

محاسبه سطح مقطع کل یونش اتم‌های Ar و Ne ، He ، H در برخورد با یون‌های برهنه در محدوده انرژی‌های بالا

سعیده امیری بیدوری و رضا فتحی

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

پست الکترونیکی: rfathi@uk.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۷/۰۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۱۰/۳۰)

چکیده

در کار حاضر سطح مقطع کل یونش اتم‌های Ar و Ne ، He ، H در برخورد با یون‌های H^+ ، He^{2+} و Li^{3+} محاسبه شده است. این محاسبات با استفاده از تقریب برخورد دوتایی و در قالب یک فرایند دو جسمی بین یون پرتابه و الکترون اتمی در محدوده انرژی‌های بالا انجام شده است. به منظور وارد کردن نقش هسته اتم هدف، تابع توزیع سرعت الکترون اتمی برای اتم‌های هیدروژن، هلیوم، نئون و آرگون محاسبه و پس از آن سطح مقطع میانگین به دست آمده است. در این محاسبات برای توصیف حالت پایه اتم‌های هلیوم، نئون و آرگون توابع موج هارتری فاک به کار گرفته شده است. در محاسبات مربوط به اتم هلیوم تابع موج تک پارامتری نیز استفاده شد. در نهایت نتایج به دست آمده با نتایج تجربی و نظری در دسترس مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: یونش، سطح مقطع کل، تقریب برخورد دوتایی، تابع توزیع سرعت، تابع موج هارتری فاک

۱. مقدمه

انتقال بار در یونسفر، فیزیک نجومی و تکنولوژی لیزر و راکتورهای هم جوشی به کار گرفته می‌شود [۱-۴]. علاوه بر این مطالعه برخورد یون-اتم می‌تواند به نظریه پردازان در پیدا کردن روش‌های تقریبی برای حل مسائل چند جسمی کمک کند. در طول برخورد پرتابه یونیده با یک اتم هدف خنثی فرایندهایی از جمله برانگیختگی [۵]، انتقال بار [۶] و یونش [۷] می‌تواند رخ دهد. برای چندین دهه فرایند بنیادی یونش در برخورد یون-اتم توجه زیادی را به خود جلب کرده است، زیرا

در قرن اخیر برخوردهای اتمی نقش مهمی در توسعه فیزیک داشته است. در آغاز با آزمایش مشهور رادفورد ماهیت اتم و اجزای آن از طریق برخورد با الکترون‌ها، یون‌ها و فوتون‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. این مطالعات درک بهتر ساختار کلی اتم و همچنین تعامل بین اجزای آن (الکترون و هسته) را به ارمغان آورده است. با این حال اهمیت فیزیک برخورد خیلی فراتر از درک ساختار اتم است و در شاخه‌های مختلف فیزیک از جمله

نمی‌توان از تأثیر هسته بر روی الکترون فرودی و خروجی صرف‌نظر کرد، به عبارتی برای انتشار الکترون‌های کم انرژی هسته هدف نقش خاصی را بازی می‌کند به طوری که باید برخورد را سه‌جسمی در نظر گرفت. در صورتی که پرتابه انرژی بالایی داشته باشد می‌توان از برهم‌کنش الکترون فرودی و الکترون فعال (اتمی) با هسته هدف در طی برخورد صرف‌نظر کرد. در این صورت فرایند یونش توسط یک سازوکار دو جسمی تعیین می‌شود که به یونش برخورد دوتایی^۲ معروف است. تقریب برخورد دوتایی در سال ۱۹۵۹ توسط گریزینسکی معرفی شد و پس از آن توسط ورینز و همکاران توسعه یافت [۱۲-۱۷]. این روش یک تقریب آماری است که در آن الکترون اتمی از برهم‌کنش مستقیم با هسته آزاد است و با پرتابه به طور مستقل از هدف برهم‌کنش می‌کند و نقش هسته تنها در تعیین سرعت اولیه الکترون‌های مقید به اتم هدف نمایان شده و می‌تواند توسط نظریه کلاسیک بیان شود.

خاطر نشان می‌شود که الکترون‌های با انرژی زیاد که کاربرد بسیاری دارند به علت برخورد دوتایی تولید می‌شوند و نظریه حاضر به خوبی می‌تواند چنین برخوردهایی را توصیف کند.

۲. نظریه

در سال ۱۹۲۷ توماس [۱۸] در مقاله‌ای برای تکانه انتقال یافته (\vec{p}) در برخورد پروتون و الکترون با الکترون اتمی به ترتیب شرط‌های

$$m_1(v_1 - v_1') \leq p \leq m_1(v_1 + v_1'), \quad (1)$$

$$m_2(v_2' - v_2) \leq p \leq m_2(v_2' + v_2), \quad (2)$$

را عنوان کرد. v_1 و v_1' به ترتیب سرعت‌های اولیه و نهایی ذره فرودی بوده و m_1 و m_2 جرم پروتون و الکترون را نمایش می‌دهند. شرط مورد نظر بر حسب سرعت الکترون اتمی به صورت

$$m_2(v_2' - v_2) \leq p \leq m_2(v_2' + v_2), \quad (3)$$

نوشته می‌شود که v_2 و v_2' به ترتیب سرعت‌های اولیه و نهایی برای الکترون اتمی هستند.

این فرایند نقش مهمی در زمینه‌های مختلف فیزیک کاربردی مانند فیزیک پلاسما و فیزیک رادیویی ایفا می‌کند [۸ و ۹]. از این رو درک سازوکارهای اولیه یونش اتمی به علت اهمیت کاربردی آن اساسی است.

فرایند یونش مثالی از یک مسئله چند جسمی است [۱۰] و برخلاف سایر کانال‌های برخورد از جمله برانگیختگی و جذب الکترون، در فرایند یونش حداقل سه ذره در حالت نهایی وجود دارد. توصیف حرکت الکترونی که در ابتدا به اتم هدف مقید است و در طی برخورد با یون پرتابه آزاد می‌شود و در واقع با هر دو جسم موجود در برخورد برهم‌کنش می‌کند بسیار پیچیده است. از آنجایی که برهم‌کنش‌ها به صورت کولنی در نظر گرفته می‌شود شناخت سازوکار مربوط به انتشار الکترون توسط یون در مسائل چند جسمی مهم است. بررسی مسائل سه جسمی یک چالش بزرگ برای نظریه پردازان است به عنوان مثال فرایند یونش تک الکترونی ساده‌ترین فرایند چند ذره‌ای (سه ذره فعال) را فراهم می‌کند که معادله شرودینگر برای آن تنها با تقریب قابل حل است. یک روش شناخته شده برای حل مسئله یونش در برخورد یون-اتم کاهش مسئله سه جسمی به مسائل متناظر با برهم‌کنش‌های دو جسمی است. علاوه بر این مسائل سه جسمی اغلب با روش‌های احتمالی حل می‌شوند. تلاش برای یونش توسط نظریه‌های چهار جسمی و مراتب بالاتر نیازمند تلاش و امکانات بیشتری نسبت به روش‌های معمول است [۱۱].

تأثیر میدان‌های کولنی روی سیستم هدف، با کاهش سرعت و افزایش بار یون پرتابه افزایش می‌یابد و با توجه به آن می‌توان محدوده‌ای برای درستی نظریه‌های مختلف بیان کرد. به عنوان مثال برای پرتابه‌های با بار کم و سرعت زیاد می‌توان از تقریب بورن استفاده کرد و می‌دانیم که سری بورن برای سرعت‌های کم همگرا نیست. بنابراین می‌توان از مدل‌های بهتر از جمله تقریب CDW ، جفت شدگی نزدیک و کانال‌های جفت شده بهره گرفت.

هنگامی که پرتابه کم انرژی با الکترون برخورد می‌کند

منجر خواهد شد.

$$\left(\frac{d\sigma}{dE}\right)_{III} = 0, \quad (11)$$

اکنون با دانستن سطح مقطع جزئی $\frac{d\sigma}{dE}$ می‌توان سطح مقطع کل را با انتگرال‌گیری روی انرژی‌های ممکن محاسبه کرد. لازم به ذکر است برای فرایند یونش، حد پایین انتگرال همواره I_0 (انرژی اولین یونش) است.

با در نظر گرفتن شرطی به صورت

$$I_0 \leq 2m_p v_1 (v_1 - v_p), \quad (12)$$

هم شرط مورد اول و هم شرط مورد دوم برآورده خواهد شد؛ بنابراین سطح مقطع برای چنین حالتی با انتگرال

$$\sigma_1 = \int_{I_0}^{2m_p v_1 (v_1 - v_p)} \left(\frac{d\sigma}{dE}\right)_I dE + \int_{2m_p v_1 (v_1 - v_p)}^{2m_p v_1 (v_1 + v_p)} \left(\frac{d\sigma}{dE}\right)_{II} dE, \quad (13)$$

محاسبه خواهد شد. سهم دیگر سطح مقطع کل با شرط

$$2m_p v_1 (v_1 - v_p) \leq I_0 \leq 2m_p v_1 (v_1 + v_p), \quad (14)$$

و انتگرالی به صورت

$$\sigma_p = \int_{I_0}^{2m_p v_1 (v_1 + v_p)} \left(\frac{d\sigma}{dE}\right)_{II} dE, \quad (15)$$

به دست خواهد آمد.

تا اینجا بر پایه روش تقریب برخورد دوتایی و در قالب یک فرایند دوجسمی با حذف اثرات هسته‌ای سطح مقطع کل یونش محاسبه شد. اکنون به منظور وارد کردن نقش هسته توجه می‌شود که الکترون‌های مقید می‌توانند تابع توزیع سرعت $f(v_p)$ داشته باشند و برای محاسبه سطح مقطع یونش لازم است با استفاده از تابع توزیع الکترون‌های اتمی یک میانگین‌گیری به صورت

$$\bar{\sigma} = \int_0^{v_1 - \frac{I_0}{2m_p v_1}} \sigma_1 f(v_p) dv_p + \int_{v_1 - \frac{I_0}{2m_p v_1}}^\infty \sigma_p f(v_p) dv_p, \quad (16)$$

انجام شود. برای این کار تابع توزیع به صورت

$$f(v_p) = 4\pi v_p^2 \rho_{n,l}, \quad (17)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن

در این مقاله برخورد پروتون با الکترون اتمی مورد بحث است. سطح مقطع جزئی برای فرایند یونش در چنین برخوردی با استفاده از محاسبات گریزیسکی در مقالات [۱۳ و ۱۴] به صورت

$$\frac{d^2\sigma}{dE dp} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{v_1^2 P^2 v_p}, \quad (4)$$

محاسبه شده است. از آنجایی که جرم پروتون بسیار بزرگ‌تر از جرم الکترون است، تغییرات سرعت پروتون در طی برخورد قابل توجه نیست. از طرفی حد بالای $m_p(v_1 + v_1')$ همواره بزرگ‌تر از حد بالای $m_p(v_1' + v_p)$ است و بنابراین غیرضروری است.

همچنین حد پایین $m_p(v_1 - v_1')$ را می‌توان به وسیله $\frac{E}{v_1}$ جایگزین کرد، بنابراین برای برخورد پروتون با اتم شرط

$$\frac{E}{v_1} \leq p, \quad (5)$$

بیان می‌شود. برای ارزیابی فرمول سطح مقطع برخورد پروتون با الکترون اتمی با استفاده از شرط‌های (۱)، (۳) و (۵) مسئله به سه مورد تقسیم شده است. مورد اول (I) حالتی است که

$$\frac{E}{v_1} \leq m_p(v_p' + v_p), \quad (6)$$

برای چنین موردی با انتگرال‌گیری از سطح مقطع جزئی و جایگذاری حدود عبارت

$$\left(\frac{d\sigma}{dE}\right)_I = \frac{4\pi e^4}{m_p v_1^2} \left(\frac{1}{E} + \frac{2mv_p^2}{3E^3} \right), \quad (7)$$

حاصل می‌شود. برای مورد دوم (II) عبارت

$$m_p(v_p' - v_p) \leq \frac{E}{v_1} \leq m_p(v_p' + v_p), \quad (8)$$

در نظر گرفته شده و انتگرال‌گیری از رابطه (۴) عبارت

$$\left(\frac{d\sigma}{dE}\right)_{II} = \frac{\pi e^4}{3v_1^2 v_p E^3} \left\{ 2v_1^3 - \frac{1}{3}(v_p' - v_p)^3 \right\}, \quad (9)$$

را نتیجه می‌دهد. در نهایت مورد (III)

$$\frac{E}{v_1} \geq m_p(v_p' + v_p), \quad (10)$$

بررسی می‌شود. در این حالت با توجه به فرض انرژی‌های بالا و کوچک بودن تکانه انتقال یافته سطح مقطع به مقدار صفر

جدول ۱. ثابت‌های موجود در تابع توزیع اتم هلیوم.

ξ_1	۲,۵۹۲۱۵	ξ_1	۱,۴۱۷۱۴
ξ_2	۱,۶۳۷۴۱	ξ_2	۲,۳۷۶۸۲
ξ_3	۰,۷۵۲۴۲۹	ξ_3	۴,۳۹۶۲۸
ξ_4	-۰,۳۳۱۴۵۲	ξ_4	۶,۵۲۶۹۹
ξ_5	۰,۱۰۲۹۵۱	ξ_5	۷,۹۴۲۵۲

با جایگذاری توابع توزیع مربوطه در معادله (۱۸) و محاسبه انتگرال، سطح مقطع کل یونش در برخورد پروتون و در حالت کلی‌تر یون‌های برهنه با اتم‌های هیدروژن، هلیوم، نئون و آرگون محاسبه خواهد شد. لازم به ذکر است که عبارت حاصل برای تابع توزیع اتم‌های نئون و آرگون به دلیل زیاد بودن تعداد جملات آورده نشده است.

۳. نتیجه‌گیری و بحث

در این بخش نتایج سطح مقطع کل حاصل از جایگذاری توابع توزیع در رابطه (۱۸) برای یون‌های مختلف در برخورد با اتم‌های هیدروژن، هلیوم، نئون و آرگون ارائه شده است. در شکل ۱ سطح مقطع کل یونش در برخورد پروتون با اتم هیدروژن با نتایج تجربی [۲۱] و نتایج حاصل از تقریب سه جسمی گلابیر [۲۲] و روش پیچیده $CDW - EIS$ [۲۳] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود با افزایش انرژی پرتابه همخوانی و روند نتایج کار حاضر با نتایج تجربی و دو تقریب دیگر بیشتر است. مقایسه سطح مقطع کل برای برخورد یون‌های برهنه He^{2+} و Li^{3+} با اتم هیدروژن در شکل‌های ۲ و ۳ ارائه شده است. تطابق نتایج کار حاضر با نتایج تقریب گلابیر و روش $CDW - EIS$ در برخورد یون He^{2+} با اتم هیدروژن مشهود است. همان‌طور که از یک نظریه کلاسیک انتظار می‌رود با افزایش انرژی و همچنین با سنگین‌تر شدن یون فرودی نتایج کار حاضر به نتایج تجربی نزدیک‌تر می‌شود. با توجه به این که تقریب به‌کار گرفته شده در خصوص انرژی‌های بالای برخورد است لذا پیش‌بینی می‌شود که در

$$\rho_{n,l}(v_p) = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |\Phi_{nlm}(v_p)|^2, \quad (18)$$

و

$$\Phi_{nlm}(v_p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \phi_{nlm}(\vec{r}) e^{i\vec{v}_p \cdot \vec{r}} d\vec{r}, \quad (19)$$

است. ϕ_{nlm} تابع موج اتم هدف است. به عنوان مثال با استفاده از تابع موج پایه اتم هیدروژن [۱۹] و در نظر گرفتن تابع موج تک پارامتری و هارتری فاک [۲۰] برای حالت پایه اتم هلیوم به ترتیب توابع توزیع

$$f(v_p)_H = \frac{3^2 v_p^2}{\pi(1+v_p^2)^2}, \quad (20)$$

$$f(v_p)_{He(\text{Single Parameter})} = \frac{4\eta C_T}{\pi\sqrt{2}(\eta^2 + v_p^2)^2}, \quad (21)$$

$$C_T = 2,1921, \eta = 1,6875,$$

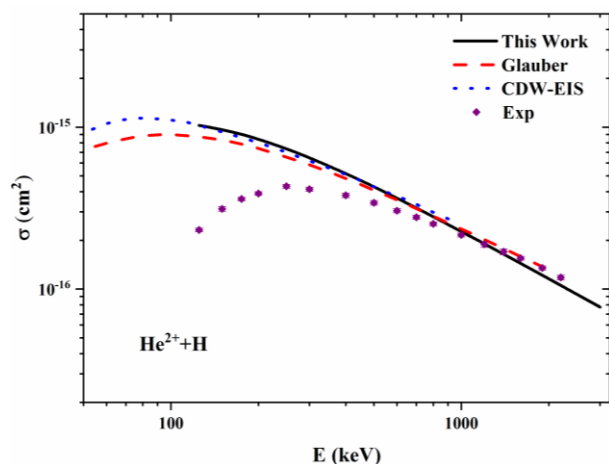
و

$$f(v_p)_{He(\text{HartreeFock})} = \frac{v_p^2}{2\pi} \mathfrak{F}, \quad (22)$$

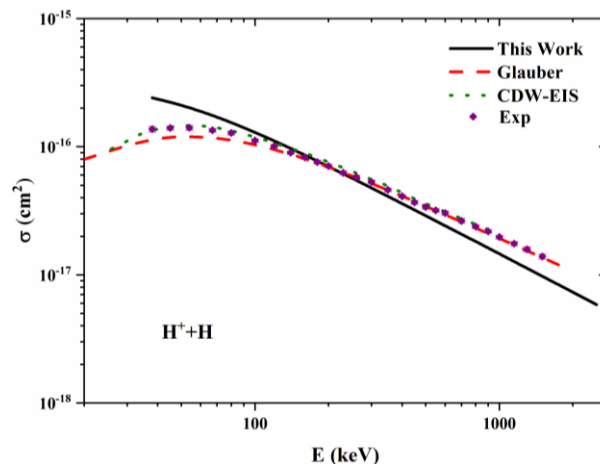
که

$$\mathfrak{F} = \left[\frac{4\xi_1\xi_1}{(\xi_1^2 + v_p^2)^2} + \frac{4\xi_2\xi_2}{(\xi_2^2 + v_p^2)^2} + \frac{4\xi_3\xi_3}{(\xi_3^2 + v_p^2)^2} + \frac{4\xi_4\xi_4}{(\xi_4^2 + v_p^2)^2} + \frac{4\xi_5\xi_5}{(\xi_5^2 + v_p^2)^2} \right] \quad (23)$$

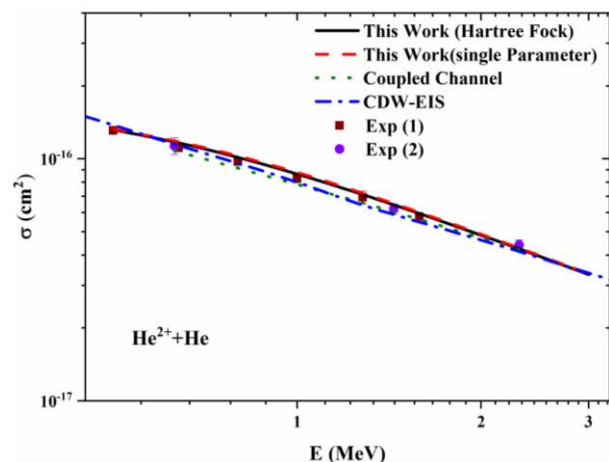
برای الکترون در حالت پایه این اتم‌ها حاصل شده است. ثابت‌های به کار گرفته شده در عبارت (۲۳) در جدول ۱ ارائه شده است.



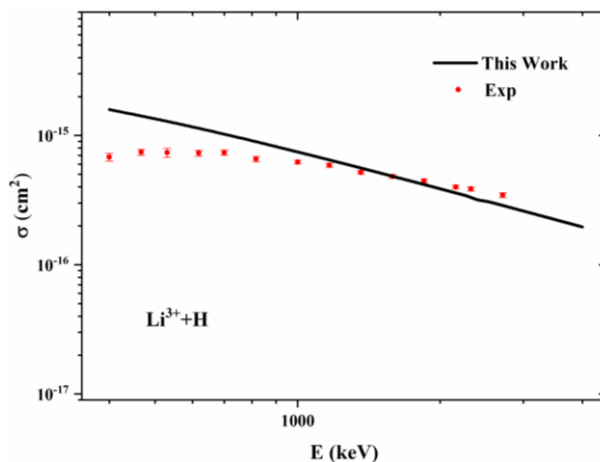
شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه سطح مقطع کل برخورد یون He^{2+} با اتم هیدروژن با نتایج تجربی [۲۱] و نتایج تقریب گلابر [۲۲] و تقریب $CDW-EIS$ [۲۳].



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه سطح مقطع کل برخورد پروتون با اتم هیدروژن با نتایج تجربی [۲۱] و نتایج تقریب گلابر [۲۲] و تقریب $CDW-EIS$ [۲۳].



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه سطح مقطع کل برخورد یون He^{2+} با اتم هلیوم با نتایج تجربی و نتایج نظری کانالهای جفت شده و $CDW-EIS$ [۲۵-۲۷].



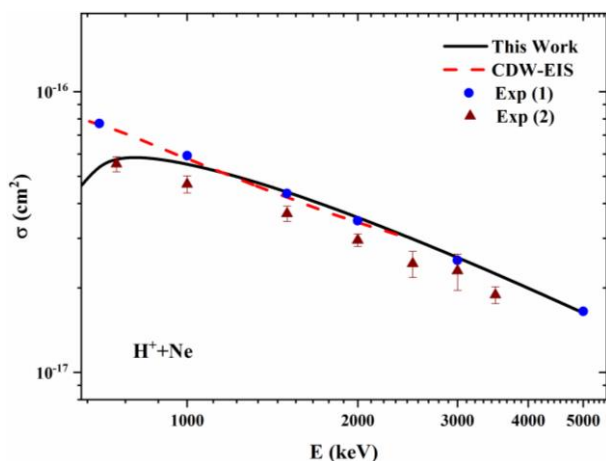
شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه سطح مقطع کل برخورد یون Li^{3+} با اتم هیدروژن با نتایج تجربی [۲۴].

است. لذا به منظور در نظر گرفتن نقش الکترون دوم لازم است نتایج حاصل در تعداد الکترون های اتم ضرب شود. همان طور که در شکل ۴ نمایان است نتایج حاصل از محاسبه تابع توزیع با استفاده از تابع موج تک پارامتری و تابع موج هارتری فاک با اختلاف بسیار ناچیز یکسان است و همخوانی بسیار خوبی را با نتایج تجربی و نظری نشان می دهد.

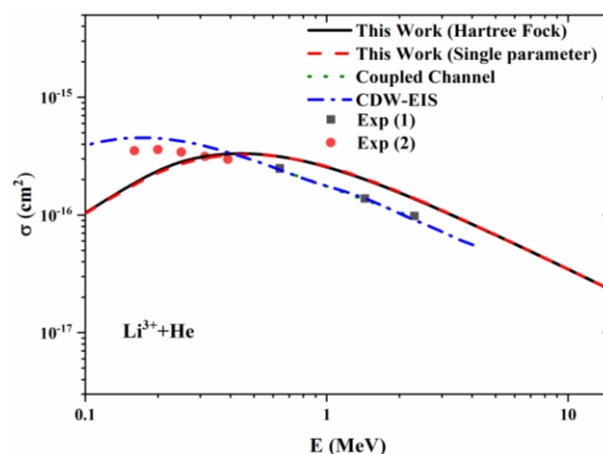
در شکل ۵ سطح مقطع کل برخورد اتم هلیوم با یون Li^{3+} نمایش داده شده است. همخوانی نتایج حاصل از

صورت در دسترس بودن نتایج تجربی و نظری برای انرژی های بالاتر همخوانی بهتری مشاهده شود.

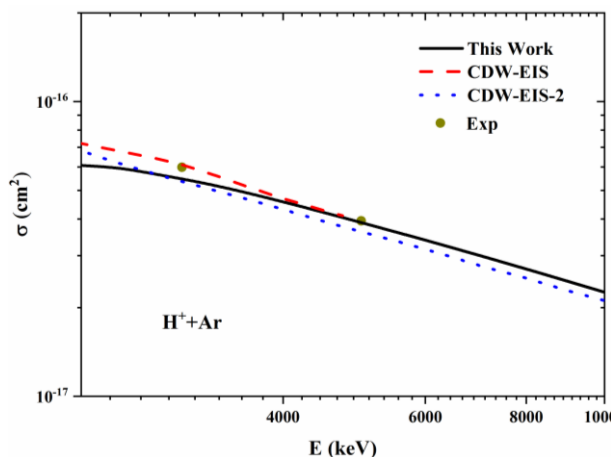
سطح مقطع کل یونش در برخورد یون He^{2+} با اتم هلیوم در مقایسه با نتایج تجربی و نتایج نظری کانالهای جفت شده و $CDW-EIS$ [۲۵-۲۷] در شکل ۴ نمایش داده شده است. در تقریب حاضر برای محاسبه یونش یگانه تنها برهم کنش الکترون فعال که در فرایند شرکت کرده و از اتم جدا می شود در نظر گرفته شده و تابع توزیع نیز برای یک الکترون محاسبه شده



شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه سطح مقطع کل برخورد پروتون با اتم نئون با نتایج تجربی و نظری $CDW - EIS$ [۲۸-۳۰].



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه سطح مقطع کل برخورد یون Li^{3+} با اتم هلیوم با نتایج تجربی و نتایج نظری کانال‌های جفت شده [۲۵-۲۷].



شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه سطح مقطع کل برخورد پروتون با اتم آرگون با نتایج تجربی و نظری $CDW - EIS$ [۲۸، ۲۹ و ۳۱].

نمایانگر این نکته است که تقریب دوجسمی در نظر گرفته شده، در صورت انتخاب درست تابع موج و محاسبه دقیق تابع توزیع در محدوده انرژی‌های بالا برای اتم‌های سنگین با تعداد الکترون بالا نیز به نتایج صحیحی منجر خواهد شد. در صورتی که این محاسبات توسط نظریه‌های کوانتومی و خصوصاً روش‌های اختلالی که برای انرژی‌های بالا به کار گرفته می‌شود برای اتم‌های چند الکترونی بسیار پیچیده بوده و به راحتی قابل دسترس نخواهد بود.

همان طور که در مقدمه نیز عنوان شد، الکترون‌های با انرژی زیاد به علت برخورد دوتایی تولید می‌شوند و الکترون فرودی و

جایگذاری تابع موج تک پارامتری و تابع موج هارتری فاک مشهود است و با افزایش انرژی نتایج به نتایج تجربی و نتایج نظری کانال‌های جفت شده و $CDW - EIS$ [۲۵-۲۷] نزدیک‌تر می‌شود.

در شکل ۶ مقایسه نتایج سطح مقطع کل در برخورد پروتون با اتم نئون با نتایج نظری $CDW - EIS$ [۲۸] و نتایج تجربی [۲۹ و ۳۰] آورده شده است. در نهایت سطح مقطع کل برخورد پروتون با اتم آرگون با نتایج تجربی [۲۹] و نظری $CDW - EIS$ [۲۸ و ۳۱] در شکل ۷ آورده شده است. همخوانی بسیار خوب مشاهده شده در شکل‌های ۶ و ۷

میانگین‌گیری دقیق‌تری روی سطح مقطع کل انجام داد. یکی دیگر از مزایای این روش ساده‌تر بودن محاسبات در مقایسه با روش‌های کوانتومی سه‌جسمی و چهارجسمی از جمله $CDW - EIS$ است به طوری که با نرم‌افزارهای ریاضیاتی رایج و کامپیوترهای شخصی قابل انجام است.

الکترون فعال برهم‌کنش چندانی با هسته هدف ندارند. لذا با توجه به نتایج ارائه شده در نمودارهای ۱ تا ۷، برای چنین کاربردهایی استفاده از نظریه حاضر می‌تواند بسیار مفید باشد. برای رسیدن به نتایج بهتر می‌توان توابع توزیع را با استفاده از توابع موج دقیق‌تر و یا روش‌های دیگر محاسبه کرده و

مراجع

1. D L Matthews. *Nucl. Instrum. Methods B* **9** (1995) 91.
2. K D Kuntz *et al.*, *ApJ* **808** 143 (2015)
3. M Von Hellermann, W Mandl, H P Summers, A Boileau, and R Hoekstra, *Plasma Phys. Control. Fusion* **33**, 14 (1991) 1805.
4. E Wolfrum, F Aumayr, D Wutte, H P Winter, and E Hintz, *Rev. Sci. Instrum* **64**, 8 (1993) 2285.
5. R Fathi and S Amiri bidvari, *Iran. J. Phys. Res.* **17**, 1 (2017) 101.
۵. ر فتحی و س امیری بیدوری، مجله پژوهش فیزیک ایران **۱۷**، ۱ (۱۳۹۶) ۱۰۱.
6. R Fathi and H Pishkooi, *Iran. J. Phys. Res.* **17**, 3 (2017) 433.
۶. ر فتحی و ح پیشکوی، مجله پژوهش فیزیک ایران **۱۷**، ۳ (۱۳۹۶) ۴۳۳.
7. L Gulyas, I Toth, and L Nagy, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46** (2013) 075201
8. R I C Janeve, *IAEA Bulletin* **31** (1989) 28.
9. W Lip, J Tanner, Y JamilT, and F Gallagher, *Eur. Phys. J. D* **40** (2006) 27.
10. M Schulz, R Moshhammer, A N Perumal, and J Ullrich, *J. Phys. B* **35** (2002) L161.
11. S Azizan, R Fathi, and F Shojaei, *The European Physical Journal D* **71**, 21 (2017) 1.
12. M Gryzinski, *Phys. Rev.* **115** (1959) 374.
13. M Gryzinski, *Phys. Rev.* **138** (1965) 305.
14. M Gryzinski, *Phys. Rev.* **138** (1965) 322.
15. M Gryzinski, *Phys. Rev.* **138** (1959) 336.
16. L Vriens, *Phys. Rev* **141** (1966) 88.
17. L Vriens, *Phys. Rev* **141** (1966) 88.
18. L H Thomas, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **23** (1927) 713.
19. R H Landau, "Quantum mechanics II", Wiley-VCH, Second Edition (2004) ch. 4.
20. E Clementi and C Roetti, *At. Data Nucl. Data Tables* **14** (1974) 177.
21. M B Shah and H B Gilbody, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **14** (1981) 2361.
22. J H Mc Guire, *Phys. Rev. A* **26** (1982) 143.
23. D S F Crothers and J F McCann, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **16** (1983) 3229.
24. M B Shah and H B Gilbody, *J. Phys. B: At. Mol. Phys* **15** (1982) 413.
25. I F Barna, K Tokesi, and J Burgdorfer, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38** (2005) 1001.
26. M B Shah and H B Gilbody, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **18** (1985) 899.
27. P D Fainsteint, V H Poncet, and R D Rivarola, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **24** (1991) 3091.
28. T Kirchner, L Gulyas, H J Ludde, A Henne, E Engel, and RM Dreizler, *Phys. Rev. Letter* **79** (1997) 1658.
29. M E Rudd, Y K Kim, D H Madison, and J W Gallagher, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 965.
30. E G Cavalcanti, G M Sigaud, E C Montenegro, M M Sant'Anna, and H Schmidt-Bocking, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** (2002) 3937.
31. C C Montanari and J E Miraglia, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45** (2012) 105201.