

## تصحیح انرژی اتم هیدروژن از مرتبه $\alpha^2$ برای حالت‌های برانگیخته با استفاده از نظریه میدان مؤثر NRQED

سید محمد زبرجد و محسن بیگدلی  
بخش فیزیک دانشگاه شیراز، شیراز  
مرکز تحقیقات فیزیک نظری (IPM)

(دریافت مقاله: ۸۱/۱۰/۲۸ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۳/۲۱)

### چکیده

در این مقاله با استفاده از روش میدان مؤثر NRQED تصحیح انرژی و تصحیح فوق ریز اتم هیدروژن از مرتبه  $\alpha^2$  محاسبه گردیده است. اثر ساختار پروتون در تصحیح انرژی اتم هیدروژن با این روش بسادگی محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: الکتروودینامیک کوانتومی غیرنسبیتی، تصحیح فوق ریز اتم هیدروژن، روش مقایسه

### ۱. مقدمه

محاسبه طیف اتم هیدروژن از اولین کاربردهای مکانیک کوانتومی برای یک سیستم حالت مقید می‌باشد. محاسبه حالت مقید از طریق الکتروودینامیک کوانتومی (QED) دارای پیچیدگی زیادی است. بهترین روش برای این منظور استفاده از نظریه میدان مؤثر (NRQCD) [۱] است که اخیراً استفاده از این نظریه به نحو قابل ملاحظه‌ای گسترش یافته است [۲، ۳، ۴]. همچنین حالت‌های مقید کواریکی نیز در نظریه NRQCD مورد بحث قرار گرفته است [۵، ۶]. با وجود اینکه تصحیح‌های انرژی و ساختار فوق ریز HFS در اتم هیدروژن از روش‌های مختلفی به دست آمده است [۷، ۸، ۹]، ولی هنوز روش NRQED در مورد اتم هیدروژن به طور وسیعی مورد استفاده قرار نگرفته است. در این مقاله ما ابتدا لاگرانژی غیرنسبیتی کوانتومی (NRQED) را می‌نویسیم و ضرایب نامعلوم مربوط به پروتون را در پایتترین مرتبه به دست می‌آوریم. همچنین با استفاده از این روش برای اولین بار تصحیح انرژی و ساختار

فوق ریز اتم هیدروژن برای حالت‌های برانگیخته به دست آمده است. در عین حال، نشان داده شده است که چگونه بسادگی می‌توان اثر ساختار پروتون در تصحیح انرژی اتم هیدروژن را به دست آورد.

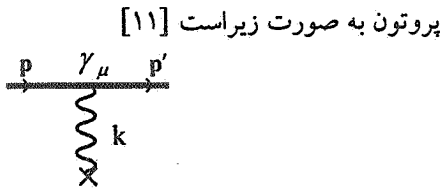
### ۲. الکتروودینامیک کوانتومی غیرنسبیتی (NRQED)

#### ۲.۱. لاگرانژی NRQED

با توجه به اینکه الکترون و پروتون در اتم هیدروژن غیرنسبیتی می‌باشند، کار خود را با نوشتن لاگرانژی غیرنسبیتی شروع می‌کنیم. میدان‌هایی که نشان دهنده درجات آزادی با انرژی کم می‌باشند، عبارتند از  $\Psi$  و  $\chi$  که به ترتیب نشان دهنده میدان الکترون و پروتون غیرنسبیتی و  $A_\mu$  نشان دهنده فوتون با انرژی کمتر از جرم الکترون  $m$  می‌باشد. لاگرانژی NRQED به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{Two-Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{For-Fermion}} + \dots \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Two-Fermion}} = \Psi^\dagger [iD_t + \frac{D^r}{r m} + \frac{D^r}{\lambda m^r} + (c_1)_e \sigma \cdot \mathbf{B} + (c_2)_e (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + (c_3)_e \sigma \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathbf{D} + \dots)] \Psi$$



$$\bar{u}(p') [F_1(k^\nu) \gamma_\mu + \frac{\kappa}{\lambda M} F_2(k^\nu) i \sigma_{\mu\nu} k^\nu] u(p). \quad (2)$$

که در آن اسپینور دیراک  $u(p)$  برابر است با

$$u(p) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+M} \xi \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_1, F_2 \text{ و } F_3 \text{ توابع ساختار}$$

مستقل از هم،  $k$  ممان مغناطیسی غیرعادی،

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \text{و} \quad k^\nu = k_0^\nu - k^\nu \text{ می‌باشند.}$$

با بسط رابطه (۱) بر حسب  $\frac{p}{M}$  داریم:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') [\gamma_i F_1(k^\nu) + \frac{i\kappa}{\lambda M} \sigma_{i\nu} k^\nu F_2(k^\nu)] u(p) \cong \\ F_1(k^\nu) \xi^{i\nu} [-\frac{e}{\lambda M} (p' + p) + \frac{ie}{\lambda M} (k \times \sigma) + \dots] i \xi \\ + \kappa F_2(k^\nu) \xi^{i\nu} [+ \frac{ie}{\lambda M} (k \times \sigma) - \frac{ie}{\lambda M} \sigma \cdot p \\ (k \times \sigma) \sigma \cdot p + \dots] i \xi, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') [\gamma_0 F_1(k^\nu) + \frac{i\kappa}{\lambda M} \sigma_{0\nu} k^\nu F_2(k^\nu)] u(p) \cong \\ F_1(k^\nu) \xi^{0\nu} [-e \frac{e}{\lambda M} k^\nu + \frac{ie}{\lambda M} \sigma \cdot (p' \times p) + \dots] \xi \\ + \kappa F_2(k^\nu) \xi^{0\nu} [-\frac{e}{\lambda M} k^\nu + \frac{ie}{\lambda M} \sigma \cdot (p' \times p) + \dots]. \end{aligned} \quad (4)$$

توابع ساختار  $F_1$  و  $F_2$  که به خاطر ساختار پروتون، توزیع بار و ممان مغناطیسی در رأس QED ظاهر می‌شوند، با تعیین سطح مقطع پراکندگی کشسان پروتون و الکترون در آزمایشگاه معین می‌شوند. در حد  $k^2 \rightarrow 0$  فوتون دارای طول موج بلند خواهد شد و نسبت به ساختار پروتونی که دارای بار  $e$  و ممان مغناطیسی  $\frac{1+\kappa}{2M} e$  می‌باشد، حساس نخواهد بود، بنابراین توابع ساختار دارای مقدار  $F_1(0) = 1$  و  $F_2(0) = 1$  هستند. با بسط

غیرنسبیتی  $F_1(k^2)$  و  $F_2(k^2)$  داریم [۹]:

$$F_1(k^2) \cong F_1(-k^2) \cong 1 - \frac{\langle r_p^2 \rangle}{6} k^2, \quad (5)$$

$$\kappa F_2(k^2) \cong (\frac{g}{\gamma} - 1) + \dots \quad (6)$$

$g$  نسبت ژيرو مغناطیسی پروتون می‌باشد. با جایگذاری

$$+ \chi^+ [iD_t + \frac{D^r}{\lambda M} + \frac{D^r}{\lambda M^r} + (c_1)_p \sigma \cdot B + (c_2)_p (D \cdot E - E \cdot D)$$

$$+ (c_3)_p \sigma \cdot (D \times E - E \times D + \dots)] \chi.$$

$$\mathcal{E}_{Four\_Fermion} = c_r \psi^+ (\sigma \sigma_r) \chi^* \cdot \chi^T + c_0 \psi^+$$

$$(\sigma_r) \chi^* \cdot \chi^T (\sigma_r) \psi$$

$$c_e [\psi^+ (\sigma_r \sigma) D^r \chi^* \cdot \chi^+ (\sigma_r \sigma) \psi] + \dots,$$

$$\mathcal{E}_{Photon} =$$

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + c_1 A^\circ(k) \frac{k^r}{m^r} A^\circ(k) - c_2 A^i(k) \frac{k^r}{m^r}$$

$$A^j(k) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \dots,$$

که در اینجا  $M$  جرم پروتون،  $D_t = \partial_t + iqA_0$  و  $D = i(p - qA)$  می‌باشد و همچنین برای الکترون  $q = -e$ ، برای پروتون  $q = e$  و  $\sigma$  نمایانگر ماتریسهای پائولی می‌باشند.  $c_i$  ضرایب نامعلوم هستند که با توجه به روش مقایسه به دست می‌آیند. بعضی از نمودارهای فاینمن مربوط به لاگرانژی NRQED در شکل ۱ آورده شده‌اند.

### ۲.۲. روش مقایسه (Matching Procedure)

ضرایب موجود در لاگرانژی یعنی  $c_i$ ها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

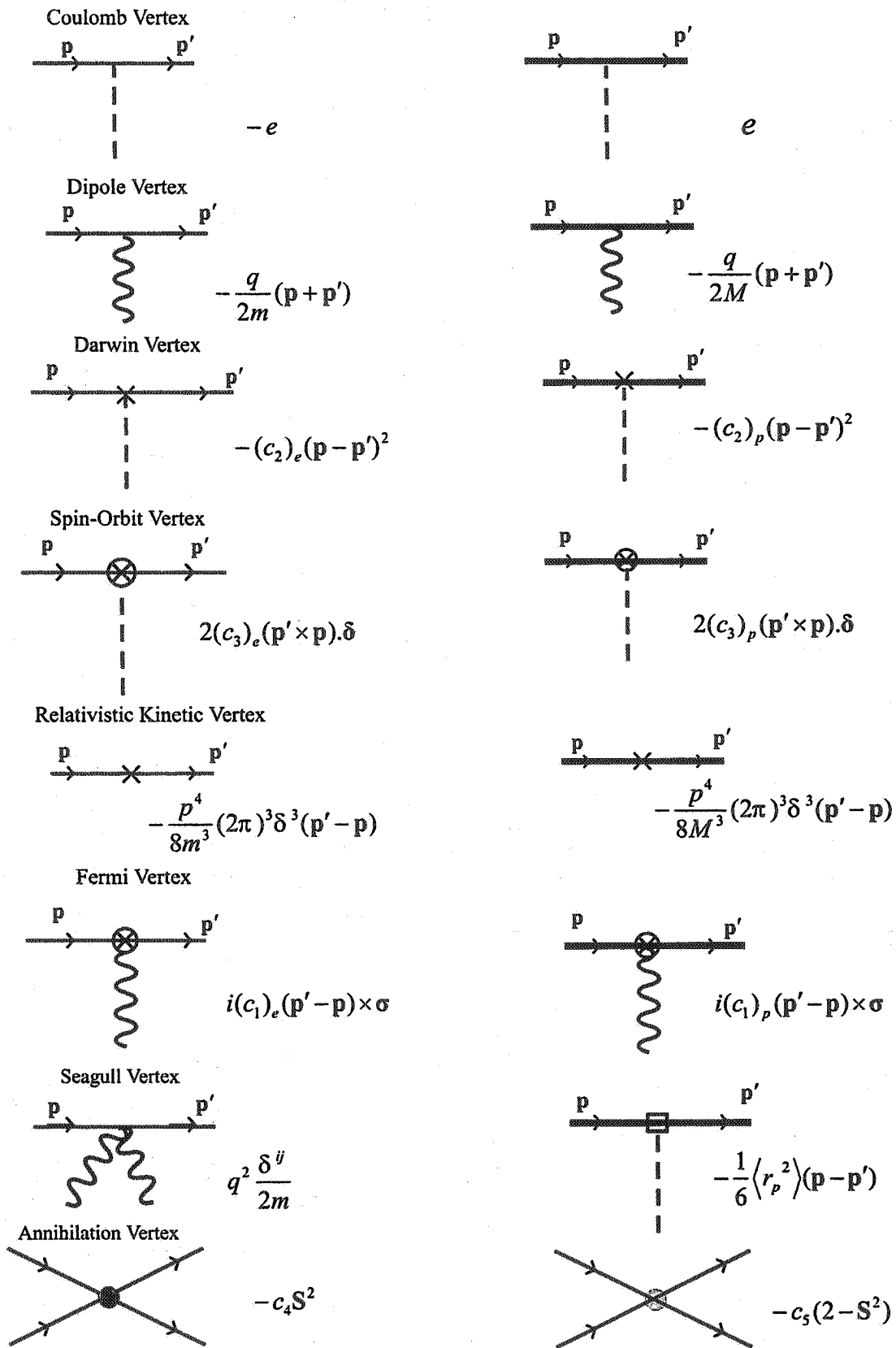
$$c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} + c_i^{(2)} + \dots$$

که در آن  $c_i^{(0)}$  ناشی از مقایسه پراکندگی نمودارهای درختی QED و نمودارهای درختی NRQED می‌باشند.

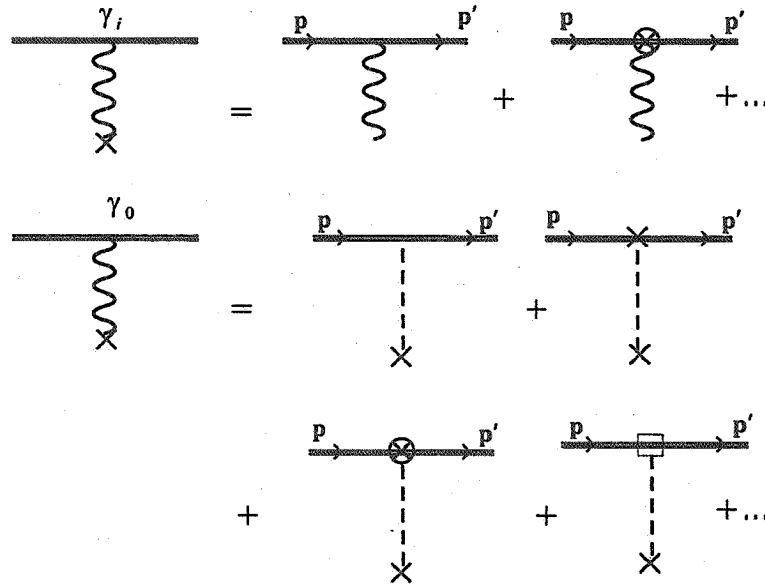
روش مقایسه شامل حالت‌های مقید نمی‌باشد بلکه فقط از پراکندگی الکترون و پروتون آزاد استفاده می‌شود و بعد از مشخص شدن ضرایب لاگرانژی NRQED از آن در محاسبات حالات مقید استفاده می‌کنیم و این یک مزیت عالی برای NRQED است که روش مقایسه و محاسبات حالات مقید جدا از هم می‌باشند. مقادیر  $(c_i)_e$  در مراجع [۲] و [۱۰] محاسبه شده‌اند.

$$(c_1^{(0)})_e = \frac{-e}{\gamma m}, \quad (c_2^{(0)})_e = \frac{-e}{\lambda m^2}, \quad (c_3^{(0)})_e = \frac{-ie}{\lambda m^2}.$$

در اینجا مقادیر  $(c_i)_p$  را محاسبه می‌کنیم. رئوس QED برای



شکل ۱. رنوس NRQED



شکل ۲. روش مقایسه برای تعیین مقادیر  $c_i^{(0)}$ . نمودارهای دست چپ نشانگر رنوس QED و دست راست نمایانگر رنوس NRQED می‌باشند.

می‌توان با توجه به قانون شمارش توانی (Power Counting) [۳] به صورت شکل ۳ تعیین نمود. نمودار (۳ f) که مربوط به تصحیح ناشی از شعاع پروتون می‌باشد، در مقاله [۹] بررسی شده است. ولی ما در اینجا براحتی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$(\Delta E)_f = \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \psi^*(\mathbf{p}') [(-e) \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2} \frac{-e}{\epsilon} \langle r_p^i \rangle] \psi(\mathbf{p}) = \frac{e^2}{\epsilon} \langle r_p^i \rangle |\psi(0)|^2 = \frac{2}{3} \frac{\alpha^2}{n^3} \mu^2 \langle r_p^i \rangle \delta_{i,0} \quad (9)$$

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

به دلیل جفت شدگی اسپین هسته ( $s_p$ ) با اسپین الکترون ( $s_e$ ) و جفت شدگی اسپین الکترون با تکانه زاویه‌ای الکترون ( $L$ )، تصحیحاتی بر اتم هیدروژن وارد می‌شود که در نمودارهای (۳ a - ۳ e) نشان داده شده است. حال به بررسی تک تک این نمودارها می‌پردازیم:

$$(\Delta E)_a = \frac{-e^2}{2Mm} \frac{g}{2} \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \psi^*(\mathbf{p}') \{ [(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) \times \mathbf{e}]_i [(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \times \mathbf{e}]_j \} \psi(\mathbf{p}),$$

$F_1$  و  $F_2$  در روابط (۳) و (۴) داریم:

$$e\bar{u}(\mathbf{p}') [\gamma_i F_1(k^i) + \frac{i\kappa}{2M} \sigma_{ij} k^j F_2(k^i)] u(\mathbf{p}) \cong \xi'^i \left[ \frac{-e}{2M} (\mathbf{p}'+\mathbf{p}) + \frac{ie}{2M} \left( \frac{g}{2} (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}) + \dots \right) \right]_i \xi \quad (7)$$

$$e\bar{u}(\mathbf{p}') [\gamma^0 F_1(k^0) + \frac{i\kappa}{2M} \sigma_{0j} k^j F_2(k^0)] u(\mathbf{p}) \cong \xi'^0 \left[ e - \frac{e}{\epsilon} \langle r_p^i \rangle k^i + \frac{ie}{2M^2} (g-1) (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{e}{2M^2} (g-1) k^2 + \dots \right] \xi \quad (8)$$

نمایش نموداری و روابط (۷) و (۸) در شکل ۲ آورده شده است که از همین روابط مقادیر  $c_i^{(0)}$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(c_1^{(0)})_p = \frac{ie}{2M^2} (g-1), \quad (c_2^{(0)})_p = \frac{e}{2M^2} (g-1),$$

$$(c_3^{(0)})_p = \frac{e}{2M} \left( \frac{g}{2} \right).$$

با توجه به اینکه  $c_4^{(0)}$ ،  $c_5^{(0)}$  و  $c_6^{(0)}$  ناشی از نمودارهای نابودی (annihilation) می‌باشند، در مورد زوج الکترون و پروتون این مقادیر صفر هستند:  $c_4^{(0)} = c_5^{(0)} = c_6^{(0)} = 0$ .

۳. تصحیح اتم هیدروژن از مرتبه  $\alpha^2$  نمودارهای مربوط به تصحیح اتم هیدروژن از مرتبه  $\alpha^2$  را

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha}{\sqrt{m}^r} \left\langle \frac{s_e \cdot L}{r^r} \right\rangle (1 - \delta_{l,0}) + \frac{\alpha(g-1)}{\sqrt{M}^r} \left\langle \frac{s_p \cdot L}{r^r} \right\rangle (1 - \delta_{l,0}) \\
 & + \frac{\mu^r \alpha^r}{\sqrt{n}^r} \langle r_p^r \rangle (1 - \delta_{l,0}) \\
 & + \frac{-\mu^r \alpha^r}{\sqrt{m}^r n^r (l + \frac{1}{2})} + \frac{\mu^r \alpha^r}{\sqrt{M}^r n^r} + \frac{-\mu^r \alpha^r}{\sqrt{M}^r n^r (l + \frac{1}{2})} \\
 & + \frac{\mu^r \alpha^r}{\sqrt{M}^r n^r} + \frac{\mu^r \alpha^r}{\sqrt{m}^r n^r} \delta_{l,0} \\
 & + \frac{\mu^r \alpha^r}{M m n^r} \delta_{l,0} + \frac{\mu^r \alpha^r}{M m n^r} - \frac{\mu^r \alpha^r}{\sqrt{M m n}^r (l + \frac{1}{2})} \\
 & + \frac{\mu^r (g-1) \alpha^r}{\sqrt{M}^r n^r} \delta_{l,0} .
 \end{aligned}$$

برای محاسبه مقادیر چشمداشتی  $\langle S_e \cdot L \rangle$ ،  $\langle S_p \cdot L \rangle$ ،  $\langle S_e \cdot S_p \rangle$  و  $\langle S \cdot L \rangle$  باید یک مجموعه کامل از عملگرهای  $L$ ،  $S_p$  و  $S_e$  پیدا کنیم. بایستی توجه کرد که وقتی که  $M = m$  و  $g = 2$  تنها به جمع دو تکانه زاویه‌ای  $L$  و  $S$  نیاز داریم. با توجه به نحوه جمع تکانه‌های زاویه‌ای می‌توان مجموعه‌های مختلفی پیدا کرد:

الف)  $j_1 = L, j_2 = S_e, j_3 = S_p, j_{12} = L + S_e, j = j_1 + j_2 + j_3$  با این شرایط مجموعه ما به صورت زیر خواهد بود.

$$|A\rangle \equiv |j_1, j_2, j_3, J, m'\rangle \equiv |(s_e) j_{12}, s_p, J, m'\rangle \quad (16)$$

ب)  $j_1 = L, j_2 = S_e, j_3 = S_p, j_{12} = S_e + S_p, j = j_1 + j_2 + j_3$

$$|B\rangle \equiv |j_1, j_2, j_3, J, m'\rangle \equiv |(s_e s_p) j_{12}, L, J, m'\rangle \quad (17)$$

این دو مجموعه به صورت زیر در ارتباط با هم هستند:

$$|B\rangle = \sum W_i |A\rangle ,$$

$$|(s_e s_p) j_{12}, l, J, m'\rangle = \sum_{j_{12}} |(s_e) j_{12}, s_p, J, m'\rangle \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{12} + 1)}$$

$$\begin{Bmatrix} l & s_e & j_{12} \\ s_p & J & J_{12} \end{Bmatrix} , \quad (18)$$

که در آن نماد  $J_{12}$  ویگنر به این صورت تعریف می‌شود [۱۲]:

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = \Delta(abe) \Delta(acf) \Delta(bdf) \Delta(cde) \times \sum_z \{ (-1)^z (a+b+c+d+1-z)! [z!(e+f-a-d+z)! \times (e+f-b-c+z)!(a+b-e-z)!(c+d-e-z)! \times (a+c-f-z)!(b+d-f-z)! ]^{-1} \} , \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta E_n)_a &= \frac{r}{r} g \frac{\alpha^r}{n^r m M} \left( \frac{M m}{m+M} \right)^r \langle s_e \cdot s_p \rangle \delta_{l,0} \\
 &+ \frac{g}{\sqrt{M m n}^r} \frac{\mu^r \alpha^r (1 - \delta_{l,0}) \langle Y \rangle}{l(l+1)(l+\frac{1}{2})(2l+2)(2l-1)} .
 \end{aligned} \quad (10)$$

در اینجا  $Y$  به شکل

$$S = s_e + s_p \text{ و } Y = r(s_e \cdot s_p) + \frac{1}{r} L^2 - \frac{r}{r} (S \cdot L) - r(S \cdot L)^r \text{ می‌باشد.}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta E_n)_b &= \int \frac{d^r p d^r p'}{(2\pi)^r} \psi^*(p') \left( \frac{-ie(p-p') \times \sigma_e}{\sqrt{m}} \right)_j \left( \frac{-e(p+p')}{\sqrt{m}} \right)_i \\
 &- \frac{1}{(p-p')^r} \left( \delta_{ij} - \frac{(p-p')_i (p-p')_j}{(p-p')^2} \right) \psi(p) , \\
 (\Delta E_n)_b &= \frac{-ie^r}{\sqrt{M m}} \int \frac{d^r p d^r p'}{(2\pi)^r} \psi^*(p') \left\{ \frac{(p+p') \times (p'+p) \cdot \sigma_e}{(p'-p)^r} \right\} \psi(p) \\
 &= \frac{\alpha}{M m} \left\langle \frac{s_e \cdot L}{r^r} \right\rangle (1 - \delta_{l,0}) .
 \end{aligned} \quad (11)$$

برای محاسبه نیز باید همه مراحل را تکرار کنیم با این تفاوت که یک ضریب  $\frac{g}{r}$  در رأس مربوط به پروتون باید ضرب شود.

$$(\Delta E_n)_c = \frac{\alpha g}{\sqrt{M m}} \left\langle \frac{s_p \cdot L}{r^r} \right\rangle (1 - \delta_{l,0}) ,$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta E_n)_d &= \int \frac{d^r p d^r p'}{(2\pi)^r} \psi^*(p') \left( \frac{-ie^r (p' \times p) \cdot \sigma_e}{\sqrt{m}^r (p-p')^r} \right) \psi(p) \\
 &= \frac{-ie^r}{\sqrt{m}^r} \int \frac{d^r p d^r p'}{(2\pi)^r} \psi^*(p') \left( \frac{(p' \times p) \cdot \sigma_e}{(p-p')^r} \right) \psi(p) ,
 \end{aligned} \quad (12)$$

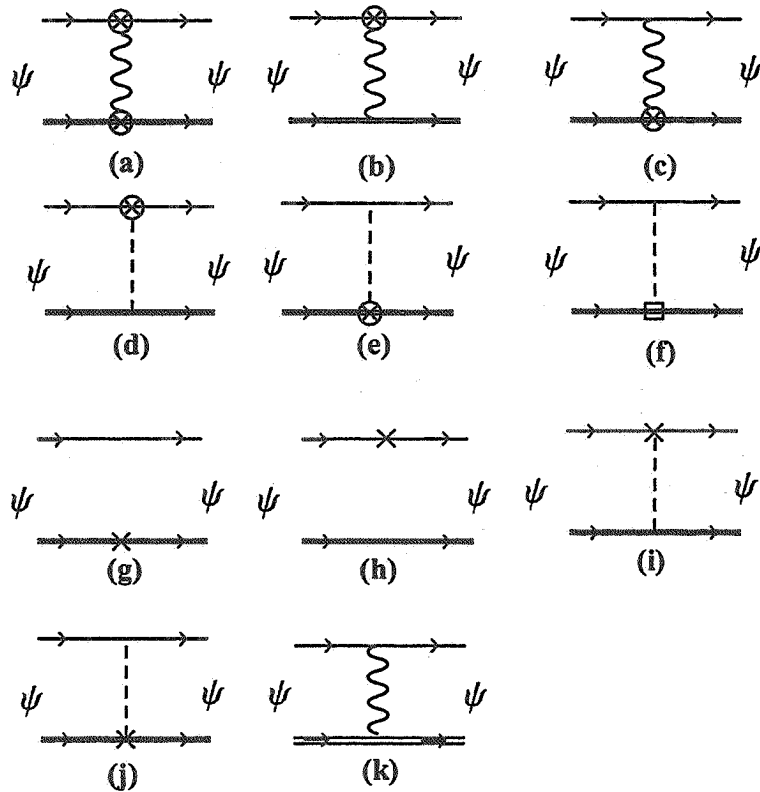
$$(\Delta E_n)_d = \frac{\alpha}{\sqrt{m}^r} \left\langle \frac{s_e \cdot L}{r^r} \right\rangle (1 - \delta_{l,0}) . \quad (13)$$

به همین ترتیب داریم:

$$(\Delta E_n)_e = \frac{\alpha(g-1)}{\sqrt{M}^r} \left\langle \frac{s_p \cdot L}{r^r} \right\rangle (1 - \delta_{l,0}) \quad (14)$$

با جمع کلیه نمودارهای شکل (۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 (\Delta E)_{total} &= \frac{r}{r} g \frac{\alpha^r}{n^r m M} \left( \frac{M m}{m+M} \right)^r \langle s_e \cdot s_p \rangle \delta_{l,0} \\
 &+ \frac{g}{\sqrt{M m n}^r} \frac{\mu^r \alpha^r (1 - \delta_{l,0}) \langle Y \rangle}{l(l+1)(l+\frac{1}{2})(2l+2)(2l-1)}
 \end{aligned} \quad (15)$$



شکل ۳. کلیه نمودارهای مرتبه  $\alpha^2$  مربوط به انرژی حالات مقید اتم هیدروژن.

که در آن

$$(\Delta E)_{total} = \frac{\gamma}{r} g \frac{\alpha^r}{n^r m M} \left( \frac{Mm}{m+M} \right)^r \delta_{l_0} \left( \frac{1}{\gamma} \delta_{S_1} - \frac{\gamma}{\gamma} \delta_{S_0} \right)$$

$$+ \frac{\gamma}{r} \frac{\alpha^r}{n^r} \mu^r \langle r_p^r \rangle \delta_{l_0} - \frac{g \mu^r \alpha^r (1 - \delta_{l_0}) \delta_{S_1}}{\gamma M m n^r (\gamma l + 1)}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{(\gamma l + \gamma)(l + 1)} & J = l + 1 \\ \frac{-1}{l(l + 1)} & J = l \\ \frac{1}{l(\gamma l - 1)} & J = l - 1 \end{cases}$$

$$+ \frac{\alpha^r \mu^r}{\gamma n^r (\gamma l + 1)} \left( \frac{g + \gamma}{Mm} + \left( \frac{1}{m^r} + \frac{g - 1}{M^r} \right) \right) (1 - \delta_{l_0}) \delta_{S_1}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{(l + 1)} & J = l + 1 \\ \frac{-1}{l(l + 1)} & J = l \\ \frac{-1}{l} & J = l - 1 \end{cases}$$

$$+ \left( \frac{1}{m^r} + \frac{1}{M^r} \right) \left( \frac{-\mu^r \alpha^r}{\gamma n^r (l + \frac{1}{\gamma})} + \frac{\gamma \mu^r \alpha^r}{\gamma n^r} \right)$$

$$\Delta(abc) = \left[ \frac{(a+b-c)!(a+c-b)!(b+c-a)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

مقادیر چشمداشتی مذکور را با استفاده از مجموعه دوم،  $|B\rangle$ ، محاسبه می کنیم. به عنوان مثال برای محاسبه  $\langle s_e \mathbf{L} \rangle$  داریم:

$$\langle B | s_e \mathbf{L} | B \rangle = \sum |W_i|^r \langle A | s_e \mathbf{L} | A \rangle, \quad (21)$$

$$\langle A | s_e \mathbf{L} | A \rangle = \frac{1}{\gamma} \begin{cases} l & j_{1r} = l + \frac{1}{\gamma} \\ -(l + 1) & j_{1r} = l - \frac{1}{\gamma} \end{cases} \quad (22)$$

برای محاسبه  $\langle s_p \mathbf{L} \rangle$ ،  $s_p \mathbf{L}$  را باید بر حسب  $s_e \mathbf{L}$  بنویسیم. به طور کلی مقادیر چشمداشتی این چنین بدست می آیند:

$$\langle Y \rangle = \frac{-\delta_{S_1}}{\gamma} \begin{cases} l(\gamma l - 1) & J = l + 1 \\ -(\gamma l + \gamma)(\gamma l - 1) & J = l \\ (\gamma l + \gamma)(l + 1) & J = l - 1 \end{cases}, \quad (23)$$

$$\langle s_e \mathbf{L} \rangle = \langle s_p \mathbf{L} \rangle = \delta_{S_1} \begin{cases} \frac{l}{\gamma} & J = l + 1 \\ \frac{-1}{\gamma} & J = l \\ \frac{-(l + 1)}{\gamma} & J = l - 1 \end{cases} \quad (24)$$

با جایگذاری مقادیر بالا در رابطه (۱۵) داریم:

$$\Delta E_{hfs}(n, \alpha^4) = \frac{4}{3} g \alpha^4 \frac{m^2}{M} \left( \frac{M}{M+m} \right)^2 \delta_{l,0}, \quad (30)$$

و برای حالت برانگیخته داریم:

$$\Delta E_{hfs}(n, l, \alpha^4) = \frac{g}{2} \frac{\mu^2 \alpha^4}{M m n^2 (2l+1)} \begin{cases} \frac{1}{(2l+2)(l+1)} & J=l+1 \\ \frac{-1}{l(l+1)} & J=l \\ \frac{1}{l(2l-1)} & J=l-1 \end{cases}$$

$$+ \frac{\alpha^4 \mu^2}{2 n^2 (2l+1)} \left( \frac{g+2}{M m} + \left( \frac{1}{m^2} + \frac{g-1}{M^2} \right) \right) \delta_{S,1} \begin{cases} \frac{1}{(l+1)} & J=l+1 \\ \frac{-1}{l(l+1)} & J=l \\ \frac{-1}{l} & J=l-1 \end{cases}. \quad (31)$$

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از روش میدان مؤثر NRQED، در ابتدا ضرایب نامعلوم لاگرانژی  $(c_i^{(0)})_p$  مربوط به پروتون محاسبه شده است. با استفاده از این ضرایب، تصحیح انرژی از مرتبه  $\alpha^4$  برای اتم هیدروژن به دست آمده است. جمله تصحیح انرژی مربوط به ساختار پروتون با استفاده از این روش بسادگی محاسبه شده است و همچنین تصحیح فوق ریز اتم هیدروژن (HFS) برای حالت پایه و تمامی حالت‌های برانگیخته به دست آمده است. استفاده از روش NRQED ما را قادر می‌سازد که بسادگی نمودارهایی که از مرتبه مورد نظر هستند جدا کرده و سپس با محاسبه هریک، تصحیح انرژی از مرتبه مورد نظر را به دست آوریم. به منظور اطمینان از نتایج به دست آمده، دو حالت حدی زیر مورد بحث قرار گرفته است:

۱) حالت  $M \rightarrow m$  و  $\langle r_p^2 \rangle \rightarrow 0$  که مربوط به اتم پوزیترونیم است و با نتایج به دست آمده از روش‌های دیگر مطابقت دارد.

۲) حالت  $M \rightarrow \infty$  و  $\langle r_p^2 \rangle \rightarrow 0$  که مربوط است به اتم هیدروژن وقتی از پس زنی پروتون صرف نظر کنیم که با نتایج مورد قبول در کتاب‌های مکانیک کوانتوم مطابقت دارد.

محاسبه تصحیح انرژی برای اتم هیدروژن از مرتبه‌های بالاتر با استفاده از NRQED در حال بررسی است.

$$+ \frac{\mu^2 (g-1) \alpha^4}{2 M^2 n^2} \delta_{l,0} + \frac{\mu^2 \alpha^4}{2 m^2 n^2} \delta_{l,0} + \frac{\mu^2 \alpha^4}{M m n^2} \delta_{l,0} + \frac{\mu^2 \alpha^4}{M m n^2} - \frac{2 \mu^2 \alpha^4}{2 M m n^2 (l + \frac{1}{2})}. \quad (25)$$

اگر ما در رابطه  $(\Delta E)_{total}$ ،  $M = m$  و  $g = 2$  را قرار دهیم و نمودار نابودی (annihilation vertex) را اضافه کنیم، به تصحیح انرژی اتم پوزیترونیم از مرتبه  $\alpha^4$  می‌رسیم [۱۳].  
حالت  $M \rightarrow \infty$  ( $\mu \rightarrow m$ ) و  $\langle r_p^2 \rangle \rightarrow 0$  مربوط است به اتم هیدروژن وقتی از پس زنی پروتون صرف نظر کنیم. در این حالت فقط نمودارهای  $\gamma i \gamma h, \gamma d$  غیر صفر می‌شوند. با توجه به این سه نمودار، نتیجه زیر برای تصحیح انرژی اتم هیدروژن به دست می‌آید:

$$(\Delta E)_{total} = \frac{\alpha}{2 m^2} \left\langle \frac{s_e \cdot L}{r^2} \right\rangle (1 - \delta_{l,0}) + \frac{-m \alpha^4}{2 n^2 (l + \frac{1}{2})} + \frac{2 m \alpha^4}{\lambda n^4} + \frac{m \alpha^4}{2 n^2} \delta_{l,0}. \quad (26)$$

جایگذاری مقدار چشمداشتی از رابطه (۲۲) در رابطه بالا به نتیجه

$$(\Delta E)_{total} = \frac{m \alpha^4 (1 - \delta_{l,0})}{2 n^2 l (l+1) (l + \frac{1}{2})} \begin{cases} l & j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} - \frac{1}{2} m \alpha^4 \left[ \frac{\alpha^2}{n^2 (l + \frac{1}{2})} - \frac{2 \alpha^2}{4 n^4} \right] + \frac{m \alpha^4}{2 n^2} \delta_{l,0}. \quad (27)$$

می‌انجامد. یادآور می‌شویم که در این حالت فقط دو تکانه زاویه‌ای یعنی  $L$  و  $s_e$  ( $J = L + s_e$ ) را داریم. پس از انجام عملیات جبری به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$(\Delta E)_{total} = -\frac{1}{2} \frac{m \alpha^4}{n^2} \left[ \frac{1}{(j + \frac{1}{2})} - \frac{2}{4 n^2} \right], \quad (28)$$

که این عبارت با نتیجه ارائه شده در کتاب‌های فیزیک کوانتومی یکسان می‌باشد [۱۴]. البته قابل ذکر است که در آنجا فقط حالت  $l \neq 0$  بررسی شده است، در حالیکه در این محاسبه حالت کلی بررسی شده است.

برای به دست آوردن ساختار فوق ریز (Hyperfine Splitting) فقط از نمودارهایی که شامل اسپین هستند استفاده می‌کنیم.

$$\Delta E_{hfs} = \Delta E_n(S=1) - \Delta E_n(S=0). \quad (29)$$

برای حالت پایه به نتیجه زیر می‌رسیم:

## مراجع

9. M I Eides, H Grotch and V A Shelyuto, *Phys. Rep.*, **342** (2001) 63-261.
10. S M Zebarjad, *McGill University Ph.D. thesis* (1997).
11. F Halzen and A D Martin "Quarks and leptons", John Wiley & Sons (1984).
12. D A Varshalovich, A N Moskalov and V K Khersonskii "Quantum Theory of Angular Momentum", World Scientific (1988).
13. C Itzykson and J B Zuber, *Quantum Field Theory*, McGil-Hill,(1980).
14. S Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons(1974).
1. W E Caswell and G P Lepage, *Phys. Lett.*, **B 167** (1986) 437.
2. P Labelle, S M Zebarjad and C P Burgess, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 8053.
3. P Labelle, *Phys. Rev. D* **58** (1998).
4. T Kinoshita and M Nio, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 4909.
5. A Pineda, J Soto, A Vairo. *Nucl. Phys. B* **566** (2000) 275.
6. A Pineda, J Soto, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 114011.
7. F E Low and E E Salpeter, *Phys. Rev.*, **83** (1951) 478.
8. E E Salpeter, *Phys. Rev.* **89** (1953) 92.