

## بررسی عددی و شبیه‌سازی رایانه‌ای مدل فنر - قطعه

محمدرضا سرکرده‌ای

گروه فیزیک، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران، کدپستی ۱۹۸۳۴

(دریافت مقاله: ۷۹/۵/۱۶ دریافت نسخه نهایی: ۷۹/۱۰/۲۸)

### چکیده

در این مقاله پدیده چسبش - لغزش را برای مدل یک بعدی یک دستگاه دینامیکی غیرخطی شامل آرایه‌ای از  $N$  اتم مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مدل بیانگر ویژگیهای آماری و دینامیکی دستگاه‌های اتلاقی است. مدل فنر - قطعه ساده‌ترین مدل دستگاه‌های پیچیده واقعی مانند زلزله است که نیاز به شبیه‌سازیهای بسیار پیچیده و سنگین رایانه‌ای دارند، اما مزیت این مدل در این است که با منابع و مراکز محدود رایانه‌ای نیز می‌توان با آن کار کرد. بدین منظور حل عددی معادلات حرکت مدل فنر - قطعه با دینامیک چسبش - لغزش ارائه می‌شود. رفتار آماری و دینامیکی این مدل در دسته‌های مختلف و مقیاسهای گوناگون سرعت مطالعه می‌شود. مشخصه‌های چسبش - لغزش با بهره‌گیری از تحلیل آماری و دینامیکی داده‌ها بررسی می‌گردد. در اینجا تاکید به طور عمده بر دسته سرعت‌های خیلی کم و خیلی زیاد استوار است. نشان داده می‌شود که وقتی از گروه سرعت کم به ناحیه متوسط و سپس به ناحیه سرعت زیاد می‌رویم تغییر واضحی در توزیع نیروی لغزش ایجاد می‌شود. این تغییر رفتار وابسته به توزیع گوسی در ناحیه سرعت کم به رفتار ضربه‌ای در سرعت متوسط و به توزیع وارون گوسی در سرعت زیاد است. سرانجام، نشان داده می‌شود که تبدیل فوریه نوسانهای نیروی فنر به خوبی بر حسب دسته  $\frac{1}{f}$  توصیف می‌شود.

واژه‌های کلیدی: سیستمهای دینامیکی غیرخطی، تحلیل آماری و دینامیکی، دینامیک چسبش-لغزش، تحلیل فوریه، طیف توان، زمین لرزه، اصطکاک غیرخطی.

### ۱. مقدمه

امید وجود دارد که درک بهتر پدیده چسبش - لغزش ماهیت درونی اصطکاک و رفتار آماری نیروی اصطکاک را روشن سازد. بسیاری از دستگاه‌های فیزیکی نیز رفتار چسبش - لغزش را از خود نمایش می‌دهند. از آن جمله می‌توان از  $\text{depinning}$  امواج چگالی بار (CDW)، بلورهای ویگنز، دیواره‌های بلوخ، میخ شدگی سطوح در حال رشد، شبکه‌های شار در ابر رساناهای نوع II، و غیره نام برد [۲]. اخیراً نیز به ویژه با توجه به مفهوم «بحرانی شدن خود - سازمان یافته»، ارتباط نزدیکی بین پدیده چسبش - لغزش و لرزه نگاری گسل در پوسته زمین به

لغزش به عنوان پدیده‌ای ناپیوسته از مدت‌ها پیش شناخته شده است. این حرکت همیشه با تکانهای ناگهانی و تند همراه است. مثلاً سطوح فلزی به یک دیگر می‌چسبند، تا این که در اثر افزایش تدریجی نیروی کشش، یک شکست و جدایی ناگهانی در سطوح به وجود آید که نتیجه آن لغزش بسیار سریع سطوح فلزی نسبت به هم است [۱]. تکرار این رفتار، حرکت چسبش - لغزش نامیده می‌شود. سالهای نسبتاً زیادی است که این پدیده در اصطکاک شناخته شده و مورد پژوهش قرار گرفته است. این

مختلف به روشهای عددی حل می‌شوند. این مجموعه‌ای از  $N$  معادله دیفرانسیل غیرخطی است و حالت دستگاه با نقطه‌ای در فضای فاز  $2N$  بعدی نمایش داده می‌شود. دستگاه نسبت به انتخاب شرایط اولیه و شرایط مرزی حساس بوده و پاسخهای مختلف به دست می‌آید. در این بررسی اشاره به طور عمده به شرایط ایجاد آشوب و بی‌نظمی در دستگاه بوده است و اینکه چگونه پدیده چسبش - لغزش از نوع واهلشی یا لغزش پیوسته از این مدل ساده ظاهر می‌شود. این رفتار در حالت کلی در دسته سرعت رانش بسیار کم و زیاد صورت می‌گیرد. در این مقاله به بررسی رفتار دستگاه در محدوده دسته سرعت رانش متوسط و شرایطی که سبب ایجاد نظم و رفتار دوره‌ای می‌شود، پرداخته نمی‌شود.

در تمام محاسبات عددی دستگاه را از حالت اولیه به طور کاملاً تصادفی به حرکت وا می‌داریم، و بررسیهای شبیه‌سازی را پس از گذشت مدت زمان گذرا آغاز می‌کنیم تا دستگاه کاملاً در وضعیت جدید جا بیفتد.

در بخش ۲، نخست مدل یک بعدی فنر - قطعه توضیح داده می‌شود. آنگاه معادلات حرکت استخراج می‌شوند. در این رابطه شرایط مرزی آزاد را برمی‌گزینیم. در بخش ۳، نتایج شبیه‌سازی رایانه‌ای تجزیه و تحلیل می‌گردد. ابتدا براساس تحلیل آماری به توزیع نیروی لغزش و توزیع اندازه لغزش می‌پردازیم. سپس در ادامه بر پایه تحلیل دینامیکی، به کمک آنالیز طیفی رفتار دینامیکی نیروی الاستیکی کل وارد بر دستگاه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش ۴، گفتار پایانی، به نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود و برخی از کاربردهای مدل فنر - قطعه را یادآوری می‌کنیم.

## ۲. مدل یک بعدی فنر - قطعه

مدل یکنواخت یک بعدی شامل  $N$  قطعه با جرمهای مساوی  $m$  است که میان دو صفحه در وضعیت  $X_j(t)$  در راستای محور  $x$  قرار دارند که در آن  $j=1, 2, \dots, N$ . این آرایه را می‌توان به عنوان گسل لایه‌ای یک بعدی بین دو صفحه تکتونیک، یا به عنوان محور جابه‌جایی زنجیره یک بعدی اتمها، در نظر گرفت. جابه‌جایی قطعه  $j$ ام،  $X_j$  است که نسبت به مکان تعادل اولیه آن اندازه‌گیری می‌شود. هر قطعه با ضریب سختی  $k_c$  به دو قطعه مجاور متصل است. همچنین هر قطعه از طریق تیرهای فنری با

وجود آمده که توجه زیادی را به خود معطوف کرده است [۴ و ۳]. رفتار فوق در بعضی دستگاه‌های هیدرودینامیک با خطوط تماس متحرک در سطح جامد [۵] و همچنین در بعضی از ابزار زهی موسیقی مانند ویلن مشاهده می‌شود [۶]. در حالت کلی دو نوع دینامیک متمایز در حرکت چسبش - لغزش وجود دارد که با آزمایش نیز تایید شده است [۷، ۸ و ۹].

الف. پدیده چسبش - لغزش در حالت کلی (برای سرعت رانش یا کشش کاملاً کوچک) از نوع واهلشی است، که شامل دوره طولانی چسبش است که با دوره‌های کوتاه لغزش قطع می‌گردد، و سریهای زمانی حاصل از کل نیروی خارجی الاستیک وارد بر دستگاه نمایش دنداده اراهی دارند.

ب. برای سرعت رانش زیاد که لغزش پیوسته دستگاه صورت می‌گیرد، نمایش نیرو نوسانی اما معمولاً غیردوره‌ای است. دستگاه هنوز در دسته چسبش - لغزش قرار دارد. این پدیده را هماهنگ میرا با لغزش پیوسته می‌توان نام نهاد.

یکی از جنبه‌های مهم فیزیکی مشترک دستگاه‌های با نمایش چسبش - لغزش وجود پدیده بهمن است که بنا بر آن دستگاه از حالت فوق پایدار به حالت فوق پایدار دیگر حرکت می‌کند. شرط لازم برای وجود بهمن، وجود آستانه معین است. همچنین تابع اصطکاک باید با افزایش سرعت به سمت صفر میل کند. از اینرو ما در بررسی خود معادله انتخاب شده در مدل کارلسون - لانگر را برای قانون اصطکاک برمی‌گزینیم و انتظار داریم که تحت شرایط توصیف شده در بالا انتخابی مناسب باشد. بدیهی است که شکلهای دیگری نیز وجود دارد مثلاً، تابع نمایی، تابع گوسی و غیره.

در حل عددی معادلات حرکت مدل فنر - قطعه با دینامیک چسبش - لغزش، رفتار آماری و دینامیکی این مدل در دسته‌های مختلف و در مقیاسهای گوناگون سرعت رانش مورد بررسی قرار می‌گیرد. روشهای مختلفی برای انتگرال‌گیری از معادلات حرکت می‌توان به کار گرفت. ما نوع ساده رانگ-کوتا<sup>۱</sup> مرتبه دو و در نهایت مرتبه چهارم را به کار برده‌ایم. در اینجا، دستگاه مورد بحث با سرعت ثابت و در حضور تابع اصطکاک نزولی وابسته به سرعت به حرکت در می‌آید. این فرض با رویدادهای طبیعی مانند حرکت صفحات تکتونیک در بررسیهای لرزه نگاری، بیشتر سازگار است. در اینجا حرکت دو صفحه با سرعت ثابت نسبت به هم پذیرفته شده است. مقادیر اولیه جابه‌جایی و سرعت هر قطعه به طور تصادفی انتخاب می‌شوند و آنگاه معادلات دیفرانسیل حرکت با شرایط مرزی

1. Runge-Kutta

شرایط موجود در معادله (۲) نمایشگر اثرات انتهایی دستگاه، شرایط مرزی آزاد، هستند که به صورت معادلات حرکت برای دو ذره اول و آخر نوشته می‌شوند:

$$m\ddot{X}_1 = k_c(X_1 - X_0) + k_p(vt - X_1) + F(\dot{X}_1) \quad (3)$$

$$m\ddot{X}_N = k_c(-X_N + X_{N-1}) + k_p(vt - X_N) + F(\dot{X}_N) \quad (4)$$

تابع  $F(\dot{X}_j)$  نیروی غیرخطی اصطکاک چسبش - لغزش است، و معمولاً در یک انتخاب مناسب به شکل زیر است:

$$F(\dot{X}_j) = -\frac{F_0}{1 + |\dot{X}_j/v_f|} \text{Sgn}(\dot{X}_j) \quad (5)$$

پارامتر  $v_f$  مشخصه تابع وابسته به سرعت اصطکاک و یک سرعت مرجع است که می‌توان با انتخاب واحدهای مناسب آن را برابر واحد گرفت. تابع علامت  $\text{Sgn}(\dot{X}_j)$  گویایی مخالف بودن جهت نیروی  $F(\dot{X}_j)$  با جهت سرعت قطعه است.  $F_0$  مقدار آستانه نیروی اصطکاک، کمیتی است که اصطکاک استاتیک را اندازه می‌گیرد و باید بر آن غلبه کرد تا تکان یا لغزش صورت گیرد. تابع اصطکاک دارای ویژگیهای زیر است: الف. اگر قدرمطلق مجموع نیروهای الاستیک کمتر از  $F_0$  و سرعت  $\dot{X}_j$  صفر باشد، این مجموع با نیروی اصطکاک توازن دارد.

ب. چنانچه مجموع یاد شده خارج از ناحیه  $F_0$  و  $\dot{X}_j$  نیز همچنان صفر باشد آنگاه جمع نیروها به مقدار آستانه  $\pm F_0$  کاهش می‌یابد.

ج. اگر سرعت صفر نباشد تابع نیرو با رابطه (۵) داده می‌شود. بدین ترتیب دشواری نقطه انفصال در تابع اصطکاک در  $\dot{X}_j = 0$  از بین می‌رود.

#### ۴. تجزیه و تحلیل نتایج شبیه‌سازی

از دو روش عمده در تجزیه و تحلیل داده‌های به دست آمده استفاده می‌شود. نخست، تقسیم بندی داده‌های خام فقط برای خود رویدادها که به نام تحلیل آماری خوانده می‌شود. در تحلیل آماری چهار پارامتر وابسته به یک رویداد ثبت و بررسی می‌شود: نیروی لغزش، اندازه لغزش، فاصله زمانی بین دو لغزش و زمان لغزش (یا دوره لغزش). شیوه دوم تحلیل دینامیکی است. در این تحلیل به محاسبه طیف توان یا تبدیل فوریه داده‌های خام پرداخته می‌شود [۸].

قدرت  $k_p$  که به لایه یا صفحه دیگری در بالا متصل است به جلو کشیده می‌شود (شکل ۱). چنانچه نیروهای اضافی بر دستگاه اثر نکنند فاصله ترازمندی بین قطعات  $a$  است. این فاصله مستقیماً در معادله حرکت وارد نمی‌شود. ثابتهای فتر  $k_c$  و  $k_p$  به ترتیب پاسخ الاستیک خطی ناحیه تماس به تراکم (یا کشش) و برش است [۱۰]. آرایه قطعات لغزنده به طور الاستیک به یک صفحه (صفحه متحرک) و از طریق یک تابع اصطکاک چسبش - لغزش به صفحه دیگر (صفحه ثابت) متصل می‌شوند. یک حالت این است که صفحه متحرک با سرعت ثابت  $v$  حرکت کند. این مدل دینامیکی صفحات تک‌تونیکی (ساختمانی) اساساً توسط بوریچ - ناپاف [۱۱] به شکل ساده در سال ۱۹۶۷ طرح شده است. سپس کارلسون و لانگر در سال ۱۹۸۹ رفتار یک مدل بسیار ساده مکانیکی از گسل زلزله را به طور عددی و آزمایشگاهی مورد بررسی قرار دادند [۴].

تنها جمله غیرخطی این مدل نیروی اصطکاک چسبش - لغزش بین جرمها و سطح ثابت است. دستگاه به سمت یک ناپایداری لغزشی رانده می‌شود که به وسیله این تابع نزولی القا می‌شود. برد تابع اصطکاک  $F(\dot{X})$  در سرعت صفر بین دو حد  $\pm F_0$  است و به طور یکنواخت با افزایش  $\dot{X}$  به صفر کاهش می‌یابد. اصطکاک علت اصلی ناپایداری است که رفتار نامنظم را ایجاد می‌کند و بیشترین سهم را در معادله حرکت دارد.

#### ۳. معادلات حرکت

برای نوشتن معادله حرکت در مدل یک بعدی فتر - قطعه،  $N$  جرم به مختصات  $X_1, X_2, \dots, X_N$  را در نظر می‌گیریم. نیروی کل وارد بر جرم  $j$ ام، شامل نیروهای الاستیک، با سرعت رانش ثابت بین دو صفحه، چنین است:

$$f_j = k_c(X_{j+1} - X_j - a) + k_c(a - X_j + X_{j-1}) + k_p(vt - X_j) \\ = k_c(X_{j+1} - 2X_j - X_{j-1}) + k_p(vt - X_j) \quad (1)$$

که در آن  $a$  طول فترها در حالت آزاد (بدون کشش) است که از معادله حذف می‌شود. معادله حرکت برای این جرم عبارت است از

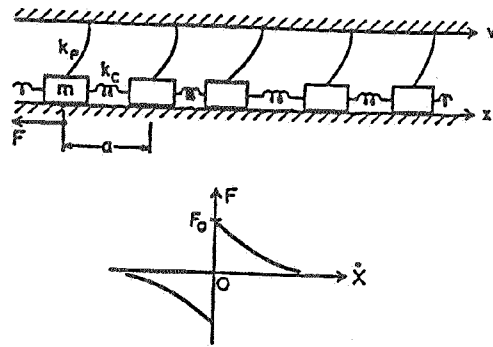
$$m\ddot{X}_j = f_j + F(\dot{X}_j), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$X_0 = X_1; \quad X_{N+1} = X_N \quad (2)$$

بعدی فنر - قطعه در سه دسته متفاوت سرعت محرک (یا سرعت رانش) نشان می‌دهند. تغییر شکل توزیع نیرو را در این سرعتها آشکارا می‌توان دید. این تغییر توزیع شکل توزیع هنجار گوسی در سرعتهای کم (با حرکت آشوبناک)، توزیع تابع ضربه در سرعتهای متوسط (حرکت دوره‌ای منظم) و بالاخره توزیع وارون هنجار در سرعتهای بالا (با نوع حرکت لغزش پیوسته و ترکیبی از گونه‌های آمیخته تپ و حرکت بی‌نظم) را شامل می‌شود. این نتایج عددی برای زمانهای بسیار طولانی از دقت مطلوب برخوردار است.

همان طوری که در بالا اشاره شد، توزیع نیروی لغزش، حداقل در سرعتهای پایین، نمایانگر نیروی اصطکاک ایستی میان قطعه‌ها و صفحه بالایی است. این توزیع با کاهش سرعت هر چه بیشتر متقارن می‌شود و شکل توزیع بهنجار را می‌گیرد. میان دو لغزش متوالی  $(F_j, S_j)$  می‌توان دو فرض اساسی را در نظر گرفت: نخست  $S_j = \alpha F_j$ ؛ و دوم  $F_{j+1} = F_j - S_j + \beta g(F_j - S_j)$  در اینجا، جمله  $F_j - S_j$  عملاً نیروی چسبش را نشان می‌دهد. فرض نخست آن است که تغییر در نیروی لغزش در اثر عمل لغزش (به عبارت دیگر اندازه لغزش) ضریبی تصادفی از نیروی لغزش است. فرض مذکور از این واقعیت حمایت می‌کند که در سرعتهای پایین توزیع نیروی چسبش کاملاً مشابه توزیع نیروی لغزش است و این در محاسبات متعدد شبیه سازی که انجام داده‌ایم مشاهده شده است. فرض دوم این است که افزایش نیروی لغزش پس از یک افت تابعی مانند  $g$  از مقدار اولیه چسبش  $F_j - S_j$  است ضریب یک متغیر تصادفی  $\beta$ . در نتیجه با استفاده از قضیه حد مرکزی نتیجه می‌گیریم که توزیع نیروی لغزش حداقل در سرعتهای کم یک توزیع گوسی است.

توزیع وارون - گوسی در سرعتهای بالا همانند توزیع زمانی در فرایند حرکت براونی است [۱۲]؛ چنانچه به طور تحلیلی نیز می‌توان نشان داد که دستگاه فنر - قطعه حداقل در مقیاس بسیار کوچک نیز در سرعتهای بالا از معادله حرکت لانژوین با توزیع  $\frac{1}{\omega}$  در تبدیل فوریه پیروی می‌کند [۸]. این معادله حرکت خود روشی استاندارد در بررسی حرکت براونی است. در مورد سرعتهای متوسط خواننده می‌تواند به مقاله [۱۳] مراجعه کند. شکل‌های ۶ و ۷ توزیع اندازه لغزش  $P(S)$  را برای دو سرعت مختلف نشان می‌دهند. همان طور که قبلاً گفته شد،  $S$  تفاوت بین هر نقطه بیشینه و نقطه کمینه بعدی است و بزرگی یا اندازه لغزش را به دست می‌دهد. تابع توزیع  $P(S)$  نیز چگونگی توزیع تعداد حوادث با بزرگیهای مختلف را ارایه می‌کند. در سرعت کم



شکل ۱. سیستم یک‌بعدی فنر - قطعه در مدل کارسون - لانگر. نمونه‌ای از تابع نزولی وابسته به سرعت اصطکاک نیز در شکل دیده می‌شود.

۵. تحلیل آماری حرکت چسبش - لغزش

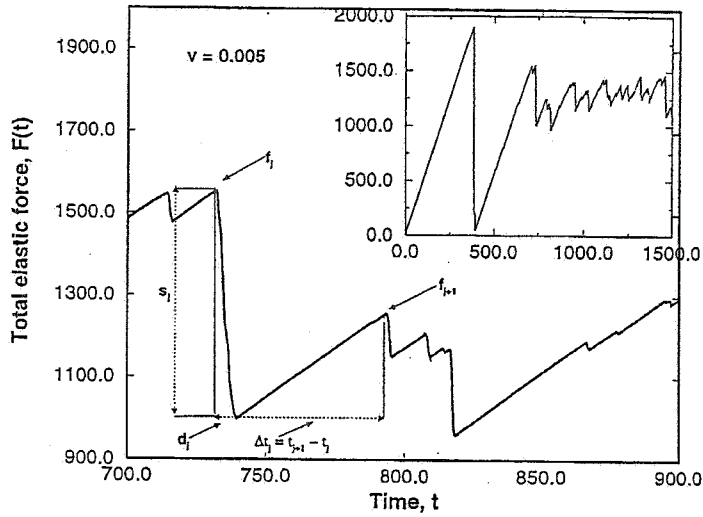
با استفاده از شکل ۲ چهار کمیت گفته شده را تعریف می‌کنیم: الف. نیروی لغزش  $F_j \in F$  نقطه بیشینه منحنی تغییرات زمانی نیروی کل الاستیک است. ب. اندازه لغزش  $S_j \in S$  تفاوت بین هر نقطه بیشینه و نقطه کمینه بعدی است. ج. فاصله زمانی بین دو لغزش  $\Delta t_j = (t_{j+1} - t_j) \in T$  تفاوت زمان وابسته به یک نقطه بیشینه از نقطه بیشینه بعدی است. د. زمان لغزش (دوره لغزش)  $d_j \in D$  تفاوت زمان مربوط به یک نقطه بیشینه از نقطه کمینه بعدی است.

این چهار کمیت را مشخصه‌های چسبش - لغزش می‌نامیم. رابطه بنیادی زیر بین کمیت‌های گفته شده وجود دارد (شکل ۲):

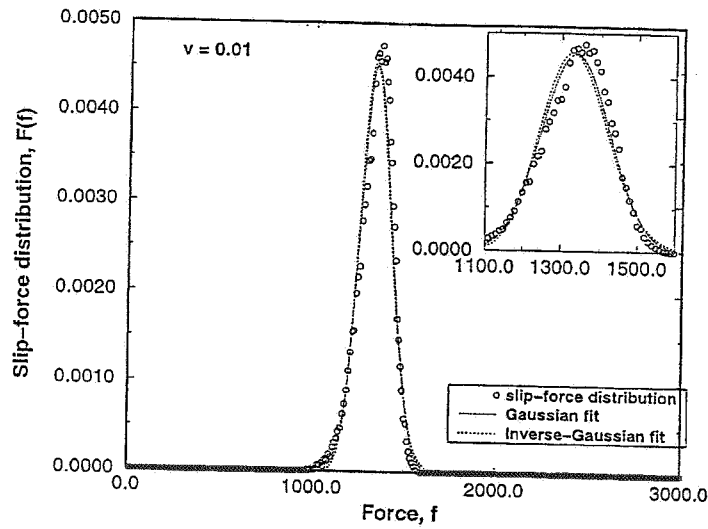
$$F_{j+1} = F_j - S_j + k_p v (\Delta t_j - d_j) \tag{۶}$$

منظور از نیروی لغزش، نقاط بیشینه در منحنی تغییرات زمانی کل نیروی الاستیک وارد بر دستگاه  $N$  ذره‌ای جرم و فنر است (نقاط  $F_j$  در شکل ۲). تعبیر فیزیکی توزیع این نیرو در مورد سرعتهای پایین آسان است اگر اصطکاک ایستی موضعی را تابعی از مکان در نظر بگیریم، آنگاه نیروی لغزش نمایشگر این تابع خواهد بود، چرا که در مجموع کل نیروهای وارد بر دستگاه در معادله حرکت جمله  $\sum_{j=1}^N k_p (v - X_j)$  به عنوان نیروی کل الاستیک (نیروی خارجی) با مجموع نیروی اصطکاک برابری می‌کند. یادآور می‌شویم که معادله حرکت برای ذره  $j$ ام در دستگاه زنجیره یک بعدی فنر - قطعه با شرایط مرزی آزاد از رابطه (۲) به دست می‌آید.

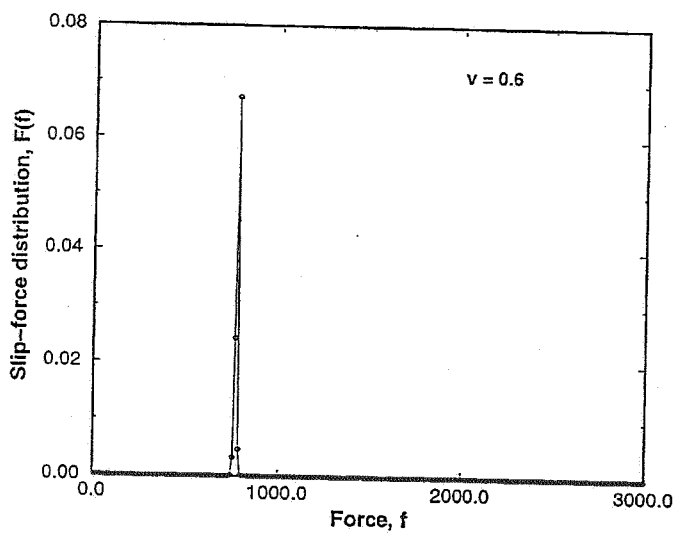
شکل‌های ۳، ۴ و ۵ توزیع نیروی لغزش را برای دستگاه یک



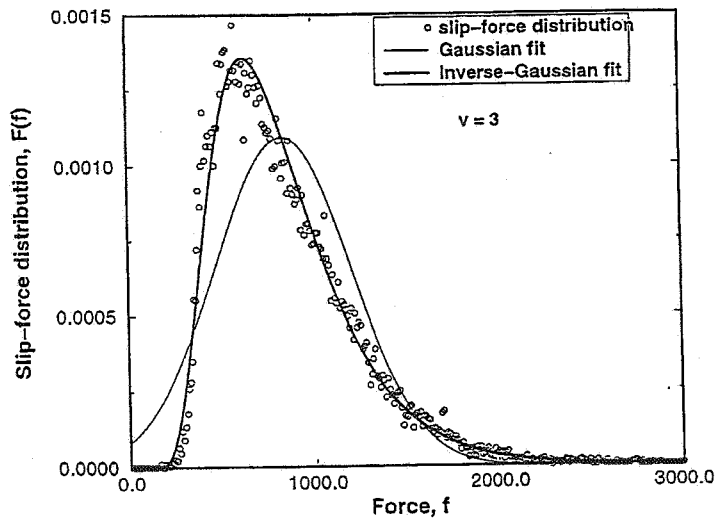
شکل ۲. نیروی الاستیک  $F(t)$  بر حسب زمان  $t$  (سری زمانی) برای پارامترهای  $N=100$ ،  $v=0.005$ ،  $F_0=20$ ،  $k_p=50$  و  $k_c=40$ .



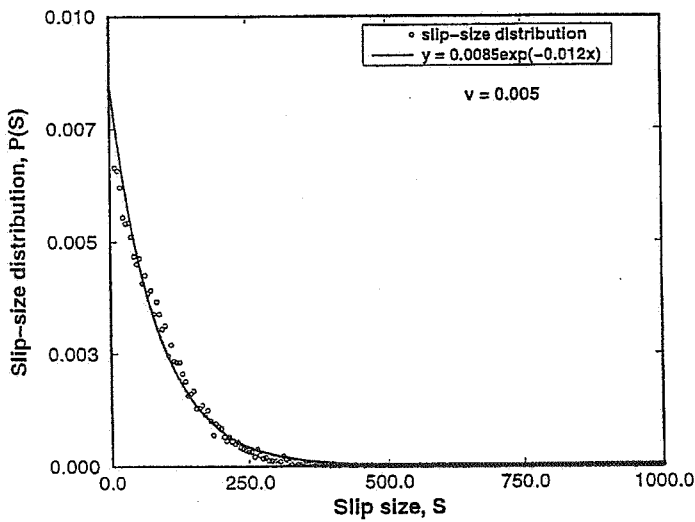
شکل ۳. توزیع نیروی لغزش  $F(f)$  مدل یک‌بعدی فنر - قطعه برای سرعت کم رانش  $v=0.01$ .



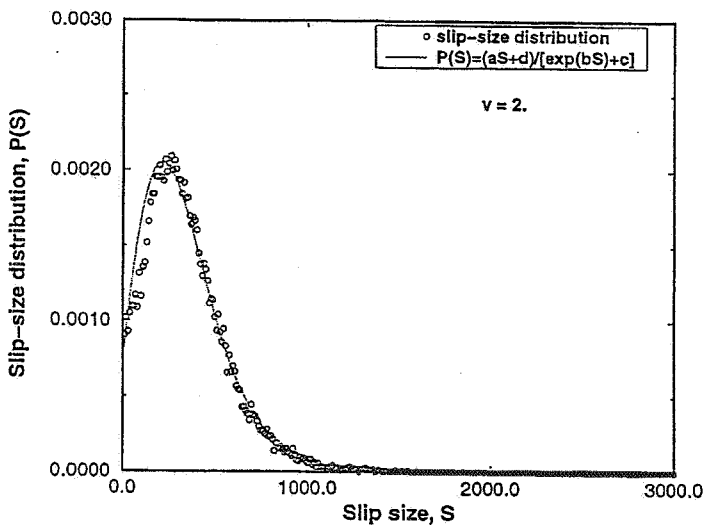
شکل ۴. توزیع نیروی لغزش  $F(f)$  مدل یک‌بعدی فنر - قطعه برای سرعت متوسط رانش  $v=0.6$ .



شکل ۵. توزیع نیروی لغزش  $F(f)$  مدل یک‌بعدی فنر - قطعه برای سرعت زیاد رانش  $\nu=3$ . انحراف از توزیع گوسی آشکارا دیده می‌شود.



شکل ۶. توزیع اندازه لغزش  $P(S)$  در مدل یک‌بعدی فنر - قطعه برای سرعت بسیار کم  $\nu=0.005$ . منحنی برای تطبیق با نقاط رسم شده است.



شکل ۷. توزیع اندازه لغزش  $P(S)$  در مدل یک‌بعدی فنر - قطعه برای سرعت زیاد  $\nu=2$ . انحراف از توزیع نمایی برای مقادیر کم  $S$  به خوبی مشاهده می‌شود.

آنالیز طیفی روشی توانا و مفید در بررسی پدیده‌های دینامیکی است. چنین فرض می‌شود که آنالیز فوریه وابستگی تغییرات زمانی متغیرهای دینامیکی را به بسامد نمایش می‌دهد. در اینجا با استفاده از آنالیز طیفی رفتار دینامیکی نیروی الاستیکی کل وارد بر دستگاه را بررسی می‌کنیم.

تبدیل فوریه در حالت کلی تابعی مختلط است. بنابراین معمولاً قسمت حقیقی این تابع را در نظر می‌گیریم و یا تابعی حقیقی به نام طیف توان تعریف می‌کنیم که عبارت است از مجذور قدرمطلق تابع تبدیل. در ریاضیات، وجود مقدار مثبت ضرب لیاپانوف وابسته به رفتار آشوبناک است. همچنین ساختمان طیف توان نیز وسیله‌ای استاندارد برای تشخیص آشوب است. بدین معنا، وضعیت بی‌نظمی و آشوبناک از طریق نوفه‌های با باند پهن و گسترده و پیوسته مشخص می‌شود، در حالیکه طیف در مورد حرکت دوره‌ای و منظم بسیار تیز خواهد بود (به تابع  $\delta$  نزدیک می‌شود). تقریباً در تمامی منتهای مربوط به مقوله آشوب نتایج بررسیها به صورت طیف توان نشان داده می‌شوند [۱۴ و ۱۵].

در شکل‌های ۸ تا ۱۳ قسمت حقیقی تبدیل فوریه و نیز طیف توان نیروی الاستیک کل وارد بر سیستم در زنجیره یک بعدی فنر - قطعه برای دو سرعت مختلف نشان داده شده است. پس از مدت طولانی که از شروع محاسبات عددی با رایانه می‌گذرد، همبستگی مشخصی مشاهده می‌شود که نشان می‌دهد  $S(f) \sim f^{-\alpha}$  است با مقدار  $1/85 < \alpha < 0/9$ ، به ترتیب برای مقادیر کم و زیاد سرعت. بدین ترتیب توزیع اندازه نیروی الاستیک در شبکه یک بعدی با شکل  $\frac{1}{f}$  مطابقت دارد. شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مقادیر  $\alpha = 1/85$  و  $\alpha = 0/9$  را به ترتیب برای سرعت‌های کم و زیاد نشان می‌دهد.

#### ۷. گفتار پایانی

در این مقاله از حل عددی معادلات حرکت برای زنجیره یک بعدی N جسم در مدل فنر - قطعه با دینامیک چسبش - لغزش سخن گفته‌ایم. مشخصه‌های چسبش - لغزش را با استفاده از

نتایجی که از مطالعه عددی به دست آورده‌ایم از شکل تقریباً نمایی تبعیت می‌کند. این نتایج نشان می‌دهد که رویدادهای کوچک جایگزیده بسیاری وجود دارد در حالیکه رویدادهای بزرگ کمتر هستند. یعنی، با افزایش بزرگی میزان لغزش (که نمایانگر وقوع رویدادهای بزرگتر می‌شود) این توزیع به صورت نمایی کاهش می‌یابد. این ویژگی، روند ساخته شدن و سازمان یافتن قبل از لغزش و رویداد بزرگ را پس از یک واهلش تأیید می‌کند؛ پدیده‌ای که در زمین لرزه به خوبی مشاهده می‌شود.

نتایج به دست آمده در سرعت بالا مطابق منحنی نمایی نیست و رابطه‌ای جدید به شکل

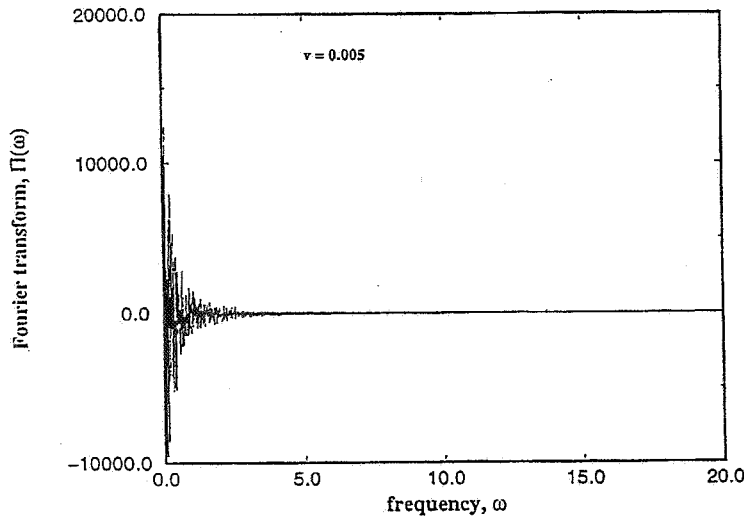
$$P(s) = \frac{as + d}{\exp(bs) + c} \quad (V)$$

به دست آورده‌ایم.  $a, b, c, d$  پارامترهایی هستند که در آزمایش‌های مختلف تغییر می‌کنند، یعنی به پارامترهای اصلی دستگاه  $(k_p, k_c, F_0, N, \nu)$  بستگی دارند اما نوع وابستگی مساله‌ای است که نیاز به پژوهش بیشتر دارد.

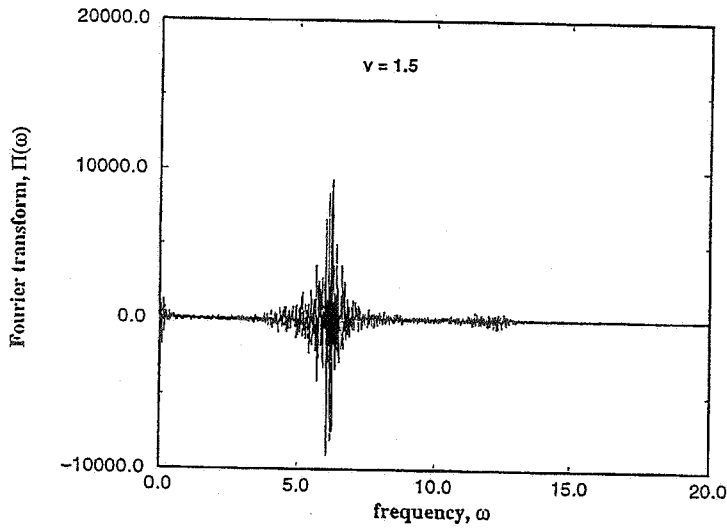
در شبیه‌سازی مدل مورد بررسی، پس از گذشت مدت کوتاهی دستگاه به حالتی پایدار می‌رسد و از آن به بعد رفتار دستگاه را با اطمینان مطالعه می‌کنیم. آنگاه با کنار گذاشتن رویدادهای اولیه، رفتار مدل طبق رابطه (V) با توزیع تجربی کاملاً مطابقت دارد و این از نظر فیزیکی با فرایند پواسن در مقادیر بزرگ S سازگار است  $[P(S) \sim a \exp(-bs)]$ . از این نتیجه و مقایسه دو شکل ۶ و ۷ چنین برمی‌آید که در سرعت‌های بالا، لغزش‌های کوچک کمتر اتفاق می‌افتد (به مقادیر محور افقی در شکل‌های ۶ و ۷ توجه شود). همچنین اندازه کاملاً معینی برای محتمل‌ترین رویدادها وجود دارد (ماکزیمم شکل V).

#### ۶. تحلیل دینامیکی حرکت چسبش - لغزش

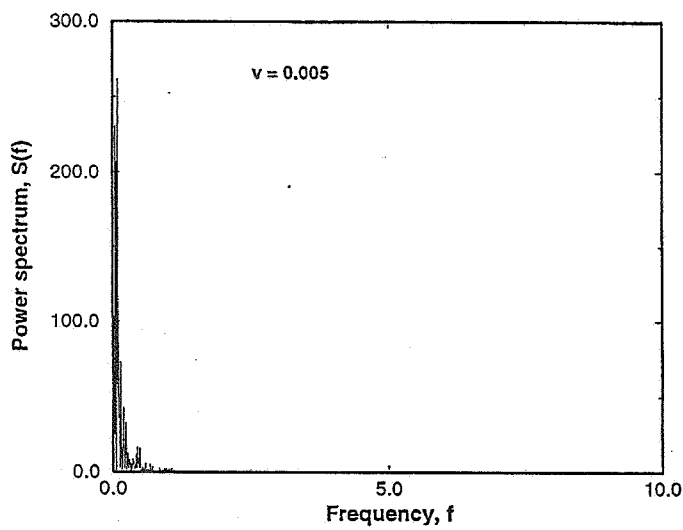
در بررسی رفتار دینامیکی تغییرات زمانی نیرو و مشخصه‌های چسبش - لغزش که قبلاً تعریف شده است از تبدیل فوریه و طیف توان استفاده می‌کنیم.



شکل ۸. قسمت حقیقی تبدیل فوریه نیروی الاستیک برای سرعت  $\nu = 0.005$  به فقدان ساختار مشخص توجه کنید. پارامترهای داده شده عبارتند از:  $N = 100$ ،  $F_0 = 20$ ،  $k_c = 40$  و  $k_p = 50$ .

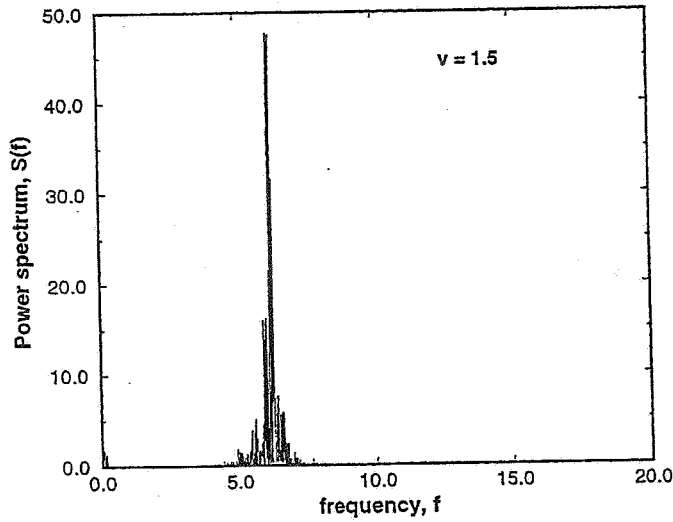


شکل ۹. قسمت حقیقی تبدیل فوریه برای سرعت بالا  $\nu = 1/5$  ناحیه گسترده نوفه و نبود یک ساختار مشخص مشاهده می‌شود.

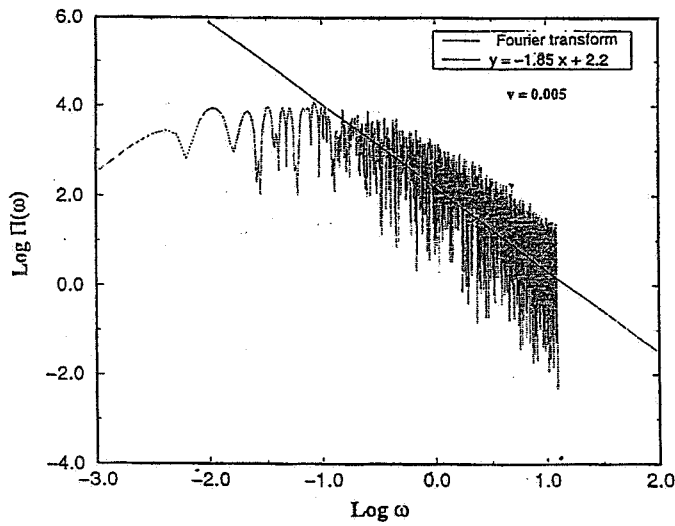


شکل ۱۰. طیف توان  $S(f)$  نیروی الاستیک برای سرعت کم  $\nu = 0.005$

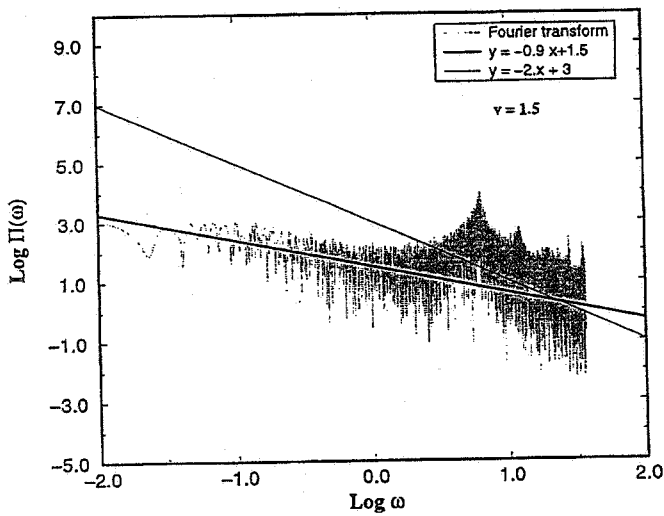




شکل ۱۱. طیف توان  $S(f)$  نیروی الاستیک برای سرعت زیاد  $\nu = 1/5$



شکل ۱۲. قسمت حقیقی تبدیل فوریه  $\pi(\omega)$  نیروی الاستیک برای سرعت رانش کم،  $\nu = 0/005$  در مقیاس لگاریتمی. خط راست تطابق قانون توان را با نقاط منحنی نشان می‌دهد.



شکل ۱۳. قسمت حقیقی تبدیل فوریه  $\pi(\omega)$  نیروی الاستیک برای سرعت رانش زیاد،  $\nu = 1/5$  در مقیاس لگاریتمی. دوباره خط راست پر تطابق قانون توان را با نقاط منحنی نشان می‌دهد.

بحرانی شدن خود - سازمان یافته (SOC) در آن مدلها تحقق می‌یابد، تا این اواخر موفقیت محدودی در درک تحلیلی این پدیده حاصل شده است. مدل فنر - قطعه مثال بسیار ساده‌ای است که فهم SOC را آسانتر می‌کند. در این رابطه بررسیهایی صورت گرفته است که به عنوان نمونه می‌توان به مراجع [۸ و ۷] مراجعه کرد.

ب. از این مدل به عنوان مدل بسیار ساده شده دستگاه‌های بزرگ همچون گسل زمین لرزه می‌توان استفاده کرد. هر چند فرایند گسلش بسیار پیچیده‌تر از یک دستگاه یک‌بعدی مانند مدل قطعه و فنر است، اما مزیت این مدل استفاده از امکانات و منابع محدود رایانه‌ای است و حداقل به طور پدیده شناختی دیدگاه ما را نسبت به پدیده‌های پیچیده واقعی شفافتر می‌کند.

ج. همچنین در مطالعه پدیده چسبش - لغزش در بسیاری دستگاه‌های دیگر، که در مقدمه ذکر شد، مفید است. در این میان اصطکاک بین سطوح، و اصطکاک چسبش - لغزش موضوع جالبی است که منشا این اثرات هنوز تا حدودی ناشناخته مانده است و نتایج به دست آمده به درک بهتر ما از اصطکاک خشک بین سطوح و نیز فرایند چسبش - لغزش کمک می‌کند.

تحلیل آماری و دینامیکی مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این رابطه از ابزار آماری همچون توابع توزیع، تبدیل فوری و طیف توان کمک گرفته‌ایم. نشان داده شد که تبدیل فوری نوسانهای نیروی لغزشی در قالب رفتاری  $\frac{1}{f}$  به خوبی قرار می‌گیرد.

در بررسی آماری نشان داده‌ایم که تغییر رفتاری در تابع توزیع نیروی لغزش مشاهده می‌شود. این تغییر مطابق مقادیر سرعت رانش از توزیع گوسی در سرعت پایین به توزیع وارون گوسی در سرعتهای بالاست. در مقادیر متوسط سرعت، که رفتار دوره‌ای منظم مشاهده می‌شود این توزیع منطبق بر تابع دلتای دیراک خواهد بود.

در اینجا اشاره می‌کنیم که نتایج به دست آمده با رفتار دستگاه شامل فقط یک یا چند درجه آزادی (مانند [۸]) کاملاً تفاوت دارد. مدل فنر - قطعه ساده‌ترین مدل دستگاه‌های پیچیده واقعی، مانند زلزله است که به شبیه‌سازهای بسیار پیچیده رایانه‌ای نیاز دارند. مزیت این مدل ساده در این است که با منابع محدود رایانه‌ای نیز می‌توان با آن کار کرد. در زمینه کاربرد این مدل، حداقل سه دلیل عمده بر علاقه فیزیکدانها به این نوع مدل می‌توان برشمرد [۱۶]:  
الف. در حالیکه بررسیهای عددی زیادی صورت گرفته که

#### مراجع

1. F P Bowden and D Tabor, "The friction and lubrication of solids", Clarendon press, Oxford (1986).
2. Y M Brechet, B Doucot, H J Jensen, and A-C Shi, *Phys. Rev.* B42, (1990), 246-249.
3. J M Carlson and J S Langer, *Phys. Re. Lett.* 62, (1989), 2632-2636.
4. J M Carlson and J S Langer, *Phys. Rev.* A40, (1989), 6471-6484.
5. M A Rubio, B J Gluckman, A Dougherty and J P Gollub, *Phys. Rev.* A43, (1990), 811-818.
6. R T Schumacher and J Woodhouse, *Contemporary Phys.* 36, No. 2, (1995), 79-92.
7. H J S Feder and J Feder, *Phys. Rev. Lett.*, 66, (1991), 2669-2672, *erratum* 67, 283(1991).
8. A Johanson, P Dimon, C Ellegaard, J S Larsen, and H H Rugh, *Phys. Rev.* E48, (1993),

4779-4790.

9. M G Rozman, M Urbakh and J Klafter, *Phys. Rev. Lett.* 77, (1996), 683-686.

10. J M Carlson, J S Langer, and B E Shaw, *Rev. Mod. Phys.* 66, (1994), 657-670.

11. R Burridge and L Knopoff, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 57, (1967), 341-347.

12. H F Martz and R A Waller, "Bayesian reliability analysis", Wiley, N. Y. (1982).

13. M R Sarkardei and R L Jacobs, *Phys. Rev.* E51, (1995), 1929-1935.

14. G L Baker, and J P Gollub, "Chaotic dynamics: an introduction", Cambridge Univ. Press. (1994).

15. R Seydel, "From equilibrium to chaos", *Elsevier Sciences Publishing Co. Inc.* (1988).

16. E J Ding, and Y N Lu, *Phys. Rev. Lett.* 70, (1993), 3627-3630.