارتی، δn ، بر روی هر دو سطح صفر می شوند، یعنی $n_i(\mathbf{x}, 0) = n_i(\mathbf{x}, d) = 0$ که در آن $\mathbf{x} = (x, y)$ و $i = x, y$.

حال فرض می کنیم که ذرات میله ای شکلی نظیر نانو لوله های کربن با توزیع مکانی کاتوره ای با چگالی حجمی $\rho(\mathbf{r})$ در سرتاسر محیط پخش شده باشند. بسته به شرایط موجود آزمایشگاهی، از جمله نسبت طول نانو لوله ها به طول برون یابی مرتبط با انرژی برهم کنشی [۲۱]، محور بلند این ذرات همچنان که در قبل گفته شد یا به صورت موازی و یا عمود بر بردار جهت نما هم راستا می شوند [۲۰]. ما فرض می کنیم که یک درجه ای از بی نظمی جهتی در ساختار جهت مند نانو لوله ها وجود داشته باشد [۲۵]. اینچنین که محور بلند ذرات نه تمام آنها بلکه میانگین آنها عمود بر سطوح در بردارنده نماتیک قرار گرفته باشند. سپس شرایطی را در نظر می گیریم که مولکول های نماتیک ترجیح می دهند که در امتداد عمود بر محور بلند ذرات قرار گیرند. در این صورت اگر برهم کنش مولکول های نماتیک با سطوح خارجی قوی تر از برهم کنش آنها با سطوح ذرات کلوییدی باشد انتظار بر آن است که میانگین میدان برداری نماتیک، n_0 برای فواصل به اندازه کافی کوچک همچنان یکنواخت در امتداد $\mathbf{z}$ باقی بماند. اگر انرژی برهم کنش سطحی n با هر ذره را با γ نشان دهیم، آنگاه هامیلتونین این برهم کنش را که آن را تابعی انرژی آزاد میدان دوخته شدگی می نامیم می توان به صورت زیر نمایش داد [۲۵، ۲۶].

$$E_{af} = \frac{\gamma}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r})(\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{z})^2 = -\frac{1}{2} \int_V dV W(\mathbf{r}) (n_x^2(\mathbf{r}) + n_y^2(\mathbf{r})) + \frac{1}{2} \int_V dV W(\mathbf{r}), \quad (4)$$

که در آن $W(\mathbf{r}) = \gamma \rho(\mathbf{r})$ ، انرژی بر واحد حجم، برای مواضع اکثریتی که جهت مرجح بردار جهت نما در صفحه عمود بر $\mathbf{z}$ است مثبت و در صورت دیگر که این جهت در امتداد $\mathbf{z}$ است منفی است. در این صورت به ازای جهت مرجح انرژی برهم کنشی کمینه می شود. ما فرض می کنیم که مقادیر $W(\mathbf{r})$ حول مقدار

^۱. annealed

۲. ۱. رهیافت

$$F = F[d, W] = kT \left[\frac{V}{\gamma g} (W - W_0)^{\gamma} + \sum_{q \geq \sqrt{W/K}} \ln \frac{\sinh d \sqrt{q^{\gamma} - \frac{W}{K}}}{\beta K A \sqrt{q^{\gamma} - \frac{W}{K}}} + \sum_{q < \sqrt{W/K}} \ln \frac{\sin d \sqrt{\frac{W}{K} - q^{\gamma}}}{\beta K A \sqrt{\frac{W}{K} - q^{\gamma}}} \right] \quad (13)$$

مقدار نقطه زینی W^* به وضوح بزرگترین سهم از میدان W در تابع پارش است. با تعریف کمیت‌های $\Lambda_* = 1 - W^*/W_0$ ، معادله نقطه زینی رابطه (۱۲) در حد پیوستگی، که جمع روی q به انتگرال گیری روی متغیر پیوسته q با دستور العمل $\sum_q \rightarrow \frac{A}{(\gamma\pi)^{\gamma}} \int dq = \frac{A}{\gamma\pi} \int_0^{q_{max}=\pi/a} q dq$ تبدیل می‌شود، می‌دهد:

$$\Lambda_* = -\frac{\chi\lambda}{d} \left(\ln \frac{\sinh \frac{d}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi^{\gamma}\lambda^{\gamma}}{a^{\gamma}} - (1-\Lambda_*)}}{\sqrt{\frac{\pi^{\gamma}\lambda^{\gamma}}{a^{\gamma}} - (1-\Lambda_*)}} - \ln \frac{\sin \frac{d}{\lambda} \sqrt{(1-\Lambda_*)}}{\sqrt{(1-\Lambda_*)}} \right) \quad (14)$$

که در آن $\chi = g / (\gamma\pi W_0^{\gamma} \lambda^{\gamma})$ و a کوتاه‌ترین طول، یعنی طول مولکولی، است.

قبل از محاسبه Λ_* به عنوان تابعی از فاصله d و به دنبال آن نیرو بر حسب فاصله، ما انرژی آزاد مؤثر $F[d, W^*]$ ، رابطه (۱۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$F[d, \Lambda_*] = kT \left(\frac{V}{\gamma g} W_0^{\gamma} \Lambda_*^{\gamma} + \sum_{q \geq \lambda^{-1} \sqrt{1-\Lambda_*}} \ln \frac{1 - e^{-\gamma d \sqrt{q^{\gamma} - \lambda^{-\gamma}(1-\Lambda_*)}}}{\beta K A \sqrt{q^{\gamma} - \lambda^{-\gamma}(1-\Lambda_*)}} + \sum_{q < \lambda^{-1} \sqrt{1-\Lambda_*}} \ln \frac{\sin d \sqrt{\lambda^{-\gamma}(1-\Lambda_*) - q^{\gamma}}}{\beta K A \sqrt{\lambda^{-\gamma}(1-\Lambda_*) - q^{\gamma}}} \right) \quad (15)$$

در این صورت سهم جمله‌های سطحی و حجمی در F به وضوح تفکیک و در ادامه به درستی کنار گذاشته می‌شوند.

بیاید محاسبه تابع پارش را به تقریب میدان میانگین [۳۲] برای میدان $W(\mathbf{r})$ محدود کنیم و بنابراین انتگرال تابعی روی آن به یک انتگرال گیری معمولی $\int dW$ تبدیل شود که در آن W یک کمیت مستقل از مکان است. سپس انتگرال تابعی در رابطه (۶) به سهولت در فضای فوریه دو بعدی $q = (q_x, q_y)$ قابل محاسبه است. بنابراین از بسط فوریه

$$n(x, z) = \sum_q n_q(z) e^{-iq \cdot x} \quad (8)$$

استفاده می‌کنیم و در نتیجه، صرف نظر از یک فاکتور ثابت، داریم

$$\langle Z \rangle = \int dW e^{-\frac{V(W-W_0)^{\gamma}}{\gamma g}} \left(\prod_q \int_{(0,0)}^{(\infty,d)} Dn_q(z) e^{-\beta F[n_q(z)]} \right)^{\gamma} \quad (9)$$

که در آن تابعی انرژی آزاد F عبارت است از

$$F[n_q(z)] = \frac{KA}{\gamma} \int_0^d dz \left(\left| \partial_z n_q(z) \right|^{\gamma} + \left(q^{\gamma} - \frac{W}{K} \right) \left| n_q(z) \right|^{\gamma} \right) \quad (10)$$

که در آن $A = V/d$ مساحت هر سطح است و از رابطه $n_q(z) = n_q^*(z)$ نیز استفاده کرده‌ایم.

جواب انتگرال گیری تابعی بالا به دو عامل زیر قابل تفکیک است که در واقع از مقایسه اندازه بردار موج، q ، با وارون مقیاس طولی، $\sqrt{W/K}$ ، نتیجه می‌شود [۳۱، ۱۷]

$$\prod_q \int_{(0,0)}^{(\infty,d)} Dn_q(z) e^{-\beta F[n_q(z)]} = \prod_{q < \sqrt{W/K}} \left[\frac{\sin d \sqrt{\frac{W}{K} - q^{\gamma}}}{\beta K A \sqrt{\frac{W}{K} - q^{\gamma}}} \right]^{-\gamma/2} \prod_{q \geq \sqrt{W/K}} \left[\frac{\sinh d \sqrt{q^{\gamma} - \frac{W}{K}}}{\beta K A \sqrt{q^{\gamma} - \frac{W}{K}}} \right]^{-\gamma/2} \quad (11)$$

در این مرحله ما از تقریب نقطه زینی برای W استفاده می‌کنیم [۳۰، ۲۶، ۲۵]، بدین ترتیب که فقط آن مقدار از W را در محاسبه $\langle Z \rangle$ در نظر می‌گیریم که به ازای آن انرژی آزاد سامانه $F = -kT \ln \langle Z \rangle$ کمینه شود. یعنی

$$\frac{\partial F}{\partial W} \Big|_{W=W^*=0} = 0 \quad (12)$$

که در آن

۲.۲. حل معادله نقطه زینی

معادله نقطه زینی داده شده در رابطه (۱۴) به صورت عددی برای به دست آوردن Λ^* به عنوان تابعی از فاصله d قابل حل است. کما اینکه حل تحلیلی این معادله در فواصل $d \ll \lambda$ می دهد

$$\Lambda^* = -\frac{\chi\lambda}{d} \ln \frac{\sinh(\pi d/a)}{\pi d/a}, \quad (16)$$

که این به نوبه برای فواصل بسیار کوچک می دهد $\Lambda^* \approx -\chi\lambda q_{\max}^2 d/6$ که در آن $q_{\max} = \pi/a$ ، پس برای فواصل به طور مجانبی کوچک، Λ^* متناسب با $-d$ است. از طرفی دیگر در فواصل بزرگ، اما کوچک تر از فاصله

بحرانی

$$d_c = \pi\lambda / \sqrt{1-\Lambda^*(d)}, \quad (17)$$

داریم

$$\Lambda^* \cong -\frac{\chi\lambda}{d} \left[\ln \frac{\sinh \frac{d}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi^2 \lambda^2}{a^2} - (1-\Lambda^*)}}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda^2}{a^2} - (1-\Lambda^*)}} - \ln \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\Lambda^*}} - \frac{d}{\lambda} \right) \right]. \quad (18)$$

جمله دوم در $d = d_c$ (به دلیل ظهور نرم ترین مد) به صورت لگاریتمی واگرا می شود. برای پایداری آرایش یکنواخت میدان برداری جهت نما و جلوگیری از گذار ساختاری از حالت یکنواخت، که توسط سطوح خارجی ایجاد شده است، به حالت غیر یکنواخت، که در اثر غلبه میدان خارجی ایجاد می شود، ما فواصل را به $d < d_c$ محدود می کنیم. ما می توانیم این رابطه را با استفاده از حد $\lambda \gg a$ به صورت زیر ساده تر کنیم، که یک برآورد خوب را برای Λ^* در d های نزدیک به d_c می دهد

$$\Lambda^* \cong -\frac{\chi\lambda}{d} \left[\ln \frac{\sinh \pi d/a}{\pi d/a} - \ln \left(\frac{d_c}{d} - 1 \right) \right], \quad (19)$$

$$d_c = \frac{\pi\lambda}{\sqrt{1 + \frac{\chi\lambda}{d} \ln \frac{\sinh \pi d/a}{\pi d/a}}}, \quad (20)$$

که در اینجا ما از جمله اول رابطه (۱۹) برای جایگزینی Λ^* در رابطه (۱۷) برای تخمین d_c استفاده کرده ایم.

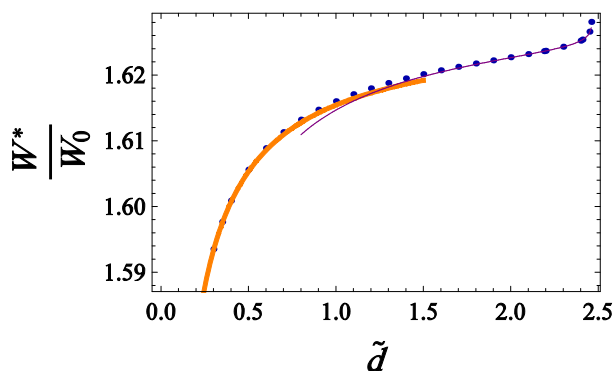
Λ^* یک کمیتی منفی است. ما نتایج عددی آن را، که از حل معادله (۱۴) حاصل شده است، به همراه دو حد تحلیلی فواصل کوچک و فواصل نزدیک به d_c در شکل ۱ آورده ایم، که رفتار $\Lambda^* = 1 - W^*/W_0$ را بر حسب فاصله نمایش می دهد. اینکه انرژی برهم کنشی مؤثر W^* نسبت به W_0 افزایش یافته است به این برمی گردد که نانولوله های در صفحه عمود بر z افت و خیزها را برانگیخته اند. در واقع، میدان موضعی آنها به افت و خیزها در صفحه یعنی n_x و n_y دامن زده است.

۳. نیروی شبه کازیمیر

ما به دنبال انرژی آزاد برهم کنشی بین دو دیواره در بردارنده مخلوط نماتیک و نانو لوله های کلوییدی هستیم. بنابراین باید دیگر سهم ها از جمله انرژی های آزاد سطحی و حجمی را که عموماً در عبارت $F[d, \Lambda^*]$ رابطه (۱۵) وجود دارند از آن بکاهیم تا سهم مؤثر برهم کنش فقط باقی بماند. هنگامی که فاصله بین دو سطح به سمت بی نهایت میل کند و یا به عبارتی دیواره ها را برداریم برهم کنش بین سطحی صفر می شود و تنها سهم ها از سطح ها و حجم باقی می مانند. منتهی همچنان که در مرجع [۱۷] اشاره شده است بایستی توجه کنیم که در غیاب برهم کنش سطحی سطوح در بر دارنده، مولکول های نماتیک در امتداد جهت دلخواه میدان خارجی که در اینجا به طور میانگین در راستای عمود بر راستای میانگین محور بلند نانو لوله ها است قرار می گیرند. فرض کنیم که این امتداد در راستای محور x دستگاه مختصات کارتزین باشد. در این صورت تابعی انرژی آزاد افت و خیزهای بردار جهت نما $\mathbf{n} \approx (1 - n_y^2/2 - n_z^2/2, n_y, n_z)$ می شود:

$$F_{free}[n_y(\mathbf{r}), n_z(\mathbf{r})] = \frac{K}{4} \int d\mathbf{r} \left[(\nabla n_y)^2 + (\nabla n_z)^2 + \frac{W}{K} n_z^2 \right]. \quad (21)$$

همچنان که ملاحظه می کنیم افت و خیزها در امتداد y با میدان انرژی دوخته شدگی W برهم کنشی ندارند [معادله (۴) را ببینید]



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقادیر عددی نسبت شدت مؤثر برهم کنش بر شدت میانگین $(\frac{W^*}{W_0} = 1 - \Lambda^*)$ بر حسب فاصله بی بعد $\tilde{d} = d/\lambda$ به ازای $\lambda/a = 100$ و $\chi = 0.002$ در رابطه (۱۴). منحنی‌های ضخیم و نازک به ترتیب مربوط به جواب‌های تحلیلی صادق در فواصل کوچک رابطه (۱۶) و فواصل بزرگ رابطه (۱۹) هستند.

فواصل بزرگ ($d \gg \lambda$) صادق است نیز به درستی می‌دهد. حال با مشخص شدن سهم‌های حجمی به محاسبه نیروی کازیمیر برگردیم. از آنجایی که $F[d, \Lambda^*]$ (رابطه (۱۵)) علاوه بر وابستگی صریحش به d از طریق Λ^* (یا W^*) نیز به d وابسته است، پس نیرو می‌شود:

$$f = -\frac{\partial F}{\partial d} \Big|_{A,V,\Lambda^*} - \frac{\partial F}{\partial \Lambda^*} \Big|_{A,V,d} \frac{\partial \Lambda^*}{\partial d}, \quad (25)$$

که در تقریب نقطه زینی (رابطه (۱۲)) جمله دوم صفر است و در نتیجه برای محاسبه نیرو تنها کافی است که مشتق جزئی F نسبت به d محاسبه شود، در حالی که Λ^* (یا W^*) را ثابت نگه می‌داریم، یعنی

$$f = -\frac{\partial F}{\partial d} \Big|_{A,V,\Lambda^*}. \quad (26)$$

بعد از کاهش سهم‌های حجمی داده شده در عبارت (۲۲)، نهایتاً نیرو بر واحد سطح، در حد پیوستگی اعداد موج، می‌شود

$$\frac{f}{A} = -\frac{KT}{4\pi} \left[\frac{\xi(\frac{3}{2})}{d^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda^{-1}\sqrt{1-\Lambda^*}} dp \, p^{\frac{3}{2}} \cot pd + \frac{1}{3} \frac{(1-A)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (27)$$

جمله اول در عبارت بالا، که از میدان خارجی متأثر نیست، همان نیروی جاذب بلند برد است که در سامانه‌های ایده‌آل که در آن نماتیک خالص در معرض شرایط مرزی دیریکله قرار گرفته است ایجاد می‌شود [۳-۶].

اما آنها در امتداد محور z جرم دار شده‌اند و یا به عبارتی طول همبستگی آنها محدود شده است (درحالی که طول همبستگی برای میدان n_y بی نهایت و جمله جرمی صفر است). این به همراه بی نظمی موجود در نانو لوله‌ها منجر به جمله‌های حجمی زیر می‌شود:

$$\frac{kT}{\gamma} \sum_q q d + \frac{kT}{\gamma} \sum_q d \sqrt{q^2 + \lambda^{-2} (1-\Lambda)}, \quad (22)$$

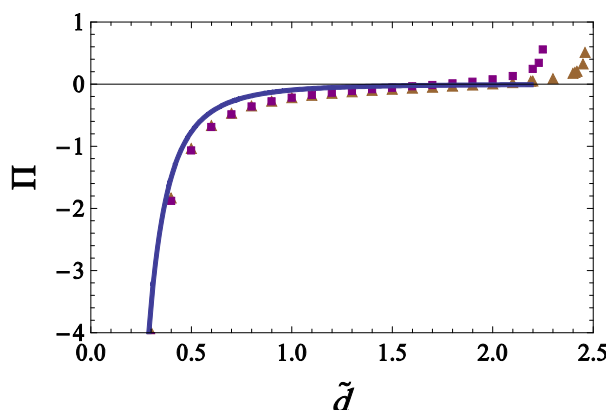
که به ترتیب جمله اول به مد نرم n_y و جمله دوم به مد دیگر مرتبط هستند. منتهی در اینجا $\Lambda = 1 - W^*/W_0$ که در آن W^* مقدار نقطه زینی W در سامانه کنونی است، از معادله زیر، همچنان که در مرجع [۲۵] بحث شده است، به دست می‌آید:

$$\Lambda = \frac{\chi_d \lambda}{d} \left[\ln \frac{\sinh \frac{d}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi^2 \lambda^2}{a^2} + (1-\Lambda)}}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda^2}{a^2} + (1-\Lambda)}} - \ln \frac{\sinh \frac{d}{\lambda} \sqrt{1-\Lambda}}{\sqrt{1-\Lambda}} \right], \quad (23)$$

که در آن $\chi_d = \chi/2 = g/(\lambda \pi W_0^2 \lambda^3)$. در مرجع [۲۵] نشان داده شده است که در محدوده وسیعی از فواصل جواب

$$\Lambda \approx \frac{\chi_d \lambda}{d} \ln \frac{\sinh(\pi d/a)}{\pi d/a}, \quad (24)$$

در توافق با حل عددی رابطه (۲۳) است. این جواب نه تنها در حد $d \ll \lambda$ صادق است بلکه $\Lambda \approx \pi \chi_d \lambda / a$ را که در حد



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) فشار بدون بعد $\Pi = \beta f \lambda^3 / A$ بر حسب فاصله بدون بعد $\tilde{d} = d / \lambda$ به ازای $\lambda/a = 100$ برای χ مساوی ۰٫۰۰۲ (مثلث‌ها) و ۰٫۰۰۳ (مربع‌ها). با افزایش واریانس، فاصله بحرانی کاهش می‌یابد (رابطه (۱۷)). منحنی پر مربوط به نیروی جهان شمول (جمله اول رابطه (۲۷)) است که در غیاب ذرات کلوییدی برقرار است.

مقایسه، فشار بلند برد که متناسب با $1/d^3$ است نیز رسم شده است.

۳. نتیجه‌گیری

بی‌نظمی مطالعه شده در اینجا از نوع گرماده است، بدین معنا که ما در محاسبه انرژی آزاد $F = -kT \ln Z$ از متوسط‌گیری روی تابع پارش Z شروع کردیم، به عبارتی به نوعی بسان میدان افت و خیزی حرارتی بردار جهت نما با میدان بی‌نظم $W(\mathbf{r})$ رفتار شد [۲۵، ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۳۳ و ۳۴]. در مقابل بی‌نظمی گرماده بی‌نظمی یخ‌زده^۲ است که در آن مورد متوسط انرژی آزاد بایستی محاسبه شود [۲۶، ۲۷، ۲۸، ۳۳ و ۳۴]. بی‌نظمی گرماده در میدان دوخته شدگی، در تقریب نقطه زینی، طول همدوسی میدان میانگین $\lambda = \sqrt{K/W}$ که بازه طولی است و در طی آن بردار جهت نما (که از قبل توسط سطح جهتمند شده است) توسط میدان اعمالی در جهت مرجع میدان قرار می‌گیرد [۱] را به مقدار مؤثر $\lambda_{eff} = \lambda / \sqrt{1 - \Lambda^*}$ کاهش می‌دهد. یا به طور معادل شدت مؤثر انرژی برهم‌کنش (دوخته شدگی) به صورت $W^* = W_0(1 - \Lambda^*)$ افزایش داده می‌شود، که ما این مقدار را، برای یک میدان ناپایدار کننده نظم یکنواخت نماتیک در یک تیغه، در تقریب نقطه زینی که به دنبال تقریب

جمله دوم ناشی از اثر میدان خارجی با طول همدوسی $\lambda_{eff} = \sqrt{K/W^*} = \lambda / \sqrt{1 - \Lambda^*}$ است. در حالی که این عبارت در فواصل $d \ll \lambda_{eff}$ به صورت $-kT / (4\pi d \lambda_{eff}^2)$ افت می‌کند، با نزدیک شدن به فاصله بحرانی، یعنی $\lambda_{eff}^{-1} \rightarrow \pi/d$ (حد بالای انتگرال)، به صورت $-kT \ln(2 \sin(d/\lambda_{eff})) / (4\pi^2 \lambda_{eff}^2)$ رفتار می‌کند [۱۷]. در واقع نیروی جاذبه، که در فواصل کوچک حاکم است، با نزدیک شدن به d_c دفعه می‌شود و در گذار ساختاری $d = d_c$ ، که به واسطه مد نرم $(\pi/d)^2 - \lambda_{eff}^{-2} = 0$ اتفاق می‌افتد، به طور لگاریتمی واگرا می‌شود [۱۷]. البته خاطر نشان کنیم که برای $d \geq d_c$ که ما به آن نپرداخته‌ایم یک سهم غالب متناسب با K که ناشی از غیر یکنواختی میدان جهت نما است ایجاد خواهد شد. و بالاخره جمله آخر از سهم حجمی به جا مانده و مشتق آن نسبت به d که قبلاً در مورد آن بحث شد، رابطه (۲۲) به دست آمده است. در اینجا متذکر شویم که مقادیر Λ بایستی زیر مقدار یک نگه داشته شوند، تا هامیلتونین مربوط به سامانه آزاد (که در آن صفحات محدود کننده کنار گذاشته شده‌اند) در حالت پایدار باقی بماند (رابطه (۲۱)).

شکل ۲ نیرو بر واحد سطح را، در غالب فشار باز مقیاس شده Π ، بر حسب فاصله باز مقیاس شده $\tilde{d} = d/\lambda$ در دو واریانس متفاوت به ازای $\lambda/a = 100$ نشان می‌دهد. برای

۱. Quenched disorder

در نتیجه W^* با افزایش واریانس افزایش می‌یابد. به دنبال این نتیجه، ضخامت بحرانی با افزایش واریانس کاهش می‌یابد. این تغییرات مستقیماً در تعدیل نیروی شبه کازیمیر، همچنان که در نمودار شکل ۲ نمایش داده شده است، نقش ایفا می‌کنند. در این سامانه نه تنها میدان میانگین که باعث ناپایداری آرایش یکنواخت میدان جهت نما است افت و خیزهای حرارتی را تقویت می‌کند بلکه بی‌نظمی موجود در آن نیز به این روند کمک می‌کند و در نتیجه نیرو را افزایش می‌دهد. از نتیجه آخر می‌توان استنباط کرد که نانو لوله‌های در صفحه xy که برای آنها جهت مرجع n عمود بر آنها اما در همان صفحه xy است منشا این امر شده‌اند.

میدان میانگین حاصل شد برآورد کردیم. در این سامانه Λ^* کمیتی منفی به دست آمد. قدر مطلق آن با افزایش ضخامت تیغه نماتیک در ابتدا در ضخامت‌های کم به طور خطی با ضخامت افزایش می‌یابد و سپس مقدار آن به طور ویژه‌ای با شیب کمتری افزایش می‌یابد تا اینکه در نزدیکی‌های گذار ساختاری با شیب تندی به مقدار آن افزوده می‌شود. درست درآستانه گذار ساختاری که سامانه ناپایدار می‌شود Λ^* به طور لگاریتمی از خود واگرایی نشان می‌دهد، که البته این ویژگی آخر در نیروی بین سطحی نیز، به دلیل بروز مد نرم، قبلاً مشاهده شده است [۱۷]. با افزایش واریانس بی‌نظمی، این رفتار به مقادیر قدر مطلق بزرگ‌تر برای Λ^* انتقال می‌یابد و

مراجع

۱. P G de Gennes and J Prost, "The Physics of Liquid Crystals", Oxford: Oxford Science Publications, (1995).
۲. A Rapini and M Papoular, *J. Phys. Colloq.* **30** C 4- (1969) 54.
۳. A Ajdari, L Peliti, and J Prost, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1481.
۴. A Ajdari, B Duplantier, D Hone, L Peliti, and J Prost, *J. Phys. II* **2** (1992) 487.
۵. H Li and M Kardar, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 3275.
۶. H Li and M Kardar, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 6490.
۷. H B G Casimir, *Proc. K Ned Akad Wet.* **51** (1948) 793.
۸. H B G Casimir and D Polder, *Phys. Rev.* **73** (1948) 360.
۹. V M Mostepanenko and N N Trunov, "The Casimir Effect and its Applications", Oxford: Oxford University Press (1997).
۱۰. M Bordag, G L Klimchitskaya, U Mohideen and V M Mostepanenko, "Advances in the Casimir Effect" Oxford: Oxford University Press (2009).
۱۱. Y Koohsarian and A Shirzad, *Iranian Journal of Physics Research* **16** 3 (2016) 107.
۱۲. M J Sparnaay, *Physica* **24** (1958) 751.
۱۳. S Lamoreaux, *Rep. Prog. Phys.* **68** (2005) 201.
۱۴. S Lamoreaux, *Am. J. Phys.* **67** (1999) 850.
۱۵. A Ashourvan, M Miri and R Golestanian, *J. Phys. Conf. Ser.* **89** (2007) 012017.
۱۶. ع مرادیان، م ر ستاره و س اسیدزاهدی، مجله پژوهش ۱۶ (۱۳۹۵) ۱۰۷.
۱۷. F Karimi Pour Haddadan, N Shirzadiani, A Naji and R Podgornik, *J. Phys. Condens. Matter* **26** (2014) 051707.
۱۸. A Moradian, M R Setare, and S A Seyedzahedi, *Iranian Journal of Physics Research* **17** 4 (2017) 553.
۱۹. P. Ziherl, F K P Haddadan, R. Podgornik and S. Žumer, *Phys. Rev. E* **61** (2000) 5361.
۲۰. P Ziherl, R Podgornik, and S Žumer, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1998) 1189.
۲۱. R Basu and G S Iannacchione *Phys. Rev. E* **81** (2010) 051705.
۲۲. M D Lynch and D L Patrick *Nano Lett.* **2** (2010) 1197.
۲۳. V Popa-Nita and S Kralj, *J. Chem. Phys.* **132** (2010) 024902.
۲۴. R Basu, *Appl. Phys. Lett.* **103** (2013) 241906.
۲۵. H Stark, *Physics Reports* **351** (2001) 387.
۲۶. M Hashemi and M R Ejtehadi *Phys. Rev. E* **91** (2015) 012503.
۲۷. F Karimi Pour Haddadan, *J. Phys. Condens. Matter* **28** (2016) 405101.
۲۸. L Petridis and E M Terentjev *Phys. Rev. E* **74** (2006) 051707.
۲۹. A Naji, D S Dean, J Sarabadani, R Horgan, and R Podgornik, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 060601.
۳۰. J Sarabadani, A Naji, D S Dean, R R Horgan, and R Podgornik, *J. Chem. Phys.* **133** (2010) 174702.
۳۱. P M Chaikin and T C Lubensky *Principles of Condensed Matter Physics* Cambridge: Cambridge University Press (1995).
۳۲. H Kleinert, "Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, and Polymer Physics" World Scientific, Singapore (1995).

-
- R. Podgornik *J. Phys. Condens. Matter* **26** (2014) 075103.
34. F Karimi Pour Haddadan *J. Phys. Condens. Matter* **29** (2017) 065101.
32. A M Gupta and S F Edwards *J. Chem. Phys.* **98** (1993) 1588.
33. F Karimi Pour Haddadan, A Naji, A Khame Seifi and