

## مدلی ساده برای قرص‌های برافزایشی در تقریب پسا-نیوتونی

راضیه رنجبر، محمود روشن و شهرام عباسی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فردوسی مشهد

پست الکترونیکی: mroshan@um.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۱۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۰۶/۲۴)

### چکیده

در این مقاله تحول زمانی قرص‌های برافزایشی در حد پسا-نیوتونی بررسی شده است. این قرص‌ها در اطراف اجسام فشرده گرانشی مانند سیاه‌چاله، ستاره نوترونی و یا کوتوله سفید تشکیل می‌شوند. اگر چه اکثر پژوهش‌های تحلیلی در این زمینه در چارچوب دینامیک و گرانش نیوتونی انجام شده‌اند، ضروری است برای مطالعه ساختار قرص‌ها در نزدیکی جسم مرکزی اثرات نسبیت را نیز در نظر بگیریم. بدین منظور با اضافه کردن تصحیحات پسا-نیوتونی به معادلات هیدرودینامیک سیالات، معادله تحول زمانی قرص برافزایشی را در حد پسا-نیوتونی به دست آورده و به کمک این معادله، چگالی سطحی قرص را که وابسته به شعاع و زمان است به صورت شبه تحلیلی به دست می‌آوریم. در نهایت به مقایسه تحول زمانی قرص برافزایشی در گرانش نیوتونی و پسا-نیوتونی می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: قرص برافزایشی، حد پسا-نیوتونی، سیاه‌چاله

### ۱. مقدمه

تابش الکترومغناطیسی می‌کند. این نوع وشکسانی باعث انتقال تکانه زاویه‌ای در پهنای قرص می‌شود، به گونه‌ای که لایه‌های داخلی تکانه زاویه‌ای را از دست می‌دهند و به تدریج به داخل سقوط می‌کنند و لایه‌های بیرونی تکانه زاویه‌ای به دست می‌آورند.

اولین مطالعات و تحقیقاتی که به طور جدی در مورد فرایندهای برافزایشی صورت گرفت به اواسط قرن نوزده برمی‌گردد. هرمان بوندی جزء اولین کسانی بود که در مورد برافزایش‌های کروی غیرچرخان مطالعات اولیه خود را شروع کرد [۱]. پرننگل و ریس در سال ۱۹۷۲ فرایندهای برافزایشی

در جهان اطراف ما و کیهان بخش بزرگی از اجرام و سیستم‌های نجومی که مورد مطالعه قرار داده شده در اثر فروریزش گرانشی به وجود آمده‌اند. قرص‌های برافزایشی، دسته‌ای از سیستم‌های نجومی هستند که از گازهای در حال چرخش با سرعت بالا تشکیل شده‌اند و به صورت مارپیچی به آرامی روی جسم مرکزی با گرانش قوی مثل پیش ستاره‌ها، ستاره‌های رشته اصلی، کوتوله سفید، ستاره نوترونی و سیاه‌چاله‌ها فرو می‌ریزند. در قرص‌های برافزایشی بین لایه‌های مجاور گاز وشکسانی وجود دارد، در نتیجه دمای گاز بالا می‌رود و شروع به گسیل

اطراف اجرام فشرده از جمله سیاه‌چاله و ستاره‌های نوترونی و طیف تابشی ساطع شده از گاز پیرامون این اجرام هنگام سقوط ماریچی را مورد بررسی قرار داده و با مشاهدات رصدی مقایسه کردند [۲]. در سال ۱۹۷۳ شاکورا و سانئو حل تحلیلی برای قرص‌های برافزایشی نازک ارائه دادند که مشهور به قرص‌های نازک استاندارد شاکورا و سانئو است. این مقاله یکی از مهم‌ترین مقالات اخترفیزیک در زمینه قرص‌های برافزایشی است [۳]. در این مقاله شاکورا و سانئو یکی از مهم‌ترین الگوهای وشکسانی، به نام وشکسانی  $\alpha$  را ارائه دادند. در این الگو حالت قرص از لحاظ هندسی نازک و از نظر اپتیکی کدر است و سرعت زاویه‌ای در قرص، کپلری در نظر گرفته می‌شود. در این الگو آنها فرض کرده‌اند وشکسانی سینماتیک در سیستم با  $H$  یعنی ضخامت قرص متناسب است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

صورت زیر خواهد بود [۶].

در مدل استاندارد فرض بر این است که بخش بزرگی از گرمای ناشی از اتلاف تلاطمی، بلافاصله پس از تولید به صورت تابش از قرص خارج می‌شود. حال اگر گاز اطراف سیاه‌چاله تابش مؤثری نداشته باشد، یعنی برای جریان‌های برافزایشی داغ دیگر مدل نازک شاکورا و سانئو جوابگو نیست. همچنین طیف برخی از سیستم‌های برافزایشی از جمله قرص برافزایشی مرکز کهکشان خودمان، بر اساس مدل استاندارد قابل توجیه نیست. میزان انرژی دریافتی از این سیستم خیلی کمتر از مقداری است که طبق مدل استاندارد باید تابش کند. نه تنها در مورد کهکشان خودمان، بلکه در قرص‌های هسته کهکشان‌های فعال نیز این ناسازگاری دیده می‌شود. شاید یک دلیل این باشد که گرمای ناشی از جریان‌های تلاطمی قرص، این امکان را پیدا نمی‌کند که از قرص خارج شود. اولین مدل جریان برافزایشی داغ توسط شاپیرو و همکاران توصیف شد. بر طبق این مدل قرص در نواحی داخل به طور قابل توجهی داغ‌تر است و از نظر هندسی نسبت به مدل‌های قبلی ضخیم‌تر است. همچنین ناحیه داخلی قرص از لحاظ اپتیکی نازک است که به مدل  $SLE$  معروف است. این مدل از نظر گرمایی ناپایدار بوده و بعید بود که در طبیعت تحقق پیدا کند [۷]. سرانجام در سال ۱۹۹۴ مدلی توسط نارایان و یی ارائه شد که بر خلاف مدل استاندارد، گرمایش ناشی از تلاطم در سیستم باقی می‌ماند و فقط بخش کمی از آن به صورت تابش از مجموعه خارج می‌شود. در حقیقت اگر آهنگ برافزایشی ماده بر روی جرم مرکزی در حد ادینگتون باشد و قرص اطراف آن از نظر اپتیکی نازک باشد در این صورت به این نوع از قرص‌های برافزایشی

$$v = \alpha c_s H,$$

که در آن  $c_s$  سرعت صوت در قرص و  $H$  ضخامت قرص است. با در نظر گرفتن الگوی کلی وشکسانی برای  $\alpha$  داریم

$$v = LV\phi,$$

که  $L$  اندازه تلاطم و  $V\phi$  سرعت بازگشت بزرگ‌ترین تلاطم (سرعت متوسط مولکولی) است. بنابراین می‌توان  $\alpha$  را به صورت زیر نوشت:

$$\alpha = \frac{L V\phi}{c_s H},$$

در این الگو به  $\alpha$  یک مقدار ثابت بین صفر و یک نسبت داده می‌شود. قرص‌های نازک استاندارد، بسته به جرم سیاه‌چاله مرکزی دمای بین  $10^4 - 10^7$  K دارند که نسبت به دمای ویریال<sup>۱</sup> سرد هستند. این نوع قرص‌ها بیشتر در هسته‌های کهکشانی درخشان [۴] دیده می‌شوند. از آنجایی که مدل قرص نازک در نواحی داخلی قرص‌های اطراف سیاه‌چاله‌ها و ستاره‌های نوترونی کاربرد ندارد، بنابراین در این نواحی قرص می‌تواند ضخیم باشد. به علت چگالی بالای این قرص‌ها، قرص دیگر کپلری نخواهد بود و به دلیل نقش خود گرانش قرص، تحلیل

۱. دمای ویریال برابر است با  $T_{vir} = (1/2)(GM/kR)$ ،  $k$  ثابت بولتزمن،  $M$  جرم و  $R$  شعاع سیستم می‌باشد.

ADAF<sup>۱</sup> می‌گویند. این مدل به طرز شگفت‌انگیزی در توجیه طیف دریافتی از قرص مرکز کهکشانی و برخی سیستم‌های دیگر موفق بوده است و امروزه بسط و گسترش یافته است [۸]. البته پیش از این یک اختریف‌یکدان ژاپنی به نام ایچیمارو در ۱۹۷۷ ایده‌ای مشابهی را مطرح کرد اما چندان مورد توجه قرار نگرفت [۹]. از آن جایی که گاز نزدیک سیاه‌چاله در جریان برافزایشی داغ، دمای بسیار بالایی دارد و از نظر اپتیکی نازک و بسیار داغ‌تر است. بنابراین در مطالعه ADAF ها نسبت به مدل استاندارد نواحی نزدیک قرص مرکزی اهمیت پیدا می‌کند.

برای حل ADAF ها بیشتر از حل‌های خود متشابه<sup>۲</sup> استفاده شد که امتیاز بزرگی دارد چرا که تحلیلی‌اند و یک روش واضحی از فهم خواص کلیدی ADAF ها را ارائه می‌دهند [۱۰-۱۳]. از آنجایی که حل خود متشابه بدون مقیاس است نمی‌تواند جریان‌های نزدیک لبه داخلی و یا بیرونی را توصیف کند. به خصوص برای محاسبه طیف تابشی نیاز به حل عمومی داریم، زیرا مهم‌ترین تابش‌ها از ناحیه نزدیک به مرز داخلی می‌آیند جایی که حل خود متشابه نامعتبر است. در این نوع راه‌حل‌ها نسخه‌های نسبیته عامی معادلات جایگزین معادلات نیوتونی می‌شوند که در ارتباط با متریک کر هستند [۱۴]. راه‌حل‌های نسبیتی در شعاع‌های  $R > 10 R_g$  مشابه با مسائل نیوتونی است اما در شعاع‌های کوچک به طور قابل توجهی متفاوت‌اند. به علاوه اسپین سیاه‌چاله در شعاع‌های کوچک اثر قابل توجهی دارد و این می‌تواند طیف مشاهده شده را تغییر دهد. همچنین خاطر نشان می‌کنیم که اثرات نسبیتی سهم عمده‌ای در ایجاد جت در این قرص‌ها دارند [۱۵]. یکی از مهم‌ترین مقالاتی که به بررسی اثرات نسبیتی در قرص‌های برافزایشی پرداخته است مقاله پیچ و تورن در سال ۱۹۷۳ است [۱۶]. در این مقاله با در نظر گرفتن متریک کلی اطراف سیاه‌چاله و استفاده از فرضیاتی برای سیاه‌چاله ساختار شعاعی میانگین زمان قرص به دست می‌آید. با استفاده از قوانین پایستگی جرم سکون، تکانه زاویه‌ای و انرژی به ترتیب کمیت‌های آهنگ برافزایشی  $\dot{M}$ ، شار انرژی تابشی  $F(r)$  و

گشتاور ناشی از تنش‌های قرص  $W_{\phi}^r(r)$  به دست می‌آید. در نهایت با توجه به این که تصور غالب این است که سیاه‌چاله مرکز قرص‌های برافزایشی سیاه‌چاله‌ای چرخان است، با معرفی فضا- زمان کر معادلات ساختار شعاعی را برای سیاه‌چاله کر به دست می‌آورد. همچنین در سال ۱۹۷۴ تورن با در نظر گرفتن اثر فوتون‌ها قوانین باردین در مورد سیاه‌چاله‌ها را تصحیح کرد [۱۷]. باردین قرص گازی در اطراف سیاه‌چاله را در نظر گرفت و فرض کرد که قرص در صفحه استوای سیاه‌چاله کر قرار دارد. باردین در ابتدا سیاه‌چاله‌ای غیرچرخان در نظر گرفت که مقداری برافزایش جرم سکون روی سیاه‌چاله باعث تغییر در انرژی- جرم اولیه سیاه‌چاله می‌شود و این تغییر جرم باعث می‌شود که اسپین سیاه‌چاله، تا مقدار بیشینه کر بالا برود [۱۸]. بالا رفتن اسپین تا مقدار بیشینه ( $a_* = 1$ ) قانون سوم مکانیک سیاه‌چاله را نقض می‌کند. در نتیجه فرایندهایی را که در تحلیل باردین در نظر گرفته نشده می‌توان به کار برد، تا  $a \leq 1$  باقی بماند و سازگار با قانون سوم مکانیک سیاه‌چاله شود. مهم‌ترین فرایندی که توسط باردین نادیده گرفته شده جذب فوتون‌ها توسط سیاه‌چاله است. جذب فوتون‌ها از بالا رفتن اسپین تا  $a_* = 1$  جلوگیری می‌کند. تورن با در نظر گرفتن اثر فوتون‌ها قوانین تکامل باردین تصحیح کرد. اثر فوتون‌ها مانند ضربه‌گیر عمل می‌کند و نمی‌گذارد اسپین به مقدار یک برسد و به مقدار حدی  $a_* \sim 0.998$  می‌رسد. همچنین طبق این مقاله در نظر گرفتن اثر جذب فوتون‌ها در بازده سیاه‌چاله‌های کر مشهودتر است و اثر بیشتری نسبت به سیاه‌چاله شوارتزشیلد دارد. در واقع بازده تابشی قرص برافزایشی اطراف سیاه‌چاله کر بیشتر از بازده تابشی قرص متناظر اطراف سیاه‌چاله شوارتزشیلد است.

بررسی قرص‌های برافزایشی نسبیتی به صورت تحلیلی و دقیق تقریباً غیرممکن است؛ چرا که با در نظر گرفتن خود گرانش قرص و هیدرودینامیک نسبیتی ابتدا لازم است که متریک فضا- زمان اطراف چنین سیستمی پیدا شود. همان طور که می‌دانیم معادلات نسبیت عام انیشتین بسیار پیچیده هستند و فقط در شرایط خاص و اعمال تقارن‌های زیاد قابل حل‌اند. بنابراین برای چنین سیستم‌هایی خوب است که یک مدل

۱. Advection- dominated accretion flow

۲. Self- Similar

منطقه نزدیک تمرکز می‌کنیم. در این ناحیه گرانش در هر جایی ضعیف است و سیستم‌ها به آرامی در حال حرکتند.

## ۲. معادلات هیدرودینامیک پسا-نیوتونی

در این بخش به طور مختصر هیدرودینامیک پسا-نیوتونی را مرور می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر به [۲۱] مراجعه کنید. سیال کاملی با تانسور انرژی-تکانه  $T^{\alpha\beta}$  را در نظر می‌گیریم. همان طور که ذکر کردیم نظریه پسا-نیوتونی در میدان‌های گرانشی ضعیف و سرعت‌های پایین در مقایسه با سرعت نور معتبر است. البته هم گرانش و هم سرعت‌ها اگر چه ضعیف‌اند ولی از حالت نیوتونی قوی‌تر هستند. با در نظر گرفتن این فرضیات متریک فضا-زمان پسا-نیوتونی به صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2}{c^2}U + \frac{2}{c^4}(\Psi - U^2) + O(c^{-6}), \\ g_{0j} &= \frac{-4}{c^3}U_j + O(c^{-5}), \\ g_{jk} &= \delta_{jk}(1 + \frac{2}{c^2}U) + O(c^{-4}), \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $c$  سرعت نور است و

$$\Psi = \psi + \frac{1}{2}\partial_{tt}X, \quad (2)$$

پتانسیل‌هایی که در متریک ظاهر شده‌اند به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho^*, \quad (3)$$

$$\nabla^2 X = 2U, \quad (4)$$

$$\nabla^2 \psi = -4\pi G\rho^* \left( \frac{3}{2}v^2 - U + \Pi + \frac{3p}{\rho^*} \right), \quad (5)$$

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho^* v, \quad (6)$$

که  $U$  پتانسیل نیوتونی است،  $U$  پتانسیل برداری و  $X$  پتانسیل ویژه است که منبعش  $2U$  است. در حقیقت این معادلات جایگزین معادله پواسون در گرانش نیوتونی شده‌اند. خوشبختانه این معادلات دیفرانسیل به آسانی قابل حل هستند، بنابراین داریم

تقریبی داشته باشیم تا بتوانیم توصیفات نیوتونی را در پایین‌ترین مرتبه و اثرات نسبیّت عامی را در مرتبه‌های اختلال بالاتر به دست آوریم. خوشبختانه فرمول‌بندی مستحکمی در این خصوص در نسبیّت عام وجود دارد. این فرمول‌بندی به نام نظریه پسا-نیوتونی PN<sup>۱</sup> شناخته می‌شود و در میدان‌های گرانشی نسبتاً ضعیف و سرعت‌های نسبتاً پایین ماده کاربرد دارد.

نظریه پسا-نیوتونی، میدان گرانشی منظومه شمسی را وقتی که گرانش متقابل میان اجسام ضعیف است به طور موفقیت آمیزی توصیف می‌کند. همچنین برای اجرام فشرده با گرانش داخلی قوی کاربرد دارد. به لحاظ تاریخی انیشتین اولین بار محاسبات اثرات پسا-نیوتونی را برای انحراف مسیر حضيض خورشیدی انجام داد [۱۹]. اما مطالعات سیستماتیک پسا-نیوتونی تا زمانی که چاندراسخار و همکاران [۲۰] مقالاتی ارائه دادند انجام نشد. در حال حاضر تقریب پسا-نیوتونی در تجزیه و تحلیل تعدادی از مسائل نسبیّتی از جمله معادلات حرکت تپ اختر دوتایی، آزمون‌های نسبیّت عامی منظومه شمسی و امواج گرانشی اهمیت ویژه‌ای دارد. در این تقریب توزیعی از ماده را که در شرایط حرکت کند قرار دارد در نظر می‌گیریم. این توزیع با مقیاس طول  $r_c$  و مقیاس زمان  $t_c$  مشخص می‌شود در نتیجه سرعت مشخصه  $V_c = r_c/t_c$  را داریم. فرض می‌شود که این سرعت کوچک‌تر از سرعت نور است  $V_c/c \ll 1$ ، بنابراین منظور ما از شرایط حرکت کند را مشخص می‌کند و تمام سرعت‌های توزیع باید در مقایسه با سرعت نور کوچک‌تر باشد. اگر  $\lambda_c = ct_c$  طول موج مشخصه از تابش گرانشی تولید شده توسط توزیع ماده باشد بنابراین  $r_c \ll \lambda_c$  در نتیجه ناحیه اشغال شده توسط ماده کوچک‌تر از طول موج مشخصه است. به این ناحیه از فضا-زمان منطقه نزدیک می‌گوییم که  $r = |x| \ll \lambda_c$  تعریف می‌شود. در حالی که منطقه موج ناحیه‌ای است که در آن  $r$  در مقایسه با طول موج مشخصه بزرگ‌تر است. رفتارهای پتانسیل در این دو منطقه بسیار متفاوت است. در حالت پسا-نیوتونی ما منحصراً روی

۱. Post-Newtonian theory

$$\rho = \rho^* \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3U}{c^2}\right) + O(c^{-4}), \quad (10)$$

همچنین فرض می‌کنیم که سیال در تعادل ترمودینامیکی قرار دارد. از طرف دیگر قانون اول ترمودینامیک برای سیال

$$\text{کامل عبارت است از } d\Pi = \left(\frac{P}{\rho^*} d\rho\right). \text{ بنابراین داریم:}$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{P}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dt} + O(c^{-2}), \quad (11)$$

که در اینجا مشتق زمانی  $\frac{d}{dt} = \partial_t + v^k \partial_k$  است.

همچنین معادله موضعی پایستگی انرژی به صورت زیر است

$$\rho^* \partial_t \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi\right) + \rho^* v^j \partial_j \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi\right) + \partial_j (p v^j) - \rho^* v^j \partial_j U = 0, \quad (12)$$

و در نهایت معادله اوایلر پسا-نیوتونی به صورت زیر نوشته می‌شود. برای جزئیات بیشتر به [۲۱] مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{dv^j}{dt} = & -\partial_j p + \rho^* \partial_j U + \frac{1}{c^2} \left[ \left(\frac{1}{2} v^2 + U + \Pi + \frac{P}{\rho^*}\right) \partial_j p - v^j \partial_t p \right] \\ & + \frac{1}{c^2} \rho^* [(v^2 - 4U) \partial_j U - v^j (\partial_t U + v^k \partial_k U) + 4 \partial_t U_j \\ & + 4 v^k (\partial_k U_j - \partial_j U_k) + \partial_j \psi] + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (13)$$

معادله (۱۳) به اضافه معادله پیوستگی (۹) و معادله حالت که با فشار و چگالی و انرژی داخلی رابطه دارد، رفتار یک سیال که در یک میدان گرانشی ضعیف در حال حرکت است را تعیین می‌کنند. همان طور که ذکر شد سرعت سیال کمی بیشتر از نیوتونی و گرانش کمی قوی‌تر از گرانش نیوتونی است.

### ۳. فرض‌ها

همان طور که از روابط (۸-۱۳) مشهود است، در تقریب پسا-نیوتونی معادلات بسیار پیچیده‌تر از حالت نیوتونی هستند. بنابراین ما با در نظر گرفتن فرض‌های زیر مسئله را ساده‌تر می‌کنیم.

فرض ۱- از انرژی داخلی سیال در برابر انرژی پتانسیل گرانشی چشم پوشی می‌شود  $\Pi = 0$ . وقتی مواد قرص به صورت

$$\begin{aligned} U(t, x) &= G \int \frac{\rho^*}{|x-x'|} d^3 x', \\ \psi(t, x) &= G \int \frac{\rho^* \left(\frac{3}{2} v'^2 - U' + \Pi' + 3 \frac{P'}{\rho^*}\right)}{|x-x'|} d^3 x', \end{aligned} \quad (7)$$

$$X(t, x) = G \int \rho^* |x-x'| d^3 x',$$

$$U^j(t, x) = G \int \frac{\rho^* v'^j}{|x-x'|} d^3 x',$$

که در آن متغیرهای سیال اولیه در زمان  $t$  و مکان  $x'$  اندازه‌گیری شده‌اند. متریک پسا-نیوتونی تنها در منطقه نزدیک تقریب خوبی برای متریک فضا-زمان ایجاد می‌کند، متریک در مناطق فراتر از حد  $r = \lambda_g$  معتبر نیست. با این وجود رفتار متریک در منطقه نزدیک، به طور مستقیم به رفتار ماده بستگی دارد، بنابراین وقتی حرکت ماده کند باشد متریک نیز به کندی تغییر می‌کند.

متغیرهای ماده در تقریب پسا-نیوتونی  $\{\rho^*, p, \Pi, v\}$  هستند که  $\rho^*$  چگالی جرمی پایسته است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho^* = \sqrt{-g} \rho = \sqrt{-g} \rho \frac{u^0}{c}, \quad (8)$$

$\rho$  چگالی ویژه و  $g$  دترمینان تانسور متریک است. همچنین  $u^0$  مؤلفه صفرم چار بردار سرعت است. واضح است که در حد نیوتونی هیچ تفاوتی بین  $\rho^*$  و چگالی ویژه  $\rho$  وجود ندارد.  $P$  فشار،  $\Pi$  انرژی داخلی در واحد جرم،  $\varepsilon$  چگالی انرژی داخلی ویژه و  $v$  سرعت سیال است.

حال با در دست داشتن متریک پسا-نیوتونی، که به معنای داشتن گرانش سیستم است، اجازه دهید دیگر معادلات حاکم بر دینامیک یک سیال کامل را نیز در حد پسا-نیوتونی معرفی کنیم. معادله پیوستگی برای یک سیال کامل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\partial_t \rho^* + \partial_j (\rho^* v^j) = 0 \quad (9)$$

که  $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ . معادله پیوستگی پسا-نیوتونی مشابه معادله

پیوستگی نیوتونی است با این تفاوت که  $\rho^*$  جایگزین  $\rho$  شده است. رابطه بین چگالی انرژی  $\rho$  و  $\rho^*$  به صورت زیر است:

دیگر همان جملات وشکسانی نیوتونی را به معادلات پسا- نیوتونی اضافه می‌کنیم. لازم به ذکر است که این فرض آن چنان که در نگاه اول به نظر می‌رسد، محدود کننده نیست. در حقیقت باید در نظر داشت که در حضور وشکسانی علی‌الاصول متریک فضا- زمان نیز می‌تواند تغییر کند. به عبارت دیگر سهمی که ناشی از وشکسانی در تانسور انرژی- تکانه است باعث می‌شود که (با استفاده از معادله اینشتین) متریک فضا- زمان نیز به مشخصات وشکسانی بستگی داشته باشد. البته پر واضح است وشکسانی بسیار قوی مورد نیاز است تا بتواند در انحنای فضا- زمان نقش بازی کند. جالب اینجاست که در تقریب مرتبه اول پسا- نیوتونی (که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است) ثابت می‌شود وشکسانی سینماتیک در متریک پسا- نیوتونی ظاهر نمی‌شود [۲۲]. برای همین متریک ارائه شده در رابطه (۱) برای توصیف سیستم مناسب است و هیچ نشانه‌ای از وشکسانی سینماتیک در آن وجود ندارد. با توجه به عدم اهمیت وشکسانی سینماتیک در متریک پسا- نیوتونی، می‌توان برای سادگی از اثرات پسا- نیوتونی آن در معادلات سیالات نیز چشم پوشی کرد. با این حال برای این که بحث دقیق باشد و فرض ۵ ابهامی در نتایج نهایی ایجاد نکند، فرض می‌کنیم اندازه  $V$  به اندازه کافی کوچک است به گونه‌ای که بتوانیم از اثرات پسا- نیوتونی آن که به صورت جملاتی همانند  $\nu \frac{U}{c^2}$  ظاهر می‌شوند، چشم پوشی کنیم. این فرض با اساس فرمول‌بندی پسا- نیوتونی تناقضی ندارد. به بیان دیگر، همان گونه که انتظار می‌رود اثرات نسبیتی گرانش جسم مرکزی مورد تأکید قرار گرفته است نه اثرات وشکسانی (برای اطلاعات بیشتر مقاله [۲۲] را ببینید).

فرض ۶- از خود گرانشی قرص صرف نظر می‌شود. این بدان معنی است که جرم قرص  $m_d$  خیلی کوچک‌تر از جرم جسم مرکزی  $M$  است. بنابراین از تاثیرات گرانشی محیط اطراف صرف نظر شده و فقط گرانش جرم مرکزی در نظر گرفته می‌شود.

فرض ۷- اثر نسبیت عامی جرم مرکزی را تنها تا تقریب اول پسا- نیوتونی در نظر گرفتیم و از تقریب مرتبه‌های بالاتر

چرخشی روی جسم مرکزی فرو می‌ریزد از مقدار انرژی داخلی آزاد شده صرف نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم که همه انرژی به بیرون انتقال داده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که  $\Pi$  انرژی داخلی سیال در واحد جرم است  $\Pi = \varepsilon / \rho^*$ . این فرض مشابه فرضی است که در مقاله تورن [۱۶] استفاده شده است.

فرض ۲- فرض می‌کنیم حرکت ذرات روی قرص اطراف سیاه‌چاله به مدارهای ژئودزیک دایره ای بسیار نزدیک باشند. لازم به ذکر است که حرکت در صفحه استوا لزوماً به معنای دایره‌ای بودن مدارهای ژئودزیک نیست. به عبارت دیگر برای سادگی فرض کرده‌ایم که مدارها تقریباً دایره‌ای باشند. در این صورت چاربردار سرعت ذره روی قرص تقریباً برابر با چاربردار سرعت ذره در مدار ژئودزیک دایره‌ای در صفحه استوا است. از این فرض نتیجه می‌شود حرکت ذرات می‌تواند از لحاظ فیزیکی نزدیک به ژئودزیک باشد، تنها اگر نیروهای فشار شعاعی در برابر فشار گرانشی سیاه‌چاله نادیده گرفته شوند؛ به طوری که اگر نیروهای فشاری کنار گذاشته نشوند مسیر دیگر ژئودزیک نیست. با توجه به فرض در نظر گرفته شده برای سادگی در اینجا از نیروی ناشی از فشار  $P$  صرف نظر می‌کنیم. علی‌الاصول برای یک تحلیل دقیق‌تر لازم است تا اثرات فشار نیز به طور کامل در مسئله لحاظ شود. البته در این صورت بررسی‌های ما نشان می‌دهد که یافتن یک توصیف تحلیلی عملاً غیرممکن می‌شود.

فرض ۳- فرض می‌شود که قرص در آستانه فروریزش است و هنوز هیچ فروریزشی انجام نداده است یعنی  $\dot{M} = 0$ . آهنگ برافزایش جرم سکون است که به سمت داخل قرص جریان می‌یابد و مستقل از شعاع است.

فرض ۴-  $\rho^*$  چگالی جرمی پایسته است و در مرتبه نیوتونی هیچ برتری بین  $\rho^*$  و چگالی ویژه  $\rho$  نیست. در اینجا برای ساده‌تر شدن معادلات، چگالی جرمی را در همان مرتبه نیوتونی در نظر می‌گیریم بنابراین  $\rho^* = \rho$ .

فرض ۵- در معادلات هیدرودینامیک سیالات فرض می‌کنیم که جملات ناشی از وشکسانی نیوتونی باشند و از تصحیحات پسا- نیوتونی برای وشکسانی چشم پوشی می‌کنیم. به عبارت

صرف نظر می‌کنیم.

$\eta = \nu\rho$ . تفاوت این معادله با حالت نیوتونی آن [۲۳] تنها در

اضافه شدن جمله  $-\frac{\rho}{c^2}u_\varphi u_r \frac{dU}{dr}$  است. از آنجایی که

علاقه‌مند به تکامل قرص در مقیاس‌های زمانی طولانی هستیم، فرض کرده‌ایم قرص در تعادل هیدرواستاتیک و تعادل انرژی باشد، بهتر است که از متغیرهای انتگرال‌گیری شده عمودی استفاده کنیم. بنابراین چگالی سطحی  $\Sigma$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Sigma = \int \rho dz, \quad (17)$$

با انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی در راستای  $z$  داریم

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r \Sigma) = 0, \quad (18)$$

و به طور مشابه می‌توان نشان داد مؤلفه  $\varphi$  معادله ناوراستوکس به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Sigma \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma u_\varphi) - \frac{\nu \Sigma u_\varphi}{r^2} - \frac{\Sigma}{c^2} u_\varphi u_r \frac{dU}{dr}, \quad (19)$$

حال اگر معادله پیوستگی را در  $ru_\varphi$  و مؤلفه  $\varphi$  معادله ناوراستوکس را در  $r$  ضرب کنیم، سپس با یکدیگر جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \Sigma u_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r^2 u_\varphi u_r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^3 \frac{d\Omega_{PN}}{dr}) + \frac{\Sigma}{c^2} u_\varphi u_r \frac{dU}{dr} + \frac{MG}{r}, \quad (20)$$

در معادله بالا  $\beta$  پارامتر ثابت در رابطه پتانسیل گرانشی است  $U = \beta MG/r$ ، همچنین  $\Omega_{PN}$  سرعت زاویه‌ای پسا-نیوتونی را نشان می‌دهد و بنا به تعریف عبارت است از  $\Omega_{PN} = u_\varphi / r$ .

پسا-نیوتونی را در اثر وشکسانی نشان می‌دهد. در واقع این رابطه تکانه زاویه‌ای منتقل شده به واسطه وشکسانی لایه‌ای را نشان می‌دهد. با حذف  $u_r$  بین دو معادله (۱۸) و (۲۰) و استفاده از سرعت زاویه‌ای پسا-نیوتونی می‌توانیم معادله تحول قرص را به شکل مناسب‌تر زیر بنویسیم:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^{1/2} \left[ \left( \nu \Sigma r^{1/2} \right) + 5 \frac{\alpha MG}{rc^2} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{1/2}) - 5 \frac{\alpha MG}{r^2 c^2} (\nu \Sigma r^{1/2}) \right] (1 + (\alpha + \beta) \frac{MG}{rc^2}), \quad (21)$$

معادله (۲۱) تحول زمانی چگالی سطحی قرص برافزایشی پسا-

#### ۴. معادله تحول زمانی قرص برافزایشی پسا-نیوتونی

با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده، معادلات هیدرودینامیک سیالات در تقریب پسا-نیوتونی به صورت ساده‌تری نوشته می‌شود. بهترین دستگاه برای بررسی قرص‌های برافزایشی دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \varphi, z)$  است، زیرا قرص‌های برافزایشی دارای تقارن استوانه‌ای هستند. همچنین برای توصیف حرکت سیال تراکم پذیر وشکسان از معادله ناوراستوکس استفاده می‌کنیم. این معادله از معادله اوایلر پسا-نیوتونی به علاوه جمله ناشی از وشکسانی به دست می‌آید

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla P + \rho g + \eta [\nabla^2 u + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot u)] + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{u^2}{2} + U + \Pi + \frac{p}{\rho_*} \right] \nabla p - \frac{1}{c^2} u \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \rho [(u^2 - 4U) \nabla U - u (\frac{\partial U}{\partial t} + 4u \cdot \nabla U)], \quad (14)$$

در این معادله طبق فرض‌ها جمله ناشی از وشکسانی را همان جمله نیوتونی در نظر گرفته‌ایم. با توجه به فرضیاتی که در نظر می‌گیریم از عبارات زیر صرف نظر می‌کنیم

$$\frac{1}{c^2} u_\varphi \frac{\partial p}{\partial t}, \frac{1}{c^2} \rho [u^2 - 4U] \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial t} \frac{1}{c^2} \left[ \frac{u^2}{2} + U + \Pi + \frac{p}{\rho_*} \right] \nabla p, \quad (15)$$

مختصه شعاعی و عمودی معادله ناوراستوکس خود به خود برقرار می‌شوند در نتیجه مؤلفه  $r$  و  $z$  ناوراستوکس را کنار می‌گذاریم. مؤلفه  $\varphi$  معادله ناوراستوکس در تقریب پسا-نیوتونی عبارت است از:

$$\rho \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\eta u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) - \eta \frac{u_\varphi}{r^2} - \frac{\rho}{c^2} u_\varphi \left( 4u_r \frac{dU}{dr} \right), \quad (16)$$

در اینجا  $u_\varphi$  مؤلفه غالب سرعت است. سرعت ناشی از اثرهای وشکسانی  $u_r$  بسیار کوچک است و همچنین فرض می‌کنیم که  $u_z = 0$  و سیستم دارای تقارن محوری است  $\partial/\partial\varphi = 0$ . در ضمن ضریب وشکسانی  $\eta$  همان تعریف نیوتونی وشکسانی است

در این رابطه  $T'$  مشتق نسبت به زمان  $t$  است و  $S''$  مشتق دوم نسبت به متغیر  $s$  است. به طور معمول می‌توان طرفین معادله (۲۶) را مساوی مقدار ثابت  $\lambda^2$  - قرار داد. بنابراین برای طرف چپ معادله داریم  $\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$ . این یک معادله دیفرانسیل درجه یک است که جواب آن با رابطه زیر داده می‌شود:

$$T(t) = e^{-\lambda^2 t}, \quad (27)$$

در طرف دوم معادله با قرار دادن مقادیر ۱ و  $-\frac{3}{\nu}$  برای  $\beta$  و  $\alpha$  و با استفاده از تعریف پارامتر  $s$  معادله را حل می‌کنیم

$$S(r) = C_1 e^{-\frac{1}{3}\lambda\sqrt{-\frac{3}{\nu}}r} \text{HeunC}\left(\frac{\lambda}{3}, \lambda MG, \sqrt{-\frac{3}{\nu}}, -\frac{17}{8}, -\frac{5}{8}, \frac{16}{3}, \lambda^2 \frac{MG^2}{\nu}, \frac{181}{128}, -\frac{r}{4MG}\right) r^{-\frac{5}{8}}, \quad (28)$$

$\text{HeunC}$  توابع هیون کانفلوئنت<sup>۱</sup> هستند.

توابع هیون توابعی خاص در ریاضیات هستند که جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دو با ضرایب غیرثابت هستند. حالت کلی معادله هیون به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left[ \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right] \frac{dw}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} w = 0, \quad a \neq 0, 1, \quad (29)$$

این معادله دارای چهار نقطهٔ تکینگی منظم در نقاط  $(z = 0, 1, a, \infty)$  است. نماها در این تکینگی‌ها به ترتیب برابرند با  $(\alpha, \beta); (0, 1-\varepsilon); (0, 1-\delta); (0, 1-\gamma)$ ، در این معادله  $w$  و  $z$  به عنوان متغیرهای مختلط و جمله‌ای‌های هیون، خواص متعددی دارند که می‌توان به وجود نقطهٔ واحد دستگاه مختصات تحلیلی‌اند. توابع و چند تعامد در آنها اشاره کرد. تابع هیون در نظریهٔ سیاه‌چاله‌ها، فیزیک و مکانیک کوانتوم، فیزیک نجومی، حل معادلات موج در دستگاه کروی و برخی از مطالعات در مکانیک سیالات کاربرد دارد.

نیوتونی یا همان فرایند برافزایشی جرم تحت پخش و شکسان قرص را نشان می‌دهد. پارامتر ثابت  $\alpha$  مربوط به سرعت زاویه‌ای پسا- نیوتونی است

$$\Omega_{PN} = \sqrt{\beta \frac{MG}{r^3} \left(1 + \alpha \frac{MG}{rc^2}\right)}, \quad (22)$$

رابطه (۲۲) از رابطهٔ سرعت زاویه‌ای برای سیستم‌های دوتایی نتیجه می‌شود [۲۱]. برای سیستم قرص برافزایشی و جرم مرکزی آن، رابطهٔ سرعت زاویه‌ای برابر است با

$$\Omega^2 = \frac{Gm}{r^3} \left[ 1 - (3 - \zeta) \frac{Gm}{rc^2} + O(c^{-4}) \right], \quad (23)$$

که در آن  $\zeta$  برابر

$$\zeta = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \quad \text{و} \quad m = M_1 + M_2$$

است. در اینجا از جرم قرص برافزایشی صرف نظر می‌کنیم و فقط جرم جسم فشرده مرکزی را در نظر می‌گیریم  $m = M$ ، بنابراین سرعت زاویه‌ای پسا- نیوتونی برابر است با:

$$\Omega_{PN} = \sqrt{\frac{GM}{r^3} \left(1 - 3\gamma \frac{GM}{rc^2}\right)}, \quad (24)$$

در نتیجه پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب برابر  $-\frac{3}{\nu}$  و ۱ است.

## ۵. حل معادلهٔ تحول زمانی قرص برافزایشی

در این بخش به حل تحلیلی معادله (۲۱) می‌پردازیم. وقتی  $\nu$  تابعی از  $r$  باشد، معادلهٔ پخش توسط تابع گرین حل می‌شود و اگر تابعی از  $r$  و  $\Sigma$  باشد، حل خود متشابه خواهد داشت. اگر  $\nu$  ثابت و یا فقط تابعی از  $r$  باشد، می‌توانیم معادلهٔ تحول را به روش جداسازی متغیرها حل کنیم. در اینجا با ثابت گرفتن  $\nu$ ، متغیر جدید  $s$  را تعریف می‌کنیم  $s/\nu = \sqrt{r}$ . حال جداسازی متغیرها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{\Sigma r^2} = T(t) S(s) \quad (25)$$

با جایگذاری این تغییر متغیرها در رابطه (۲۱) داریم:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{12\nu S''(s)}{s^2 S(s)} + 128(\alpha + 3\beta) \frac{\nu MG S'(s)}{c^2 s^4 S(s)} - 32(13\alpha + 24\beta) \frac{\nu MG S'(s)}{c^2 s^5 S(s)} + 480 \frac{\nu \alpha MG}{c^2 s^6}, \quad (26)$$

۱. Confluent Heun



که منظور از  $J_{1/4}$  تابع بسل نوع  $J$  است.

در شکل ۱ تغییرات تابع  $S(R)$  نسبت به شعاع را در دو حد پسا-نیوتونی و نیوتونی مشاهده می‌کنیم. همان‌طور که انتظار داشتیم تفاوت گرانش نیوتونی و پسا-نیوتونی تنها در مناطق نزدیک مشهود است و در فواصل دور از قرص نتایج نیوتونی و پسا-نیوتونی بر هم منطبق می‌شوند. ما با بررسی گرانش پسا-نیوتونی تنها در فواصل نزدیک جرم مرکزی می‌توانیم تفاوت در نتایج این دو حد گرانشی را احساس کنیم. هر چه از مرکز فاصله می‌گیریم نمودار نیوتونی و پسا-نیوتونی به همدیگر نزدیک می‌شوند و در شعاع‌های بزرگ‌تر از  $10^6$  برابر شعاع شوارزشیلد این دو نمودار با یکدیگر برابر می‌شوند.

با توجه به رابطه (۲۵) می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\Sigma R^2} = TS \propto e^{-\lambda^2 t} e^{-i\sqrt{q}R} R^{\frac{3}{2}} \text{HeunC}\left(2i\sqrt{q}, -\frac{17}{8}, -\frac{5}{8}, q, \frac{181}{128}, -R\right), \quad (32)$$

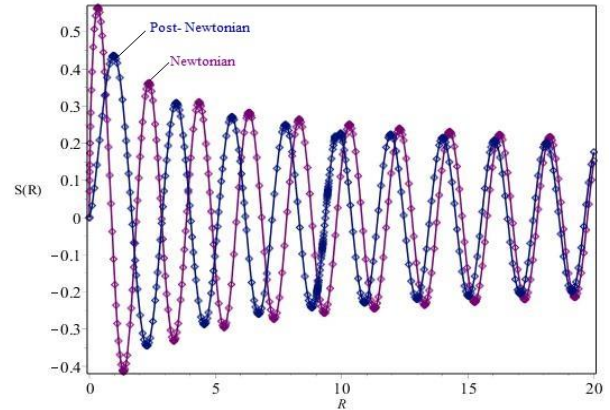
با جایگذاری متغیر بدون بعد  $q = 16\lambda^2/37$  می‌توانیم یک پارامتر بدون بعد برای زمان انتخاب کنیم که برابر با  $\tau = 37t/16$  است. بنابراین چگالی سطحی در زمان  $\tau$  و شعاع  $R$  با رابطه انتگرالی زیر داده می‌شود:

$$\Sigma(R, \tau)_{PN} = \int e^{-q\tau - i\sqrt{q}R} B(q) R \text{HeunC}\left(2i\sqrt{q}, -\frac{17}{8}, -\frac{5}{8}, q, \frac{181}{128}, -R\right) dq, \quad (33)$$

رابطه (۳۳) مهم‌ترین نتیجه این مقاله است. در حقیقت ما معادله تحول زمانی چگالی قرص را در حد پسا-نیوتونی به صورت تحلیلی حل کرده‌ایم. این در حالی است که در حالت نیوتونی فرض می‌کنیم که همه جرم قرص  $m_d$  در ابتدا در یک حلقه دایره‌ای با شعاع  $R_0$  در زمان  $t = 0$ ، متمرکز شده است، بنابراین چگالی سطحی اولیه آن تابع دلتاست. با پیدا کردن تابع گرین توزیع ماده اولیه می‌توانیم چگالی سطحی حلقه را به عنوان تابعی از موقعیت مکان و زمان به دست آوریم.

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{m_d}{\pi R_0^2 \tau x^{1/4}} \exp\left(\frac{1+x^2}{\tau}\right) I_{1/4}\left(\frac{2x}{\tau}\right), \quad (34)$$

چگالی سطحی  $\Sigma$  توسط معادله (۳۴) داده می‌شود و به عنوان



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه بخش فضایی معادله تحول در حد نیوتونی و پسا-نیوتونی در شعاع‌های مختلف.

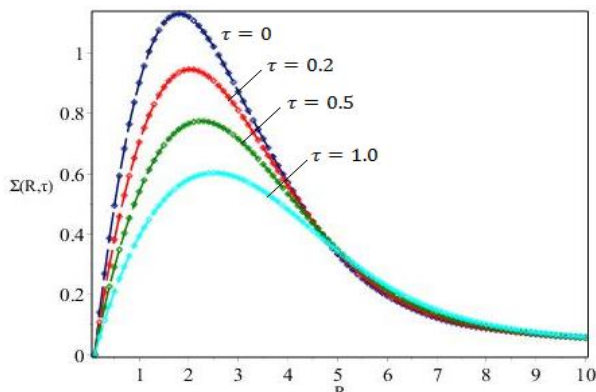
وقتی یک یا چند تا از نقاط تکیه منظم معادله هیون تبدیل به تکیه نامنظم شود این معادله تبدیل به معادله کانفلوئنس هیون می‌شود. این معادله دارای ویژگی‌های ریاضی متعددی، از جمله ارتباط تنگاتنگ با برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی از توابع خاص هستند [۲۴].

با تعریف تغییر متغیرهای بدون بعد  $R = r/4MG$  و  $q = 16MG^2\lambda^2/37$  و همچنین فرض این که  $M$  و  $G$  برابر با واحد باشند می‌توان  $S(r)$  را به صورت زیر ساده کرد:

$$S(R) = \frac{1}{4} C_1 e^{-\sqrt{q}R} \text{HeunC}\left(2\sqrt{q}, -\frac{17}{8}, -\frac{5}{8}, q, \frac{181}{128}, -R\right) + C_2 e^{-\sqrt{q}R} \text{HeunC}\left(2\sqrt{q}, -\frac{17}{8}, -\frac{5}{8}, q, \frac{181}{128}, -R\right) R^{\frac{3}{2}}, \quad (30)$$

جمله اول رابطه بالا که با  $R^{-5/8}$  متناسب است در  $R \rightarrow 0$  تکیه است. با رسم این بخش از رابطه بالا تکیگی دیده می‌شود. بنابراین این قسمت از جواب را کنار می‌گذاریم و تنها جمله متناسب با  $R^{3/2}$  باقی می‌ماند. در اینجا وابستگی فضایی برابر با تابع هیون است. همان‌طور که می‌دانیم در بررسی نیوتونی وابستگی فضایی معادله تحول برابر با تابع بسل است [۲۳].

$$S(R) = C_1 R^{\frac{1}{4}} J_{1/4}(\sqrt{q}R), \quad (31)$$

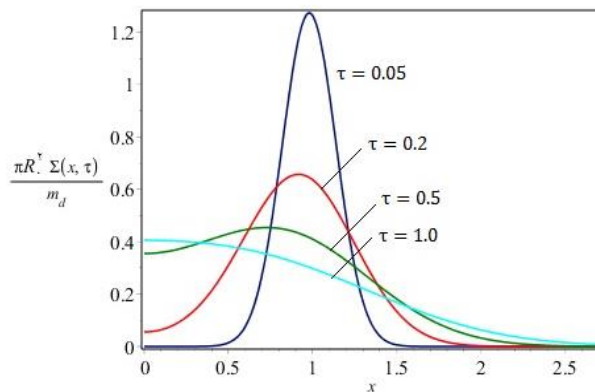


**شکل ۳.** (رنگی در نسخه الکترونیکی) تحول قرص برافزایشی وشکسان در تقریب پسا- نیوتونی. در این نمودار  $\Sigma$  چگالی سطحی یک قرص برافزایشی است که برای زمان‌های مختلف رسم شده است و  $R$  شعاع قرص است.

نتایج حد پسا- نیوتونی برابر با حالت نیوتونی است و در هر دو حد در نهایت تمام جرم قرص بر روی مرکز فرو می‌ریزد. تفاوت این دو حد تنها در نواحی نزدیک به جرم مرکزی، جایی که گرانش بسیار قوی است، قابل توجه است.

### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی تحول زمانی قرص‌های برافزایشی پسا- نیوتونی در اطراف اجرام نجومی از قبیل ستاره‌ها، سیاه‌چاله‌ها و... پرداختیم. از آنجایی که در قرص‌های اطراف سیاه‌چاله‌ها و همچنین پدیده‌هایی نظیر جت‌ها در قرص‌ها اثرات نسبیتی اهمیت ویژه‌ای دارد، بنابراین به بررسی این قرص‌ها در گرانش پسا- نیوتونی پرداختیم که اندکی به نسبت عام نزدیک‌تر است. در این گرانش سرعت‌ها کمی از نیوتونی بیشتر و گرانش نیز کمی قوی‌تر از گرانش نیوتونی است. قابل ذکر است که ما با بررسی گرانش پسا- نیوتونی تنها در فواصل نزدیک جرم مرکزی می‌توانیم تفاوت در نتایج حد گرانش پسا- نیوتونی و حد گرانش نیوتونی را احساس کنیم و در فواصل دور از قرص نتایج حد نیوتونی و پسا- نیوتونی بر هم منطبق می‌شوند. همچنین با معرفی معادلات هیدرودینامیک سیالات در حد پسا- نیوتونی و استفاده از این معادلات توانستیم معادله تحول زمانی پسا- نیوتونی



**شکل ۴.** (رنگی در نسخه الکترونیکی) سیال حلقه‌ای دارای جرم اولیه  $m_d$  و شعاع اولیه  $R_0$  است. چگالی سطحی  $\Sigma$  تابعی از مکان و زمان بدون بعد است. در این شکل پخش شدن حلقه اولیه در اثر وشکسانی به وضوح دیده می‌شود.

تابعی از شعاع بدون بعد  $x = R/R_0$  و زمان بدون بعد  $\tau = 12\sqrt{1}t/R_0^3$  است که  $\nu$  نشان دهنده وشکسانی است. در این رابطه  $I_{1/4}(2x/\tau)$  تابع بسل اصلاح شده است [۲۳]. تحول وشکسان برای حلقه به جرم  $m_d$  در گرانش نیوتونی به خوبی در شکل ۲ دیده می‌شود. این حلقه در مدار کپلری  $R/R_0$  قرار دارد و در اثر وشکسانی پخش می‌شود. شکل نشان می‌دهد که بیشتر جرم قرص در طول زمان به سمت جسم مرکزی هدایت می‌شود در حالی که مقداری از جرم قرص به شعاع‌های بزرگ‌تر جریان پیدا می‌کند. این نتیجه ناشی از پایداری تکانه زاویه‌ای است. بنابراین همه جرم قرص در نهایت درون مرکز برافزایش می‌کند و کسر ناچیزی از گاز هم تقریباً همه تکانه زاویه‌ای را به بی‌نهایت حمل می‌کند.

حال مشاهده می‌کنیم که در حد پسا- نیوتونی توابع هیون ظاهر می‌شوند. با حل عددی رابطه (۳۳) می‌توانیم تغییرات چگالی سطحی را در طول زمان مشاهده کنیم. بدین منظور با در نظر گرفتن  $B(q)$  دلخواه چگالی سطحی بر حسب شعاع در زمان‌های مختلف  $\tau$  به دست می‌آید. شکل ۳ به وضوح نشان می‌دهد که با گذر زمان، قرص برافزایشی پسا- نیوتونی به تدریج پهن‌تر می‌شود که این امر به دلیل وجود وشکسانی است. بنابراین چگالی قرص به مرور زمان کم می‌شود و در نهایت تمام جرم قرص بر روی جرم مرکزی برافزایش می‌کند.

عددی انتگرال چگالی سطحی توانستیم نمودار تغییرات چگالی سطحی بر حسب شعاع را برای یک توزیع دلخواه از ماده در حد پسا- نیوتونی رسم کنیم. در این نمودار به وضوح می‌توانیم پهن شدگی قرص بر اثر وشکسانی را در گذر زمان مشاهده کنیم.

### تقدیر و تشکر

این مقاله با حمایت دانشگاه فردوسی و با شماره اعتبار ۳۸۶۷۲ (۱۳۹۴/۰۸/۱۲) انجام شده است.

قرص برافزایشی را به دست آوریم. با حل معادله تحول، چگالی سطحی قرص برافزایشی در حد پسا- نیوتونی به دست می‌آید. با این که در حالت پسا- نیوتونی تنها یک جمله به معادله ناویر استوکس اضافه کردیم اما برای حل معادله تحول زمانی متوجه می‌شویم که بخش شعاعی پسا- نیوتونی دیگر به سادگی حالت نیوتونی آن نیست و معادله مورد نظر معادله هیون است. بنابراین به دست آوردن چگالی سطحی در این حالت آسان نیست و چگالی سطحی را بر حسب انتگرالی از توابع هیون به دست می‌آوریم. با حل

### مراجع

1. H Bondi, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **112** (1952) 195.
2. J E Pringle and M J Rees, *Astronomy & Astrophysics* **21** (1972) 1.
3. N I Shakura and A R Sunyaev, *Astronomy & Astrophysics* **24** (1973) 335.
4. A Koratkar and O Blaes, *Publications of the Astronomical Society of Japan* **111** (1999) 1.
5. ج قنبری، ش عباسی، ن جامی الاحمدی، *مجله پژوهش فیزیک ایران* **۱۱**، ۱ (۱۳۸۸).
6. J Ghanbari, Sh Abbassi and N Jami al ahmadi, *Iranian Journal of Physics Research* **11**, 1 (2011) 1.
7. B Paczynski and P J Wiita, *Astronomy & Astrophysics* **88** (1980) 23.
8. S L Shapiro and A P Lightman, *ApJ*. **204** (1976) 187.
9. R Narayan and I Yi, *ApJ*. **452** (1995) 710.
10. S Ichimaru, *ApJ*. **214** (1977) 840.
11. R Narayan, R Mahadevan, J E Grindlay, R G Popham, and C Gammie, *ApJ*. **492** (1998) 554.
12. T Manmoto, *ApJ*. **534** (2000) 734.
13. ج قنبری، ش عباسی، و آ تاج محمدی، *مجله پژوهش فیزیک ایران* **۹**، ۳ (۱۳۸۸) ۲۴۹.
12. J Ghanbari, S Abbasi, and A Tajmohammadi, *Iranian Journal of Physics Research* **9**, 3 (2009) 294.
۱۳. ف زراعتگری، ا دلخوانی، و ش عباسی، *مجله پژوهش فیزیک ایران* **۱۷**، ۵ (۱۳۹۶) ۷۳۷.
13. F Z Zeraatgari, E Delkhani, and Sh Abbasi, *Iranian Journal of Physics Research* **17**, 5 (2017) 737.
14. R Narayan and I Yi, *ApJ*. **428**(1994) L13.
15. F Yuan and R Narayan, *Astronomy & Astrophysics* **52** (2013) 529.
16. D N page and K S Thorne, *ApJ*. **191** (1973) 499.
17. K S Thorne, *ApJ*. **191** (1974) 507.
18. J M Bardeen, *Nature* **226** (1970) 64.
19. A Einstein, *S B Preuss Akad Wiss*, **47** (1915) 831.
20. S Chandrasekhar and F P Esposito, *ApJ*. **142** (1970) 153.
21. E Poisson and C Will, "Gravity Newtonian, Post Newtonian, relativistic", University of Cambridge (2014).
22. Ph J Greenberg, *ApJ*. **164** (1971) 569.
23. C J Clarke and R F Carswell, "Principles of Astrophysical Fluid Dynamics", University of Cambridge (2007).
24. A Ronveaux and F M Arscott, "Heun's Differential Equations", Oxford University Press (1995).