مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱، شمارهٔ ۳، زمستان ۱۳۷۶

بررسی حالتهای غیرکلاسیکی تابشِ درونِ کاواک

محمود سلطان الکتابی، محمدحسین نادری

گروه فیزیک دانشگاه اصفهان - اصفهان

تاریخ دریافت ۱۵ آذر ۷۵   تاریخ دریافت نسخهٔ نهایی ۱۵ آذر ۷۵

چکیده

در این مقاله، برهم‌کنش باریکه‌ای دمشی متشکّل از اتمهای دو ترازیِ یکسان، با میدان تابشی موجود در یک کاواکِ بدون اتلاف مورد بررسی قرار می‌گیرد. آهنگ دمش باریکه به اندازه‌ای کم است که در هر لحظه از زمان تنها یک اتم درون کاواک وجود دارد. همچنین، فرض می‌کنیم طول عمر ترازهای اتمی بسیار بزرگتر از زمان برهم‌کنش اتم - فوتون باشد. با به‌کارگیری الگوی جینز و کامینگز و براساس یک دیدگاه میکروسکوپیکی، که در آن شمار اتمهای دمیده شده به درون کاواک بعنوان مقیاس زمانی تحول دستگاه منظور می‌شود، برخی جنبه‌های غیرکلاسیکی تابش درون کاواک، مانند چلاندگی تابش، پادگروهه شدن فوتونی و آمار زیر پواسونی، نشان داده می‌شوند. علاوه بر این، نشان داده می‌شود که تحت شرایط ویژه‌ای عمل لیزری بدون وارونی جمعیت و قفل‌شدگی فازی میدان تابشی اتفاق می‌افتد. رهیافت حاضر علاوه بر اینکه به نتایجی مشابه با نتایج حاصل از نظریهٔ ماکروسکوپیکی لمب - اسکالی، مبتنی بر معادلهٔ حرکت عملگر چگالی میدان تابشی، می‌انجامد از این مزیت اساسی برخوردار است که نقش بزرگی شدت برهم‌کنش اتم - فوتون و شمار اتمهای دمیده شده به درون کاواک را در ظهور حالتهای غیرکلاسیکی میدان تابشی به خوبی مشخص می‌کند.

۱. مقدمه

پیدایش گونه‌های جدیدی از چشمه‌های تابش الکترومغناطیسی، در گسترهٔ بسامدی از امواج رادیویی تا فرابنفش دور، سبب بررسی دقیقتر موضوع اندرکنش تابش الکترومغناطیسی با ماده شده است. بررسیهای انجام یافته علاوه بر اینکه آگاهیهای دقیقی در مورد ساختار اتمها و مولکولها به دست می‌دهند، وجود حالتهای نوینی از تابش الکترومغناطیسی را نیز پیش‌بینی می‌کنند. در این بررسیها، ابتدا با معرفی یک الگوی نظری مناسب، دینامیک کوانتومی دستگاه متشکل از ذرات باردار نیوتنی و تابش الکترومغناطیسی تشریح و سپس مشخص می‌شود که چگونه می‌توان الگوی مزبور را برای مطالعهٔ اندرکنش بکار گرفت. ساده‌ترین این الگوها، که به طور دقیق قابل حل است، الگوی جینز و کامینگز است. این الگو، برای توصیف اندرکنش اتم دو ترازی با تابش الکترومغناطیسی کوانتیدهٔ تک مدی تحت تقریب امواج چرخان و شرایط بازآوایی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱]. یکی از مهمترین پیامدهای کوانتش میدان الکترومغناطیسی در الگوی مزبور بروز حالتهایی از میدان تابشی است که فاقد همتای کلاسیکی هستند. یعنی حالتهایی که ویژگیهای آماری آنها را نمیتوان با استفاده از یک تابع توزیع کلاسیکی خوش رفتار توصیف کرد، و این خود سبب می‌گردد تا اثرهای گوناگونی از آمار کوانتومی میدان تابشی خودنمایی کنند. چلاندگی میدان تابشی [۲]، آمار فراپواسونی و آمار زیرپواسونی میدان [۳] و پادگروهه شدن فوتونی [۴] از این جمله‌اند. از سوی دیگر، برخلاف مورد جفتیدگی اتم با تعداد نامتناهی از مدهای درون کاواک، که در چارچوب نظریهٔ ویگنر - وایسکوف منجر به فرآیند برگشت‌ناپذیر فروافت اتمی می‌گردد، برهم‌کنش تک اتم با تک مدی از میدان تابشی درون کاواک، یک فرآیند برگشت‌پذیر است.

مناسبترین دستگاهی که می‌توان به کمک آن برهم‌کنش تک اتم با تک مد میدان تابشی درون کاواک را مورد مطالعه قرار داد، ریز میِزِرْ است. در این دستگاه باریکه‌ای از اتمهای دو ترازی با آهنگ دمش پایین به‌درون یک کاواک آرمانی (کاواک بدون اتلاف و با سازهٔ

کیفیت بزرگ) دمیده می‌شوند، به طوری که در هر لحظه از زمان، بر خلاف لیزرها و میزرهای معمولی، تنها یک اتم درون کاواک وجود دارد. نخستین نظریهٔ کوانتومی ریزمیزرها که براساس سرشت میکروسکوپیکی دستگاه، اندرکنش باریکه‌ای از اتمهای برانگیختهٔ دمیده شده به درون کاواک بدون اتلاف را مورد بررسی قرار می‌دهد در سال ۱۳۶۵/۱۹۸۶ ارائه گردید [۵]. از جمله مهمترین نتایج نظریهٔ مزبور، پیشگویی آمار زیرپواسونی برای میدان ریزمیزری است. در روشی دیگر، براساس نظریهٔ ماکروسکوپیکی لیزر، ویژگیهای آماری میدان ریزمیزری، در موردی که حالت اتمهای دو ترازیِ دمیده شده به درون کاواک، به صورت برهم‌نهش همدوسی از دو تراز اتمی باشد، مورد مطالعه قرارگرفته است [۶]. نتایج به‌دست آمده بر نقش همدوسی اولیهٔ اتمی در تحول زمانی دستگاهِ برهم‌کنشی تأکید دارند. پیشرفتهای اخیر در زمینهٔ ساخت کاواک‌های کهموجی ابررسانا با سازهٔ کیفیت بزرگ $\left(Q \approx 10^{11}\right)$ و دستیابی به دماهای بسیار پایین امکان تحقیق تجربی موارد فوق را فراهم آورده‌اند [۷].

در این مقاله، با به‌کارگیری دیدگاه میکروسکوپیکی، که در آن تعداد اتمهای دمیده شده به درون کاواک بعنوان مقیاس زمانی تحول دستگاه برهم‌کنشی اتم - فوتون منظور می‌شود، برهم‌کنش اتمهای دو ترازی با میدان تابشی اولیهٔ درون کاواک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش دوم، عبارتی کلی برای عملگر چگالی میدان تابشی درون کاواک به دست می‌آوریم. در بخش سوم و چهارم به ترتیب برای دو حالت اولیهٔ متفاوت اتمی، یکی حالت برهم‌نهی همدوس و دیگری حالت پایهٔ اتمی، ویژگیهای تابشِ درونِ کاواک، حاصل از برهم‌کنش باریکهٔ اتمی با تابش اولیهٔ درون کاواک را مطالعه می‌کنیم. سرانجام، بخش پنجم به جمع‌بندی و ارائهٔ نتایج اختصاص داده شده است. در این بررسی، باریکهٔ اتمی را تک سرعت و کاواک را بدون اتلاف درنظر می‌گیریم. علاوه بر این، از وجود فوتونهای گرمایی درون کاواک چشم می‌پوشیم و فرض می‌کنیم طول عمر ترازهای اتمی بسیار بزرگتر از زمان برهم‌کنش باشد.

۲. عملگر چگالی تابش درون کاواک

باریکه‌ای از اتمهای دو ترازی یکسان و تک سرعت را در نظر می‌گیریم، که به درون یک کاواک آرمانی (بدون اتلاف) دمیده می‌شوند. فرض می‌کنیم شار دمش اتمی به اندازه‌ای کم است که در هر لحظه از زمان تنها یک اتم درون کاواک وجود داشته باشد. حالت اتمی اتم K را با $\left|\phi^{k}_{atom}\right>$ نشان می‌دهیم. بنابر الگوی جینز و کامینگز، برهم‌کنش هر اتم با میدان تابشی تک مدی کوانتیدهٔ درون کاواک، تحت تقریب امواج چرخان، توسط هامیلتونی زیر توصیف می‌شود [۱]،

$$\hat{H}_k = \hbar\Omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\omega\hat{\sigma}^z_k + \hbar g\left(\hat{\sigma}^+_k\hat{a} + \hat{\sigma}^-_k\hat{a}^+\right), \qquad (۱)$$

که در آن جملهٔ اول هامیلتونی تابش، جملهٔ دوم هامیلتونی اتم و جملهٔ سوم هامیلتونی برهم‌کنش است. $\hat{a}$ و $\hat{a}^+$ به ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش فوتونی، $\hat{\alpha}^z_k$ و $\hat{\alpha}^{\pm}_k$ عملگرهای پائولی و g ثابت جفتیدگی اتم با میدان است. ω بسامد گذار اتمی بین دو تراز برانگیخته و پایهٔ اتمی است. برای سادگی فرض می‌کنیم که بسامد گذار اتمی، ω، با ویژهٔ بسامد مد کاواک، Ω، مساوی باشد (شرط بازآوایی). در غیاب اتلاف درون کاواکی، تنها عاملی که بر تحول زمانی دستگاه اتم - فوتون حاکم است، جفتیدگی اتم با فوتون است. در تصویر اندرکنش، عملگر تحول زمانی مربوط به اتم K چنین است،

$$\begin{aligned}
\hat{U}_k(\tau) &= \exp\left[\frac{-i\hat{H}_{int}\tau}{\hbar}\right] = \exp\left[-ig\tau\left(\hat{\sigma}^+_k\hat{a} + \hat{\sigma}^-_k\hat{a}^+\right)\right] \\
&= 1 - ig\tau\left(\hat{\sigma}^+_k\hat{a} + \hat{\sigma}^-_k\hat{a}^+\right) - \frac{(g\tau)^2}{2!}\left[\frac{1}{2} + \hat{\sigma}^z_k + \hat{a}^+\hat{a}\right] \\
&\quad + i\frac{(g\tau)^3}{3!}\frac{\left[\frac{1}{2} + \hat{\sigma}^z_k + \hat{a}^+\hat{a}\right]^{3/2}}{\left[\frac{1}{2} + \hat{\sigma}^z_k + \hat{a}^+\hat{a}\right]^{1/2}}\left(\hat{\sigma}^+_k\hat{a} + \hat{\sigma}^-_k\hat{a}^+\right) + \cdots \\
&= \cos\left[g\tau\sqrt{\frac{1}{2} + \hat{\sigma}^z_k + \hat{a}^+\hat{a}}\right] \\
&\quad - i\frac{\sin\left[g\tau\sqrt{\frac{1}{2} + \hat{\sigma}^z_k + \hat{a}^+\hat{a}}\right]}{\sqrt{\frac{1}{2} + \hat{\sigma}^z_k + \hat{a}^+\hat{a}}}\left(\hat{\sigma}^+_k\hat{a} + \hat{\sigma}^-_k\hat{a}^+\right), \qquad (۲)
\end{aligned}$$

که در آن، از روابط جابجاگری زیر استفاده شده است،

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \ , \qquad (۳)$$

$$[\hat{\sigma}^+_k, \hat{a}^{\pm}] = 0 \ , \qquad (۴)$$

$$[\hat{\sigma}^+_k, \hat{\sigma}^-_k] = 2\hat{\sigma}^z_k \ , \qquad (۵)$$

حالت اولیهٔ دستگاه متشکل از میدان تابشی و N اتم وارد شده به درون کاواک را در تصویر اندرکنش، با توجه به اینکه فضای حالت اتمی مستقل از فضای حالت میدان تابشی است، چنین می‌نویسیم،

$$|\Psi_N^{(i)}\rangle = \left[\Pi_{k=1}^{N} |\phi_{atom}^{k}\rangle\right] \otimes |\Phi_{field}^{(i)}\rangle \cdot \qquad (۶)$$

$|\phi_{field}^{(i)}\rangle$ ، حالت اولیهٔ میدان تابشی درون کاواک را مشخص می‌کند. پس از عبور N اتم از درون کاواک و وقوع اندرکنش، با توجه به تحول زمانی، تابع حالت دستگاه اتم - میدان در تصویر اندرکنش چنین خواهد بود

$$\begin{aligned}|\Psi_N^{(f)}\rangle &= \prod_{k=1}^{N} \hat{U}_k(\tau)\,|\Psi_N^{(i)}\rangle \\ &= \hat{U}_N(\tau)\,[\,|\Phi_{atom}^{N}\rangle \otimes |\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\,]\,, \qquad (۷)\end{aligned}$$

که در آن، τ، مدت زمان برهم‌کنش اتم با میدان درون کاواک یا مدت زمانی است که هر اتم درون کاواک بسر می‌برد. در اینجا، فرض بر این است که $\tau << \gamma^{-1}$ (γ آهنگ فرواقت اتمی است). با به‌کارگیری رابطهٔ بستاری $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1$ ، رابطهٔ (۷) را در فضای حالت عددی میدان تابشی بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}|\Psi_N^{(f)}\rangle &= \sum_n |n\rangle\langle n|\Psi_N^{(f)}\rangle \\ &= \sum_n \hat{U}_N(\tau)\,|\Phi_{atom}^{N}\rangle \otimes |n\rangle\langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle \cdot\end{aligned} \qquad (۸)$$

عملگر چگالی توصیف‌کنندهٔ تابش درون کاواک، پس از عبور N اتم از درون کاواک، با محاسبهٔ رد عملگر چگالی کل، $|\psi_N^{(f)}\rangle\langle\psi_N^{(f)}|$ ، بر روی حالتهای اتمی چنین است،

$$\begin{aligned}\rho_N^{field} &= Tr_{atom}\,[\,|\Psi_N^{(f)}\rangle\langle\Psi_N^{(f)}|\,] \\ &= Tr_{atom}\Big[\sum_n\sum_m \langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\, \hat{U}_N(\tau)\,|\Phi_{atom}^{N}\rangle \\ &\quad \otimes |n\rangle\langle\Psi_{N-1}^{(f)}|m\rangle\langle m| \\ &\quad \otimes \langle\Phi_{atom}^{N}|\,\hat{U}_N^{+}(\tau)\Big] \;\cdot\end{aligned} \qquad (۹)$$

این رابطه، اساس بررسیهای بعدی ما را تشکیل می‌دهد؛ با استفاده از آن می‌توانیم برخی خواص آماری تابش درون کاواک را بـه دست آوریم. وابستگی صریح عملگر چگالی میدان تابشی به حالت اولیهٔ اتمی از رابطهٔ (۹) آشکار است. ابتدا، باریکه‌ای از اتمهای همدوس و سپس باریکه‌ای از اتمهای حالت پایه را درنظر می‌گیریم.

۳. دمش باریکهٔ اتمی همدوس

باریکه‌ای از اتمهای دو ترازی که، حالت هر اتم K، به صورت برهم‌نهشی همدوس از تراز پایه، $|b_k\rangle$ ، و تراز برانگیخته، $|a_k\rangle$ است، در نظر می‌گیریم:

$$|\Phi_{atom}^{k}\rangle = \alpha\exp(i\phi)\,|a_k\rangle + \beta\,|b_k\rangle \;، \qquad (۱۰)$$

α، β و ϕ کمیتهای حقیقی هستند و $\alpha^2+\beta^2=1$ است. همدوسی اولیهٔ اتمی توسط یک میدان دمشی همدوس ایجاد می‌شود [۸] و سپس باریکهٔ اتمی همدوس به درون یک کاواک آرمانی دمیده می‌شود و در آنجا با میدان تابشی تک مدی درون کاواک برهم‌کنش می‌کند. با استفاده از روابط (۲) و (۸) و (۱۰)، تابع حالت نهایی دستگاه اتم – میدان را چنین به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}|\Psi_N^{(f)}\rangle = \sum_n \langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle \{ &[\alpha e^{i\phi}\cos(g\tau\sqrt{n+1})\,|a_n\rangle \\ &+ \beta\cos(g\tau\sqrt{n})\,|b_N\rangle] \otimes |n\rangle \\ &- i\beta\sin(g\tau\sqrt{n})\,|a_N\rangle \otimes |n-1\rangle \\ &- i\alpha e^{i\phi}\sin(g\tau\sqrt{n+1})\,|b_N\rangle \otimes |n+1\rangle\} \cdot\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

اکنون، بررسی خود را برای دو حالت خاص میدان تابشی، یکی حالت به دام افتادهٔ میدان و دیگری حالت خلأ میدان، ادامه می‌دهیم.

الف ـ حالتهای به دام افتادهٔ میدان تابشی

حالت‌های به دام افتادهٔ میدان تابشی نقشی اساسی در دینامیک برهم‌کنش اتم – میدان ایفا می‌کنند. [۵] اگر زمان برهم‌کنش τ به گونه‌ای باشد که داشته باشیم،

(۱۲-۱) q عدد درست $\quad g\tau\sqrt{n} = q\pi,$

آنگاه بنا بر رابطهٔ (۱۱) جفتیدگی رو به پایین میان حالتهای $|n\rangle$ و $|n-1\rangle$ از میان برداشته می‌شود و $|n\rangle$ یک حالت به دام افتادهٔ $q\pi$ پایین سوی خوانده می‌شود. به طور مشابه حالتی از میدان تابشی، که برای آن داشته باشیم،

(۱۲-۲) q عدد درست $\quad g\tau\sqrt{n+1} = q\pi,$

یک حالت به دام افتادهٔ $q\pi$ بالاسوی خوانده می‌شود. روابط (۱۲) نشان می‌دهند که پس از یک حالت به دام افتادهٔ $q\pi$ بالاسوی همواره یک حالت به دام افتادهٔ $q\pi$ پایین سوی وجود دارد. تحت چنین شرایطی، اتمهایی که به کاواک وارد می‌شوند، با همان انرژی اولیهٔ خود از کاواک خارج می‌شوند. به بیان دیگر، کاواک در مقابل عبور اتمها شفاف است.

اکنون، فرض می‌کنیم که پس از عبور $N-1$ اتم از درون کاواک حالت میدان تابشی بین یک حالت به دام افتادهٔ $2q\pi$ پایین سوی و یک حالت به دام افتادهٔ $(1+2q)\pi$ بالا سوی محصور شده باشد. از این رو، بنابر (۱۱) می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\begin{aligned}|\Psi_N^{(f)}\rangle &= \sum_n \langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle[-\alpha e^{i\phi}|a_N\rangle+\beta|b_N\rangle]\otimes|n\rangle\\ &=\sum_n \langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle e^{i\phi'}[\alpha' e^{i\phi}|a_N\rangle\\ &\quad +\beta'|b_N\rangle]\otimes|n\rangle\,,\end{aligned}\tag{۱۳}$$

که به همراه آن

$$e^{i\phi'}=+1,\qquad \alpha'=-\alpha,\qquad \beta'=\beta \tag{۱-۱۴}$$

و یا

$$e^{i\phi'}=-1,\qquad \alpha'=\alpha,\qquad \beta'=-\beta \tag{۲-۱۴}$$

با استفاده از (۱۳) و (۱۴)، رابطهٔ (۱۱) به دو معادلهٔ هم‌ارز زیر می‌انجامد:

$$\begin{aligned}&\sum_n\langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\alpha e^{i\phi}\cos(g\tau\sqrt{n+1})\,|a_N\rangle\otimes|n\rangle\\ &-i\beta\sum_n\langle n+1|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\sin(g\tau\sqrt{n+1})\,|a_N\rangle\otimes|n\rangle\\ &=-\sum_n\langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\alpha e^{i\phi}|a_N\rangle\otimes|n\rangle\,,\end{aligned}\tag{۱-۱۵}$$

$$\begin{aligned}&\sum_n\langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\beta\cos(g\tau\sqrt{n})\,|b_N\rangle\otimes|n\rangle\\ &-i\alpha e^{i\phi}\sum_n\langle n-1|\Psi_{N-1}^{(r)}\rangle\sin(g\tau\sqrt{n})\,|b_N\rangle\otimes|n\rangle\\ &=\sum_n\langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\beta|b_N\rangle\otimes|n\rangle\,.\end{aligned}\tag{۲-۱۵}$$

چون معادلات (۱۵) به ازای هر مقدار n برقرارند. داریم،

$$\langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle=\frac{i\alpha e^{i\phi}\sin(g\tau\sqrt{n})}{\beta[\cos(g\tau\sqrt{n})-1]}\langle n-1|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\,.\tag{۱۶}$$

اکنون، با استفاده از (۱۶) عناصر ماتریسی عملگر چگالی میدان درون کاواک به سادگی تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}\rho_{N-1}^{field}(n,m)&=Tr_{atom}[\langle n|\Psi_{N-1}^{(f)}\rangle\langle\Psi_{N-1}^{(f)}|m\rangle]\\ &=\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^2\frac{\sin(g\tau\sqrt{n})\sin(g\tau\sqrt{m})}{[\cos(g\tau\sqrt{n})-1][\cos(g\tau\sqrt{m})-1]}\times\\ &\quad\rho_{N-1}^{field}(n-1,\,m-1)\,.\end{aligned}\tag{۱۷}$$

تابع توزیع احتمال فوتونی نیز عبارت است از:

$$\begin{aligned}P_{N-1}^{field}(n)&=\rho_{N-1}^{field}(n,n)\\ &=\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^2\text{cotan}^2\left[\frac{g\tau\sqrt{n}}{2}\right]P_{N-1}^{field}(n-1)\\ &=\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{2n}\prod_{j=1}^{n}\text{cotan}^2\left[\frac{g\tau\sqrt{j}}{2}\right]P_{N-1}^{field}(0)\,.\end{aligned}\tag{۱۸}$$

این تابع توزیع، معرف حالتی از میدان تابشی موسوم به حالت کتانژانت است. ویژگیهای حالت مزبور مستقل از حالت اولیهٔ تابش درون کاواک است و با وجود این که میدان در خلال زمانِ برهم‌کنش دچار تغییر می‌شود، این حالت بیان‌کنندهٔ حالت ایستای میدان است [۹].

در اینجا، با به‌کارگیری تقریب پیوسته، تحلیل ساده‌ای از تابع توزیع (۱۸) ارائه می‌دهیم. از (۱۸) چنین داریم:

$$\begin{aligned}\ln\left[\frac{P_{N-1}^{field}(n)}{P_{N-1}^{field}(0)}\right]&=2n\ln\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]+\sum_{j=1}^{n}\ln\left[\text{cotan}^2\left[\frac{g\tau\sqrt{j}}{2}\right]\right]\\ &\approx 2n\ln\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]+\int_0^n\ln\left[\text{cotan}^2\left[\frac{g\tau\sqrt{j}}{2}\right]\right]dj\\ &\equiv f(n)\,,\end{aligned}\tag{۱۹}$$

معادلهٔ (۱۹) به عنوان تعریف $f(n)$ نیز انجام وظیفه می‌کند.

بیشینهٔ تابع توزیع $P_{N-1}^{field}(n)$ را می‌توان با حل معادلهٔ $f'(n)=0$ به دست آورد. فرض می‌کنیم که n_0 مقداری از n باشد که به ازای آن $f(n)$ بیشینه می‌شود. در این صورت:

$$\begin{aligned}f'(n_0)&=2\ln\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]+\ln\left[\text{cotan}^2\left[\frac{g\tau\sqrt{n_0}}{2}\right]\right]\\ &=0\,.\end{aligned}\tag{۲۰}$$

در نتیجه،

$$n_\circ=\left[\frac{2\tan^{-1}(\alpha/\beta)}{g\tau}\right]^2 \qquad (۲۱)$$

اکنون تابع $f(n)$ را در همسایگی $n=n_\circ$ بسط می‌دهیم:

$$f(n)=f(n_\circ)+\frac{1}{2}(n-n_\circ)^2 f''(n_\circ)+\cdots \; . \qquad (۲۲)$$

بدین ترتیب، با استفاده از (۱۹)، عبارت تقریبی تابع توزیع احتمال فوتونی چنین است:

$$P^{field}_{N-1}(n)\approx C(n_\circ)\exp\left[\frac{(n-n_\circ)^2 f''(n_\circ)}{2}\right] \qquad (۲۳)$$

از تابع توزیع گؤسی بالا، بی‌درنگ به دو نتیجهٔ مهم زیر دست می‌یابیم:

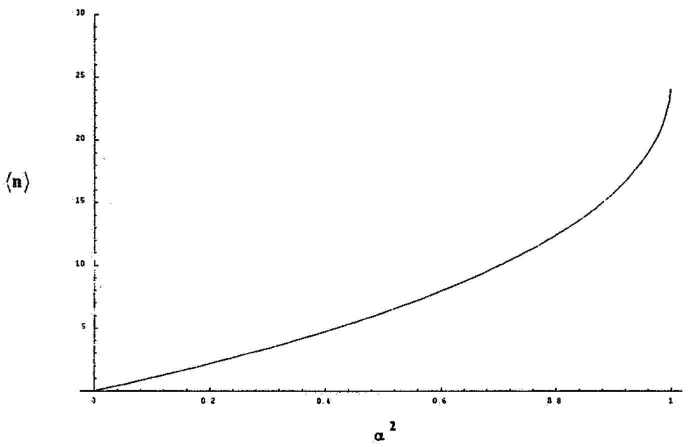
۱. شمار میانگین فوتونهای درون کاواک $n_\circ$ است و با رابطهٔ (۲۱) داده می‌شود. در اینجا، حتی اگر $\alpha<\beta$ باشد، یعنی وارونی جمعیت بین دو تراز اتمی اتفاق نیفتاده باشد، باز هم برای $n_\circ$ مقدار قابل قبولی در دست است. این همان عمل لیزری بدون وارونی جمعیت است که در الگوهای دیگری از برهم‌کنش اتم – میدان نیز پیش‌بینی شده است [۱۰ و ۱۱].

۲. واریانس بهنجار شده به واحد شمار فوتونی، σ^2، برابر است با:

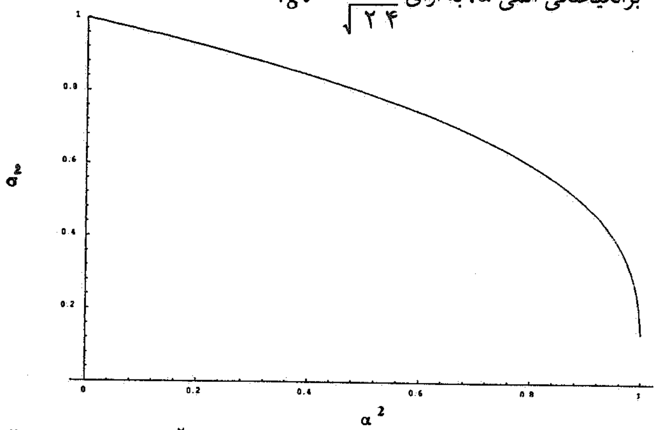
$$\sigma^2=\frac{(\Delta n)^2}{n_\circ}=\frac{-1}{n_o f''(n_\circ)}$$
$$=\frac{(\alpha/\beta)}{\tan^{-1}(\alpha/\beta)[1+(\alpha/\beta)^2]}. \qquad (۲۴)$$

همانطور که دیده می‌شود، σ^2، به ازای $\alpha>0$، همواره کوچکتر از واحد است. یعنی، میدان تابشی از آمار زیرپواسونی پیروی می‌کند و حالت کتانژانت بعنوان یک حالت غیرکلاسیکی میدان شناخته می‌شود.

در شکلهای ۱ و ۲، به ترتیب نمودار شمار میانگین فوتونهای درون کاواک و واریانس بهنجار به واحد شمار فوتونی برحسب احتمال برانگیختگی، α^2، رسم شده‌اند.



شکل ۱. شمار میانگین فوتونهای درون کاواک $<n>$ بر حسب احتمال برانگیختگی اتمی α^2، به ازای $g\tau=\frac{\pi}{\sqrt{24}}$.



شکل ۲. واریانس بهنجار به واحد شمار فوتونی σ^2 بر حسب احتمال برانگیختگی α^2، به ازای $g\tau=\frac{\pi}{\sqrt{24}}$.

اکنون، اگر علاوه بر شرط به دام افتادگی حالت میدان فرض کنیم شدت اندرکنش نیز بسیار کوچک باشد ($g\tau \ll 1$) آنگاه تابع توزیع (۱۸) به شکل زیر درخواهد آمد

$$P^{field}_{N-1}(n)\approx\left(\frac{2\alpha}{\beta g\tau}\right)^2\frac{1}{n}P^{field}_{N-1}(n-1) \; . \qquad (۲۵)$$

رابطهٔ بالا، بیان‌کنندهٔ تابع توزیع احتمال فوتونی حالت همدوس میدان با شمار میانگین فوتونی

$$<n>=\left(\frac{2\alpha}{\beta g\tau}\right)^2 \qquad (۲۶)$$

است، زیرا تابع توزیع حالت همدوس میدان، P^{field}_{Coh}، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{P^{field}_{coh}(n)}{P^{field}_{coh}(n-1)}=\frac{<n>}{n}. \qquad (۲۷)$$

بدین سان، تحت شرط به دام افتادگی حالت میدان تابشی و ضعیف بودن برهم‌کنش، میدان تابشی درون کاواک به سمت حالت همدوس تحول می‌یابد.

ب ـ حالت اولیهٔ خلأ الکترومغناطیسی

در ادامهٔ بررسی خود، مجدداً به رابطهٔ (۱۱) بازمی‌گردیم و با استفاده از آن عناصر ماتریسی عملگر چگالی میدان تابشی درون کاواک را پس از عبور N اتم، به دست می‌آوریم. نتیجه چنین است:

$$\begin{aligned}
\rho_N^{field}(n,m) &= \langle n|Tr_{atom}[|\Psi_N^{(f)}\rangle\langle\Psi_N^{(f)}|]|m\rangle \\
&= \langle n|\sum_{i=a_N,b_N}\langle i|\Psi_N^{(f)}\rangle\langle\Psi_N^{(f)}|i\rangle|m\rangle \\
&= (\alpha^2 C_{n+1}C_{m+1}+\beta^2 C_n C_m)\rho_{N-1}^{field}(n,m) \\
&+\beta^2 S_{n+1}S_{m+1}\,\rho_{N-1}^{field}(n+1,m+1)+ \\
&\alpha^2 S_n S_m\,\rho_{N-1}^{field}(n-1,m-1) \\
&+i\alpha\beta e^{i\phi}C_{n+1}S_{m+1}\,\rho_{N-1}^{field}(n,m+1) \\
&+i\alpha\beta e^{-i\phi}C_n S_m\,\rho_{N-1}^{field}(n,m-1) \\
&-i\alpha\beta e^{-i\phi}S_{n+1}C_{m+1}\,\rho_{N-1}^{field}(n+1,m) \\
&-i\alpha\beta e^{i\phi}S_n C_m\,\rho_{N-1}^{field}(n-1,m),
\end{aligned} \tag{۲۸}$$

که در آن، $C_n=\cos(g\tau\sqrt{n})$ و $S_n=\sin(g\tau\sqrt{n})$ است. اکنون، فرض می‌کنیم میدان درون کاواک در ابتدا در حالت خلأ الکترومغناطیسی، یعنی $\rho_{N=0}^{field}(n,m)=\delta_{n,0}\delta_{m,0}$، باشد. پس از عبور یک اتم از درون کاواک، یعنی $N=1$، با استفاده از (۲۷) داریم،

$$\begin{aligned}
\rho_{N=1}^{field}(n,m) &= (\alpha^2 C_1^2+\beta^2)\delta_{n,0}\delta_{m,0} \\
&+\alpha^2 S_1^2\delta_{n,1}\delta_{m,1}+i\alpha\beta e^{-i\phi}S_1\delta_{n,0}\delta_{m,1} \\
&-i\alpha\beta S_1 e^{i\phi}\delta_{n,1}\delta_{m,0},
\end{aligned} \tag{۲۹}$$

و برای $N=2$ داریم:

$$\begin{aligned}
\rho_{N=2}^{field}(n,m) &= (\alpha^2 C_{n+1}C_{m+1}+\beta^2 C_n C_m)\rho_1^{field}(n,m) \\
&+\beta^2 S_{n+1}S_{m+1}\,\rho_1^{field}(n+1,m+1) \\
&+\alpha^2 S_n S_m\,\rho_1^{field}(n-1,m-1) \\
&+i\alpha\beta e^{i\phi}C_{n+1}S_{m+1}\,\rho_1^{field}(n,m+1) \\
&+i\alpha\beta e^{-i\phi}C_n S_m\,\rho_1^{field}(n,m-1) \\
&-i\alpha\beta e^{-i\phi}S_{n+1}C_{m+1}\,\rho_1^{field}(n+1,m) \\
&-i\alpha\beta e^{i\phi}S_n C_m\,\rho_1^{field}(n-1,m)\,.
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

با استفاده از (۲۹)، چنین به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\rho_{N=2}^{field}(n,m) &= [\alpha^4 C_1^4+\alpha^2\beta^2[C_1^2+(C_1-S_1^2)^2]+\beta^4] \\
&\delta_{n,0}\delta_{m,0}+[\alpha^2 S_1^2[\alpha^2(C_1^2+C_2^2) \\
&+\beta^2(1+C_1)^2]\delta_{n,1}\delta_{m,1} \\
&+\alpha^4 S_1^2 S_2^2\delta_{n,2}\delta_{m,2}+[iS_1^2 S_2\alpha^3 e^{-i\psi} \\
&[\beta(1+C_1)]]\delta_{n,1}\delta_{m,2} \\
&+[iS_1\alpha e^{-i\psi}[\alpha^2\beta[C_1^2+C_2(C_1-S_1^2)] \\
&+\beta^3(1+C_1)]\,\delta_{n,0}\delta_{m,1}+ \\
&S_1S_2\alpha^2\beta^2 e^{-2i\psi}\delta_{n,0}\delta_{m,2} \\
&-\alpha^2\beta^2 S_1S_2 e^{2i\psi}\delta_{n,2}\delta_{m,0} \\
&-[iS_1\alpha e^{i\psi}[\alpha^2\beta[C_1^2+C_2(C_1-S_1^2)] \\
&+\beta^3(1+C_1)]]\delta_{n,1}\delta_{m,0} \\
&-i\alpha^3 S_1^2 S_2[\beta(1+C_1)]e^{i\psi}\delta_{n,2}\delta_{m,1}\,.
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

به همین ترتیب، برای $N=3, 4, \ldots$ نیز می‌توان عبارت مربوط به عملگر چگالی میدان تابشی را به دست آورد. اکنون عبارت کلی زیر را برای عناصر ماتریسی عملگر چگالی در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
\rho_N^{field}(n,m) &= (-ie^{i\phi})^{n-m}\,\alpha^{n+m} \\
&[\prod_{k=1}^{n}S_k\prod_{l=1}^{m}S_l]\rho'_N(n,m)
\end{aligned} \tag{۳۲}$$

که در آن، چنین داریم:

$$\rho'_{N=1}(0,0) = \alpha^2 C_1^2 + \beta^2,$$
$$\rho'_{N=1}(0,1) = \rho'_{N=1}(1,0) = \beta,$$
$$\rho'_{N=1}(1,1) = 1,$$
$$\rho'_{N=2}(0,0) = \alpha^4 C_1^4 + \alpha^2\beta^2 [C_1^2 + (C_1 - S_1^2)^2] + \beta^4,$$
$$\rho'_{N=2}(0,1) = \rho'_{N=2}(1,0) = \alpha^2\beta [C_1^2 + C_2(C_1 - S_1^2)] + \beta^3(1+C_1),$$
$$\rho'_{N=2}(1,1) = \alpha^2(C_1^2 + C_2^2) + \beta^2(1+C_1)^2,$$
$$\rho'_{N=2}(1,2) = \rho'_{N=2}(2,1) = \beta(1+C_1),$$
$$\rho'_{N=2}(2,0) = \rho'_{N=2}(0,2) = \rho'_{N=2}(2,2) = 1.$$

با ترکیب روابط (۲۸) و (۳۲)، به یک رابطهٔ بازگشتی مستقل از فاز برای $\rho'_N(n,m)$ به شکل زیر دست می‌یابیم:

$$\begin{aligned}\rho'_N(n,m) = {} & (\alpha^2 C_{n+1} C_{m+1} + \beta^2 C_n C_m)\rho'_{N-1}(n,m) \\ & + \rho'_{N-1}(n-1,m-1) \\ & + \alpha^2\beta^2 S_{n+1}^2 S_{m+1}^2 \rho'_{N-1}(n+1,m+1) \\ & - \alpha^2\beta C_{n+1} S_{m+1}^2 \rho'_{N-1}(n,m+1) \\ & + \beta C_n \rho'_{N-1}(n,m-1) \\ & - \alpha^2\beta C_{m+1} S_{n+1}^2 \rho'_{N-1}(n+1,m) \\ & + \beta C_m \rho'_{N-1}(n-1,m). \qquad (۳۳)\end{aligned}$$

با این شرط اولیه که $\rho'_{N=0}(n,m) = \delta_{n,0}\delta_{m,0}$ است. اکنون، فرض می‌کنیم که برهم‌کنش اتم - میدان ضعیف است، یعنی ؛ $g\tau \ll 1$, $g\tau\sqrt{<n>} \ll 1$ ؛ $<n>$ شمار میانگین فوتونهای درون کاواک است. بنابراین در تقریب مرتبهٔ صفرم چنین داریم:

$$\begin{aligned}\rho'_N(n,m) \approx {} & \rho'_{N-1}(n,m) + \rho'_{N-1}(n-1,m-1) \\ & + \beta[\rho'_{N-1}(n,m-1) + \rho'_{N-1}(n-1,m)] \cdot\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

بنابراین، مثلاً برای $N = 1, 2$ داریم:

$$\begin{aligned}\rho'_{N=1}(n,m) \approx {} & \delta_{n,0}\delta_{m,0} + \delta_{n,1}\delta_{m,1} \\ & + \beta[\delta_{n,0}\delta_{m,1} + \delta_{n,1}\delta_{m,0}],\end{aligned} \qquad (۳۵ - ۱)$$

و

$$\begin{aligned}\rho'_{N=2}(n,m) \approx {} & \delta_{n,0}\delta_{m,0} + 2\beta\delta_{n,0}\delta_{m,1} + \beta^2\delta_{n,0}\delta_{m,2} \\ & + 2\beta\delta_{n,1}\delta_{m,0} + (2+2\beta^2)\delta_{n,1}\delta_{m,1} \\ & + 2\beta\delta_{n,1}\delta_{m,2} + \beta^2\delta_{n,2}\delta_{m,0} \\ & + 2\beta\delta_{n,2}\delta_{m,1} + \delta_{n,2}\delta_{m,2}\end{aligned} \qquad (۳۵ - ۲)$$

بدین سان، می‌توانیم برای معادلهٔ (۳۴) جوابی به شکل زیر درنظر بگیریم،

$$\begin{aligned}\rho'_N(n,m) = {} & \frac{N!\beta^{n+m}}{n!m!(N-n-m)!} \\ & + \frac{N!\beta^{(n-1)+(m-1)}}{(n-1)!(m-1)!(N-n-m+1)!} \\ & + \frac{N!\beta^{(n-2)+(m-2)}}{2!(n-2)!(m-2)!(N-n-m+2)!} + \cdots \\ = {} & \sum_{r=0}^{[(n+m)/2]} \frac{N!\beta^{n+m-2r}}{r!(n-r)!(m-r)!(N-n-m+r)!},\end{aligned} \qquad (۳۶)$$

که در آن $[(n+m)/2]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $(n+m)/2$ است. سرانجام، با ترکیب معادلات (۳۲) و (۳۶) عناصر ماتریسی عملگر چگالی تابش درون کاواک را، پس از عبور N اتم، تا تقریب مرتبهٔ اول، چنین به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned}\rho_N^{field}(n,m) = {} & (-ie^{i\phi})^{n-m}(g\tau\alpha\beta)^{n+m}\sqrt{n!m!} \\ & \sum_r \frac{N!\beta^{-2r}}{r!(n-r)!(m-r)!(N-n-m+r)!} \cdot\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

تابع توزیع احتمال فوتونی نیز عبارت است از:

$$P_N^{field}(n)=\rho_N^{field}(n,n)$$
$$=(g\tau\alpha\beta)^{2n}\, n!\sum_r \frac{N!\,\beta^{-2r}}{r!\,[(n-r)!]^2\,(N-2n+r)!} \qquad (۳۸)$$

اکنون فرض می‌کنیم $N \gg 1$ باشد. با توجه به اینکه،

$$\frac{N!}{(N-2n+r)!}=N(N-1)(N-2)\cdots(N-2n+r+1)$$
$$\approx N^{2n-r}$$

عبارت (۳۸) به شکل زیر درمی‌آید:

$$P_N(n)\approx(g\tau\alpha\beta)^{2n}\, n!\sum_r \frac{N^{2n-r}\beta^{-2r}}{r!\,[(n-r)!]^2}\cdot \qquad (۳۹)$$

از عبارت (۳۹) آشکار است که با افزایش شاخص r، جملات رشته به تندی کوچک می‌شوند. بنابراین، سهم جملهٔ مربوط به $r=0$ غالب بوده و چنین خواهیم داشت:

$$P_N(n)\approx\frac{(Ng\tau\alpha\beta)^{2n}}{n!}\cdot \qquad (۴۰)$$

خاطرنشان می‌کنیم که، رابطهٔ اخیر تنها در موردی معتبر است که شرایط زیر برقرار باشند:

$$N \gg 1, \qquad (۴۱-۱)$$

$$g\tau \ll 1, \qquad (۴۱-۲)$$

$$g\tau\sqrt{\langle n\rangle} \ll 1 \cdot \qquad (۴۱-۳)$$

اکنون اگر تابع توزیع (۴۰) را با تابع توزیع حالت همدوس میدان تابشی، یعنی:

$$P_{Coh}^{field}(n)=\frac{e^{-\langle n\rangle}\langle n\rangle^n}{n!}, \qquad (۴۲)$$

مقایسه کنیم، می‌توانیم ادعا کنیم که (۴۰) بیان‌کنندهٔ حالت همدوس میدان با شمار میانگین فوتونی

$$\langle n\rangle = (Ng\tau\alpha\beta)^2 \qquad (۴۳)$$

است، زیرا اگر در رابطهٔ (۴۲) این مقدار را برای $\langle n\rangle$ قرار دهیم، خواهیم داشت،

$$P_{Coh}^{field}(n)=\frac{e^{-(Ng\tau\alpha\beta)^2}(Ng\tau\alpha\beta)^{2n}}{n!}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(Ng\tau\alpha\beta)^{2(l+n)}}{l!\,n!}\cdot \qquad (۴۴)$$

چون $g\tau \ll 1$ است، برحسب پایین‌ترین مرتبهٔ غیرصفر این پارامتر، جملهٔ غالب در عبارت (۴۴)، به ازای $l=0$ به دست می‌آید، و در نتیجه چنین داریم،

$$P_{Coh}^{field}(n)\approx\frac{(Ng\tau\alpha\beta)^{2n}}{n!}, \qquad (۴۵)$$

که همان رابطهٔ (۴۰) است. اکنون، براساس (۴۱) و (۴۳) می‌توان شرط اعتبار نتیجه‌گیری بالا را چنین نوشت،

$$N \gg 1, \qquad (۴۶-۱)$$

$$g\tau \ll 1, \qquad (۴۶-۲)$$

$$(g\tau)^2 N\alpha\beta \ll 1 \cdot \qquad (۴۶-۳)$$

بدین ترتیب، بررسی مسئلهٔ برهم‌کنش باریکه‌ای متشکل از اتمهای دو ترازی که در حالت برهم‌نهی همدوس از دو تراز پایه و برانگیختهٔ اتمی قرار دارند، با میدان خلأ الکترومغناطیسی درون کاواک، نشان می‌دهد که به شرط ضعیف بودن برهم‌کنش، و پس از عبور شمار زیادی اتم از درون کاواک میدان درون کاواک به سمت حالت همدوس تحول می‌یابد. نتیجهٔ به دست آمده در اینجا با نتیجهٔ حاصل از بررسی دستگاه برهم‌کنشی مذکور با استفاده از حل معادلات حرکت عملگر چگالی میدان تابشی، تحت شرایط ایستا و ضعیف بودن برهم‌کنش، سازگار است [۶].

رابطهٔ (۴۳)، به روشنی امکان وقوع عمل لیزری بدون وارونی جمعیت را، همانند حالت به دام افتادهٔ میدان تابشی، نشان می‌دهد. علاوه بر این، نتیجهٔ جالب توجه دیگری را نیز می‌توان در این حالت به دست آورد. با توجه به روابط (۳۷) و (۴۱)، عناصر ماتریسی عملگر چگالی میدان تابشی چنین هستند،

$$\rho_N^{field}(n,m)\approx(-ie^{i\phi})^{n-m}$$
$$(Ng\tau\alpha\beta)^{n+m}\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\cdot \qquad (۴۷)$$

این رابطه، بیان‌کنندهٔ عناصر ماتریسی عملگر چگالی حالت همدوس میدان با دامنهٔ

$$\zeta = |\zeta| e^{i\theta} = (-ie^{i\phi} g\tau N\alpha\beta) \qquad (۴۸)$$

است که در آن، $|\zeta| = \sqrt{<n>}$ و θ فاز میدان همدوس است. بنابراین، از (۴۸) بلافاصله نتیجه می‌گیریم که،

$$\theta = \phi - \frac{\pi}{۲} \cdot \qquad (۴۹)$$

به عبارت دیگر، فاز میدان درون کاواک بر روی مقدار مشخصی، که توسط فاز حالت اتمی تعیین می‌شود، قفل می‌شود و دستگاه برهم‌کنشی اتم - میدان به صورت یک دستگاه حساس به فاز عمل می‌کند. خاطرنشان می‌کنیم که دو نتیجهٔ اخیر (قفل‌شدگی فازی و عمل لیزری بدون وارونی جمعیت) را باید به عنوان پیامدهای مستقیم وجود همدوسی اولیهٔ اتمی دانست. به علاوه، حتی اگر اتلاف هم درونِ کاواک وجود می‌داشت، باز هم عمل لیزری بدون وارونیِ جمعیت امکان‌پذیر بود، زیرا همدوسی اتمی خود به عنوان یک نیروی وادارنده عمل کرده و قادر است، حتی در غیاب وارونی جمعیت، عمل لیزری را به راه اندازد [۱۱].

۴. دمش باریکهٔ اتمی در حالت پایه

اکنون، فرض می‌کنیم که باریکهٔ اتمی در حالت پایه به درون کاواک دمیده شود، یعنی در رابطهٔ (۱۰) داشته باشیم $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$. از این رو، عناصر ماتریسی عملگر چگالی میدان تابشی بنا بر رابطهٔ (۲۸) چنین خواهند بود:

$$\rho_N^{field}(n,m) = C_n C_m \rho_{N-۱}^{field}(n,m) + S_{n+۱} S_{m+۱} \rho_{N-۱}^{field}(n+۱, m+۱) \cdot \qquad (۵۰)$$

بنابراین، تابع توزیع میدان عبارت است از:

$$P_N^{field}(n) = \rho_N^{field}(n,n) = C_n^۲ P_{N-۱}^{field}(n) + S_{n+۱}^۲ P_{N-۱}^{field}(n+۱) = a_n P_{N-۱}^{field}(n) + (۱-a_{n+۱}) P_{N-۱}^{field}(n+۱), \qquad (۵۱)$$

که در آن، $a_n = C_n^۲$ است. از رابطهٔ (۵۱) برای $N = ۱$ چنین داریم،

$$P_{N=۱}^{field}(n) = a_n P_۰^{field}(n) + (۱-a_{n+۱}) P_۰^{field}(n+۱), \qquad (۵۲)$$

و برای $N = ۲$ داریم،

$$P_{N=۲}^{field}(n) = a_n^۲ P_۰^{field}(n) + (۱-a_{n+۱})(a_n + a_{n+۱}) P_۰^{field}(n+۱) + (۱-a_{n+۱})(۱-a_{n+۲}) P_۰^{field}(n+۲) \cdot \qquad (۵۳)$$

برای $N = ۳, ۴, \ldots$ نیز می‌توان به همین ترتیب عبارتهای مربوط به تابع توزیع میدان را به دست آورد. بر این اساس، عبارت کلی زیر را برای تابع توزیع میدان در نظر می‌گیریم:

$$P_N^{field}(n) = \sum_{l=n}^{N+n} P_۰^{field}(l) \prod_{k=n+۱}^{l} (۱-a_k) \sum_{q_j=۰}^{N-l+n} \prod_{j=n}^{l} a_j^{q_j}, \qquad (۵۴)$$

که در آن، $\sum_{q_j} = N - l + n$ است. به منظور تحقیق درستی رابطهٔ (۵۴) از روش استقراء استفاده می‌کنیم. برای $N = ۰$ داریم:

$$P_{N=۰}^{field}(n) = P_۰^{field}(n) \prod_{k=n+۱}^{n} (۱-a_k) \sum_{q_j=۰}^{n} \prod_{j=n}^{n} a_j^{q_j} = P_۰^{field}(n) \cdot \qquad (۵۵)$$

و برای $N = ۱$ داریم:

$$P_{N=۱}^{field}(n) = \sum_{l=n}^{n+۱} P_۰^{field}(l) \prod_{k=n+۱}^{l} (۱-a_k) \sum_{q_j=۰}^{l-۱+n} \prod_{j=n}^{۱} a_j^{q_j} = P_۰^{field}(n) a_n + P_۰^{field}(n+۱)(۱-a_{n+۱}) \qquad (۵۶)$$

که همان رابطهٔ (۵۲) است، اکنون فرض می‌کنیم رابطهٔ (۵۴) برای $N = M$ صحیح باشد. برای $N = M + ۱$ چنین داریم،

$$P_{M+1}^{field}(n) = a_n P_M^{field}(n) + (1-a_{n+1})\, P_M^{field}(n+1)$$

$$= a_n \sum_{l=n}^{n+m} P_0^{field}(l) \prod_{k=n+1}^{l} (1-a_k) \sum_{q_j=0}^{M-l+n} \prod_{j=n}^{l} a_j^{q_j}$$

$$+ (1-a_{n+1}) \sum_{l=n+1}^{n+M+1} P_0^{field}(l) \prod_{k=n+2}^{l} (1-a_k) \sum_{q_j=0}^{M-l+n+1} \prod_{j=n+1}^{l} a_j^{q_j}$$

$$= a_n^{M+1} P_0(n) + \sum_{l=n+1}^{n+M} P_0(l) \prod_{k=n+1}^{l} (1-a_k) \sum_{q_j=0}^{M-l+n} \prod_{j=n}^{l} a_j^{q_j}\, a_n$$

$$+ \sum_{l=n+1}^{n+M} P_0(l) \prod_{k=n+1}^{l} (1-a_k) \sum_{q_j=0}^{M-l+n+1} \prod_{j=n+1}^{l} a_j^{q_j}$$

$$+ P_0(n+M+1) \prod_{k=n+1}^{n+M+1} (1-a_k)$$

$$= a_n^{M+1} P_0(n) + \sum_{l=n+1}^{n+M} P_0(l) \prod_{k=n+1}^{1} (1-a_k) \sum_{q_j=0}^{M-l+n+1} \prod_{j=n}^{l} a_j^{q_j}$$

$$+ P_0(n+M+1) \sum_{k=n+1}^{n+M+1} (1-a_k)$$

$$= \sum_{l=n}^{n+M+1} + P_0(l) \prod_{k=n+1}^{l} (1-a_k) \sum_{q_j=0}^{M+1-l+n} \prod_{j=n}^{l} a_j^{q_j}$$

که همان عبارت (۵۴) به ازای $N = M + 1$ است. اکنون، اگر علاوه بـر $g\tau \ll 1$ و $g\tau\sqrt{<n>} \ll 1$، یـعنی شـرط ضـعیف بـودن برهم‌کنش، فرض کنیم که شمار اتمهای عبوری از درون کاواک نیز کوچک باشد، یعنی $g\tau\sqrt{N<n>} \ll 1$، آنگاه ضریب سازهٔ $P_0(l)$ در رابطهٔ (۵۴) از مرتبهٔ بـزرگی $(g\tau)^{2(l-n)}$ است. از ایـن رو، در نـخستین گـام، از جـملات $(g\tau)^2$ بـه بـالا چشـم مـی‌پوشیم. بـه عبارت دیگر، از $l \le n+1$ استفاده می‌کنیم و به دو جملهٔ اولِ رشتهٔ (۵۴) بسنده می‌کنیم. بدین ترتیب، خواهیم داشت:

$$P_N^{field}(n) \approx P_0(n) \prod_{k=n+1}^{n} (1-a_k) \sum_{q_j=0}^{N} \prod_{j=n}^{n} a_j^{q_j}$$

$$+ P_0(n+1) \prod_{k=n+1}^{n+1} (1-a_k) \sum_{q_j=0}^{N-1} \prod_{j=n}^{n+1} a_j^{q_j}$$

$$= P_0(n) a_n^N + P_0(n+1)(1-a_{n+1}) \sum_{q=0}^{N-1} a_n^q\, a_{n+1}^{N-1-q} \cdot \tag{۵۷}$$

از طرفی، چون داریم،

$$a_n^N = \cos^{2N}(g\tau\sqrt{n}) \approx \left[1 - \frac{g^2\tau^2 n}{2!}\right]^{2N} \approx 1 - g^2\tau^2 N n, \tag{۵۸}$$

و

$$(1-a_{n+1}) \sum_{q=0}^{N-1} a_n^q\, a_{n+1}^{N-1-q} \approx N g^2\tau^2 (n+1) \tag{۵۹}$$

لذا، تابع توزیع میدان تابشی، پس از عبور N اتم از درون کاواک و تحت تقریب به کار برده شده، چنین خواهد بود،

$$P_N^{field} \approx (1 - g^2\tau^2 n N) P_0(n) + g^2\tau^2 N (n+1) P_0(n+1) \cdot \tag{۶۰}$$

با استفاده از تابع توزیع بـالا، مـی‌توانـیم کـمیتهایی مـانند، شـمار میانگین فوتونهای درون کاواک، $<\hat{n}>$، میانگین مـجذور شـمار فوتونها، $<\hat{n}^2>$، و واریانس بهنجار شده به واحد شمار فوتونها، $\sigma_N^2 = \frac{<\hat{n}^2>_N - <\hat{n}>_N^2}{<\hat{n}>_N}$، را محاسبه کنیم. داریم:

$$<\hat{n}>_N = \sum_{n=0}^{\infty} n P_N^{field}(n)$$

$$= <\hat{n}>_0 (1 - N g^2\tau^2) \tag{۱-۶۱}$$

$$<\hat{n}^2>_N = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_N^{field}(n)$$
$$= <\hat{n}^2>_0 - Ng^2\tau^2 \left(2<\hat{n}^2>_0 - <\hat{n}>_0\right) \qquad (۲-۶۱)$$

$$\sigma_N^2 = \frac{<\hat{n}^2>_N - <\hat{n}>_N^2}{<\hat{n}>_N}$$
$$= \frac{<\hat{n}^2>_0 - Ng^2\tau^2\left(2<\hat{n}^2>_0 - <\hat{n}>_0\right) - <\hat{n}>_0^2\left(1-Ng^2\tau^2\right)^2}{<\hat{n}>_0\left(1-Ng^2\tau^2\right)}$$
$$\approx \sigma_0^2 + Ng^2\tau^2\left(1-\sigma_0^2\right) \qquad (۳-۶۱)$$

$<\hat{n}>_0$، شمار میانگین فوتونی اولیه، و σ_0^2 واریانس اولیه است. از رابطهٔ (۳.۶۱) آشکار است که اگر میدان تابشی درون کاواک در ابتدا از آمار زیر پواسونی پیروی کند، یعنی $\sigma_0^2 < 1$ باشد، آنگاه $\sigma_N^2 > \sigma_0^2$، و اگر میدان، در ابتدا از آمار فراپواسونی پیروی کند، یعنی $\sigma_0^2 > 1$؛ باشد، آنگاه $\sigma_N^2 < \sigma_0^2$ خواهد بود. بدین ترتیب، تا آنجاکه به واریانس شمار فوتونی مربوط است، نقش جملهٔ $g^2\tau^2$ آن است که افت و خیزهای شمار فوتونی را به سمت افت و خیزهای مربوط به حالت همدوس میدان تغییر دهد. در وضعیتی دیگر، اگر $\sigma_0^2 = 1$ باشد آنگاه (۳.۶۱) نشان می‌دهد که $\sigma_N^2 \approx \sigma_0^2 = 1$. به عبارت دیگر، اگر حالت اولیهٔ میدان تابشی حالت همدوس باشد، تا تقریب $g^2\tau^2$، واریانس شمار فوتونی تغییر نخواهد کرد. به منظور برآورد تقریبی از تغییر واریانس در این حالت، در عبارت (۳.۶۱) جملهٔ $g^4\tau^4$ را نیز درنظر می‌گیریم. داریم:

$$\sigma_N^2 \approx \sigma_0^2 + Ng^2\tau^2\left(1-\sigma_0^2\right) + N^2 g^4\tau^4\left(1 - <\hat{n}>_0 - \sigma_0^2\right) \cdot \qquad (۶۲)$$

از این رو، برای $\sigma_0^2 = 1$، واریانس شمار فوتونهای درون کاواک پس از عبور N اتم از درون کاواک برابر است با:

$$\sigma_N^2 \approx 1 - N^2 <\hat{n}>_0 g^4\tau^4 \cdot \qquad (۶۳)$$

این رابطه نشان می‌دهد که میدان درون کاواک از آمار زیرپواسونی پیروی می‌کند. بنابراین تا آنجاکه به واریانس شمار فوتونی مربوط است، نقش جملهٔ $g^4\tau^4$ کاهش افت و خیزهای میدان همدوس اولیه است. به عبارت دیگر، میدان تابشی همدوس اولیه (حالت کلاسیک) به حالتی که از آمار زیرپواسونی پیروی می‌کند (حالت غیرکلاسیک) تحول می‌یابد.

کمیت مشخصهٔ دیگری از میدان تابشی، که در اینجا مورد توجه قرار می‌دهیم، درجهٔ همدوسی مرتبهٔ دوم فوتونی است. این کمیت، که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]،

$$G^{(2)}(t) = \frac{<\hat{a}^+(0)\hat{a}^+(t)\hat{a}(t)\hat{a}(0)>}{<\hat{n}>^2} \qquad (۶۴)$$

معیاری از درجهٔ همبستگی شدت فوتونها در دو لحظهٔ متفاوت است. بنابراین، پس از عبور N اتم از درون کاواک، درجهٔ همدوسی مرتبهٔ دوم فوتونی برابر است با

$$G_N^{(2)} = \frac{<\hat{a}_0^+ \hat{a}_N^+ \hat{a}_N \hat{a}_0>}{<\hat{n}>_N^2} = \frac{<\hat{a}_0^+ \hat{n}_N \hat{a}_0>}{<\hat{n}>_N^2} \cdot \qquad (۶۵)$$

با به کارگیری قضیهٔ (کوانتوم مکانیکی) رگرسیون [۱۲]، همراه با رابطهٔ (۶۱-۱)، عبارت بالا قابل محاسبه است. نتیجه، تا تقریب $(g\tau)^2$، چنین خواهد بود:

$$G_N^{(2)} \approx \frac{[<\hat{n}^2>_0 - <\hat{n}>_0]}{<\hat{n}>_0^2[1-Ng^2\tau^2]} \approx G_{N=0}^{(2)}\left(1+Ng^2\tau^2\right) \cdot \qquad (۶۶)$$

بدین سان، $G_N^{(2)} > G_{N=0}^{(2)}$ و این، بیانی از شرط پادگروهه شدن فوتونها است. پادگروهه شدن فوتونها، یک اثر غیرکلاسیکی است که نامساوی شوارتز را برای میدانی که دارای حالت کلاسیکی است نقض می‌کند [۱۳]. به عبارت دیگر پدیدهٔ پادگروهه شدن فوتونی نمودی از حالت غیرکلاسیکی تابش الکترومغناطیسی است.

اکنون، توجه خود را به واریانس مؤلفه‌های کوادراتوری میدان تابشی معطوف می‌سازیم. برای میدان الکتریکی وابسته به تابش تک مدی کوانتیدهٔ درون کاواک با بسامد ω، عبارت زیر را در دست داریم [۱۲]،

$$\hat{E}(t) = i\left[\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\right]^{1/2}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^+ e^{i\omega t}\right), \qquad (۶۷)$$

که در آن V حجم کاواک است. با معرفی عملگرهای هرمیتی زیر

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}e^{-i\psi} + \hat{a}^+ e^{i\psi}\right), \qquad (۶۸-۱)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{i}{2}\left(\hat{a}^+ e^{i\psi} - \hat{a}e^{-i\psi}\right) \qquad (۶۸-۲)$$

که از رابطهٔ جابجاگری $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}$ پیروی می‌کنند، رابطهٔ (۶۷) به شکل زیر در می‌آید،

$$\hat{E}(t) = 2\left[\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\right]^{1/2}[\hat{X}_1 \sin(\omega t - \Psi) - \hat{X}_2 \cos(\omega t - \Psi)] \quad (۶۹)$$

روشن است که $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ را می‌توان به عنوان دامنه‌های دو مؤلفهٔ کوادراتری میدان درنظر گرفت. بنا بر اصل عدم یقین هایزنبرگ داریم،

$$\Delta\hat{X}_1\, \Delta\hat{X}_2 \geq \frac{1}{4} \quad (۷۰)$$

حال، بنا به تعریف اگر داشته باشیم:

$$(\Delta\hat{X}_i)^2 < \frac{1}{4}, \qquad i = 1, 2, \quad (۷۱)$$

حالت میدان تابشی، یک حالت چلانده است [۱۳]. اگر علاوه بر شرط (۷۱)، شرط زیر را نیز داشته باشیم:

$$\Delta\hat{X}_1\, \Delta\hat{X}_2 = \frac{1}{4} \quad (۷۲)$$

آنگاه حالت چلانده، یک حالت چلاندهٔ آرمانی خوانده می‌شود. بنابراین، برای حالت چلانده، افت و خیزهای کوانتومی یکی از کوادراتورهای میدان کمتر از مقدار مربوط به حالت کمینهٔ عدم قطعیت است و این، به بهای افزایش افت و خیز در مؤلفهٔ کوادراتری دیگر میدان خواهد بود، به طوری که اصل عدم یقین همچنان پابرجا می‌ماند. خاطرنشان می‌سازیم که حالت چلاندهٔ میدان تابشی یک حالت غیرکلاسیکی است و نمی‌توان برای آن یک همتای کلاسیکی یافت [۱۳].

به سادگی می‌توان نشان داد که برای حالت عددی میدان تابشی، $|n>$، که یک حالت غیرکلاسیکی است [۱۳]، داریم،

$$(\Delta\hat{X}_i)^2 = \frac{1}{4}(2n+1), \qquad i = 1, 2. \quad (۷۳)$$

از این رو، برای حالت خلأ الکترومغناطیسی، $|0>$، افت و خیزهای دو مؤلفهٔ کوادراتری میدان عبارت است از:

$$(\Delta\hat{X}_1)^2_{\text{خلأ}} = (\Delta\hat{X}_2)^2_{\text{خلأ}} = \frac{1}{4}. \quad (۷۴)$$

مقایسهٔ روابط (۷۱) و (۷۴) نشان می‌دهد که،

$$(\Delta\hat{X}_i)^2_{\text{چلانده}} < (\Delta\hat{X}_i)^2_{\text{خلأ}}, \qquad i = 1 \text{ یا } 2 \quad (۷۵)$$

بدین ترتیب، کاهش نوفهٔ کوانتومی حالت چلانده، نسبت به حالت خلأ الکترومغناطیسی، نشان داده می‌شود.

اکنون، قصد داریم براساس ملاحظات بالا چلاندگی تابش درون کاواک حاصل از برهم‌کنش اتمهای دو ترازی را، که در حالت پایه به درون کاواک دمیده می‌شوند، با تابش اولیه مورد بررسی قرار دهیم. بنا بر روابط (۶۹)، داریم:

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{X}_1)^2_N &= <\hat{X}_1^2>_N - <\hat{X}_1>^2_N \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(e^{-2i\psi}<\hat{a}^2>_N + e^{2i\psi}<\hat{a}^{+2}>_N\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(<\hat{a}^+\hat{a}>_N - <\hat{a}>_N<\hat{a}^+>_N\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(<\hat{a}>^2_N e^{-2i\psi} + <\hat{a}^+>^2_N e^{2i\psi}\right),\end{aligned} \quad (۱-۷۶)$$

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{X}_2)^2_N &= <\hat{X}_2^2>_N - <\hat{X}_2>^2_N \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(e^{-2i\psi}<\hat{a}^2>_N + e^{2i\psi}<\hat{a}^{+2}>_N\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(<\hat{a}^+\hat{a}>_N - <\hat{a}>_N<\hat{a}^+>_N\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(<\hat{a}>^2_N e^{-2i\psi} + <\hat{a}^+>^2_N e^{2i\psi}\right).\end{aligned} \quad (۲-۷۶)$$

با توجه به ویژگی عملگرهای آفرینش و نابودی فوتونی، یعنی،

$$\begin{aligned}\hat{a}\,|n> &= \sqrt{n}\,|n-1>, \\ \hat{a}^+\,|n> &= \sqrt{n+1}\,|n+1>,\end{aligned} \quad (۷۷)$$

چنین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}<\hat{a}^2>_N &= \sum_n <n|\rho_N^{field}\,\hat{a}^2\,|n> \\ &= \sum_n \sqrt{n(n-1)}\,\rho_N^{field}(n, n-2),\end{aligned} \quad (۱-۷۸)$$

$$\begin{aligned}<\hat{a}^{+2}>_N &= \sum_n <n|\rho_N^{field}\,\hat{a}^{+2}\,|n> \\ &= \sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\rho_N^{field}(n, n+2),\end{aligned} \quad (۲-۷۸)$$

$$\langle\hat{a}^{+}a\rangle_N=\sum_n \langle n|\rho_N^{field}\,\hat{a}^{+}\hat{a}\,|n\rangle$$
$$=\sum_n n\,\rho_N^{field}(n,n)=\langle n\rangle_N\ ,$$
(۳-۷۸)

$$\langle\hat{a}\rangle_N=\sum_n \langle n|\rho_N^{field}\,\hat{a}\,|n\rangle$$
$$=\sum_n \sqrt{n}\ \rho_N^{field}\ (n,n-1)\ ,$$
(۴-۷۸)

$$\langle\hat{a}^{+}\rangle_N=\sum_n \langle n|\rho_N^{field}\,\hat{a}^{+}\,|n\rangle$$
$$=\sum_n \sqrt{(n+1)}\,\rho_N^{field}\ (n,n+1)\ .$$
(۵-۷۸)

از این روابط آشکار است که برای محاسبهٔ واریانس مؤلفه‌های کوادراتوری میدان، باید عناصر ماتریسی عملگر چگالی $\rho_N^{field}(n,n\pm1)$ و $\rho_N^{field}(n,n\pm2)$ را در دست داشته باشیم. از این رو، به رابطهٔ (۵۰) بازمی‌گردیم. با روشی مشابه آنچه که پیش از این برای به دست آوردن رابطهٔ (۵۴) به کار بردیم، برای عناصر ماتریسی عملگر چگالی میدان تابشی، پس از عبور N اتم از درون کاواک، چنین داریم،

$$\rho_N^{field}(n,m)=\sum_{l=n}^{N+n}\rho_0^{field}(l,l+m-n)\prod_{k=n+1}^{l}\left(\sqrt{1-a_k}\sqrt{1-a_{k+m-n}}\right)\sum_{q_j=0}^{N-l+n}\prod_{j=n}^{l}\left(\sqrt{a_j\,a_{j+m-n}}\right)^{q_j}$$
(۷۹)

رابطهٔ (۵۴) حالت خاصی از رابطهٔ (۷۹)، به ازای $n=m$ است. اکنون شرط ضعیف بودن برهم‌کنش و کوچک بودن شمار اتمهای عبوری از درون کاواک را به کار می‌بندیم. با چشم‌پوشی از جملات بالاتر از $g^2\tau^2$، عناصر ماتریسی مربوط عبارتند از:

$$\rho_N^{field}(n,n+1)\approx\rho_{N=0}^{field}(n,n+1)\left[1-\frac{1}{2}N(2n+1)g^2\tau^2\right]$$
$$+\rho_{N=0}^{field}(n+1,n+2)Ng^2\tau^2\sqrt{(n+1)(n+2)}\ ,$$
(۱-۸۰)

$$\rho_N^{field}(n,n-1)\approx\rho_{N=0}^{field}(n,n-1)\left[1-\frac{1}{2}N(2n-1)g^2\tau^2\right]$$
$$+\rho_{N=0}^{field}(n+1,n)Ng^2\tau^2\sqrt{n(n+1)}\ ,$$
(۲-۸۰)

$$\rho_N^{field}(n,n+2)\approx\rho_{N=0}^{field}(n,n+2)\left[1-\frac{1}{2}N(2n+2)g^2\tau^2\right]$$
$$+\rho_{N=0}^{field}(n+1,n+3)Ng^2\tau^2\sqrt{(n+3)(n+1)}\ ,$$
(۳-۸۰)

$$\rho_N^{field}(n,n-2)\approx\rho_{N=0}^{field}(n,n-2)\left[1-\frac{1}{2}N(2n-2)g^2\tau^2\right]$$
$$+\rho_{N=0}^{field}(n+1,n-1)Ng^2\tau^2\sqrt{(n-1)(n+1)}\ .$$
(۴-۸۰)

بدین ترتیب، روابط (۷۹) به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\langle\hat{a}^{2}\rangle_N\approx\langle\hat{a}^{2}\rangle_{N=0}(1-Ng^2\tau^2),\qquad (۱-۸۱)$$

$$\langle\hat{a}^{+2}\rangle_N\approx\langle\hat{a}^{+2}\rangle_{N=0}(1-Ng^2\tau^2),\qquad (۲-۸۱)$$

$$\langle\hat{a}^{+}a\rangle_N=\langle\hat{n}\rangle_N\approx\langle\hat{n}\rangle_{N=0}(1-Ng^2\tau^2)\ ,$$
(۳-۸۱)

$$\langle\hat{a}\rangle_N\approx\langle\hat{a}\rangle_{N=0}\left[1-\frac{1}{2}Ng^2\tau^2\right],\qquad (۴-۸۱)$$

$$\langle\hat{a}^{+}\rangle_N\approx\langle\hat{a}^{+}\rangle_{N=0}\left[1-\frac{1}{2}Ng^2\tau^2\right]\ .\qquad (۵-۸۱)$$

با قرار دادن روابط اخیر در معادلات (۷۶)، واریانس مؤلفه‌های کوادراتوری میدان تابشی چنین به دست می‌آید

$$(\Delta\hat{X}_1)_N^2\approx\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1-Ng^2\tau^2)(\langle\hat{a}^2\rangle_{N=0}e^{-2i\psi}$$
$$+\langle\hat{a}^{+2}\rangle_{N=0}e^{2i\psi})+\frac{1}{2}\langle\hat{a}\rangle_{N=0}(1-Ng^2\tau^2)$$
$$-\frac{1}{4}(1-Ng^2\tau^2)(\langle\hat{a}\rangle_{N=0}^2e^{-2i\psi}+\langle\hat{a}^{+}\rangle_{N=0}^2e^{2i\psi})$$

$$-\frac{1}{2}\langle\hat{a}\rangle_{N=0}\langle\hat{a}^{+}\rangle_{N=0}(1-Ng^{2}\tau^{2}),$$

(۱-۸۲)

$$(\Delta\hat{X}_{2})^{2}_{N}\approx\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(1-Ng^{2}\tau^{2})(\langle\hat{a}^{2}\rangle_{N=0}e^{-2i\psi}+\langle\hat{a}^{+2}\rangle_{N=0}e^{2i\psi})$$
$$+\frac{1}{2}\langle n\rangle_{N=0}(1-Ng^{2}\tau^{2})$$
$$+\frac{1}{4}(1-Ng^{2}\tau^{2})(\langle\hat{a}\rangle^{2}_{N=0}e^{-2i\psi}+\langle\hat{a}^{+}\rangle^{2}_{N=0}e^{2i\psi})$$
$$-\frac{1}{2}\langle\hat{a}\rangle_{N=0}\langle\hat{a}^{+}\rangle_{N=0}(1-Ng^{2}\tau^{2}).$$

(۲-۸۲)

همانطور که از دو رابطهٔ بالا آشکار است، افت و خیزهای کوانتومی میدان تابشی، پس از عبور N اتم از درون کاواک، به حالت اولیهٔ میدان تابشی درون کاواکی بستگی دارد. فرض می‌کنیم که تابش اولیهٔ درون کاواک در حالت همدوس باشد، با توجه به اینکه،

$$|\xi\rangle=e^{-\frac{|\xi|^{2}}{2}}\sum_{n}\frac{\xi^{n}}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad (۸۳)$$

تابع توصیف‌کنندهٔ حالت همدوس میدان تابشی است، و در آن $\xi=|\xi|e^{i\theta}$ است و نیز با استفاده از

$$a|\xi\rangle=\xi|\xi\rangle;\qquad \langle\xi|a^{+}=\xi^{*}\langle\xi| \qquad (۸۴)$$

روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\langle\hat{a}^{2}\rangle_{N=0}=\langle\xi|\hat{a}^{2}|\xi\rangle=|\xi|e^{2i\theta}$$
$$=\langle\hat{n}\rangle_{N=0}e^{2i\theta} \qquad (۱-۸۵)$$

$$\langle\hat{a}^{+2}\rangle_{N=0}=\langle\xi|\hat{a}^{+2}|\xi\rangle=|\xi|^{2}e^{-2i\theta}$$
$$=\langle\hat{n}\rangle_{N=0}e^{-2i\theta}, \qquad (۲-۸۵)$$

$$\langle\hat{a}\rangle_{N=0}=\xi=\sqrt{\langle\hat{n}\rangle_{N=0}}\,e^{i\theta}, \qquad (۳-۸۵)$$

$$\langle\hat{a}^{+}\rangle_{N=0}=\xi^{*}=\sqrt{\langle\hat{n}\rangle_{N=0}}\,e^{-i\theta}. \qquad (۴-۸۵)$$

بدین ترتیب، روابط (۸۲) به شکل زیر در می‌آیند:

$$(\Delta\hat{X}_{1})^{2}_{N}\approx(\Delta\hat{X}_{1})^{2}_{0}=\frac{1}{4}, \qquad (۱-۸۶)$$

$$(\Delta\hat{X}_{2})^{2}_{N}\approx(\Delta\hat{X}_{2})^{2}_{0}=\frac{1}{4}. \qquad (۲-۸۶)$$

در اینجا، از این نکته بهره برده‌ایم که حالت همدوس میدان تابشی از نظر نوفهٔ کوانتومی، هم‌ارز با حالت خلأ الکترومغناطیسی است، زیرا،

$$(\Delta X_{i})^{2}_{\mathrm{coh}}=\langle\xi|\hat{X}_{1}^{2}|\xi\rangle-\langle\xi|\hat{X}_{1}|\xi\rangle^{2}=\frac{1}{4} \qquad (۸۷)$$

بدین ترتیب، تا تقریب $g^{2}\tau^{2}$، نوفهٔ کوانتومی میدان تابشی درون کاواک نسبت به حالت اولیهٔ میدان (حالت همدوس) تغییر نمی‌کند. اما، اگر حالت اولیهٔ تابش درون کاواک، یک حالت چلانده باشد، یعنی داشته باشیم،

$$(\Delta\hat{X}_{i})^{2}_{N=0}<\frac{1}{4},\qquad i=1 \text{ یا } 2 \qquad (۸۸)$$

نتیجهٔ جالبی پدیدار می‌شود. با توجه به اینکه، می‌توانیم روابط (۸۲) را به شکل زیر بنویسیم:

$$(\Delta\hat{X}_{i})^{2}_{N}\approx(\Delta\hat{X}_{i})^{2}_{N=0}+\left[\frac{1}{4}-(\Delta\hat{X}_{i})^{2}_{N=0}\right]Ng^{2}\tau^{2},$$
$$i=1 \text{ یا } 2, \qquad (۸۹)$$

آنگاه با توجه به شرط اولیهٔ (۸۸) روشن است که $(\Delta X_{i})^{2}_{N}>(\Delta X_{i})^{2}_{N=0}$ خواهد بود و میدان تابشی غیرکلاسیکی اولیه به سمت حالت کلاسیکی تحول می‌یابد. از سوی دیگر، اگر برای میدان تابشی اولیهٔ درون کاواک چنین داشته باشیم:

$$(\Delta\hat{X}_{i})^{2}_{N}>\frac{1}{4},\qquad i=1 \text{ یا } 2, \qquad (۹۰)$$

آنگاه با استفاده از (۸۹) درمی‌یابیم که $(\Delta X_{i})^{2}_{N}<(\Delta X_{i})^{2}_{N=0}$، یعنی نوفهٔ کوانتومی تابش درون کاواک نسبت به حالت اولیه کاهش می‌یابد. بدین سان، می‌توانیم چنین نتیجه‌گیری کنیم که تا آنجا که به

نوفهٔ کوانتومی میدان تابشی مربوط می‌شود، نقش جملهٔ $g^2\tau^2$ در برهم‌کنش اتم با فوتون عبارت از تغییر افت و خیزهای میدان تابشی به سمت افت و خیزهای حالت خلأ الکترومغناطیسی است. پیش از این، نتیجهٔ مشابهی را در مورد واریانس شمار فوتونی به دست آوردیم. اکنون، به منظور بررسی تغییر واریانس مؤلفه‌های کوادراتری میدان تابشی در حالتی که تابش اولیهٔ درون کاواک در حالت همدوس است، محاسبات خود را تا تقریب $g^4\tau^4$ انجام می‌دهیم. بدین منظور، کافی است در عبارت (۷۹)، این بار سه جملهٔ اول رشتهٔ l را درنظر بگیریم. با چشم‌پوشی از جملات بالاتر از $g^4\tau^4$، چنین به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\rho_N^{field}(n,n-1) &\approx \rho_{N=0}^{field}(n,n-1)\Big[1-\frac{1}{2}N(2n-1)g^2\tau^2 \\ &+ \Big[\frac{N}{24}(8n^2-8n+1)+\frac{1}{8}N(N-1)[4n^4-4n+1]g^4\tau^4\Big] \\ &+\rho_{N=0}^{field}(n+1,n)\Big[N\sqrt{(n+2)(n+1)}\,g^2\tau^2 \\ &-\Big[N\Big[n\Big[N-\frac{2}{3}\Big]+\frac{1}{6}\Big]\sqrt{n(n+1)}\,g^4\tau^4\Big] \\ &+\rho_{N=0}^{field}(n+2,n+1)\frac{N(N-1)}{2}(n+1)\sqrt{n(n+2)}\,g^4\tau^4\end{aligned} \qquad (91\text{-}1)$$

$$\begin{aligned}\rho_N^{field}(n,n+1) &\approx \rho_{N=0}^{field}(n,n+1)\Big[1-\frac{1}{2}N(2n+1)g^2\tau^2 \\ &+ \Big[\frac{N}{24}(8n^2+8n+1)+\frac{1}{8}N(N-1)[4n^4+4n+1]g^4\tau^4\Big] \\ &+\rho_{N=0}^{field}(n+1,n+2)\Big[N\sqrt{(n+2)(n+1)}\,g^2\tau^2 \\ &-N\Big[n\Big[N-\frac{2}{3}\Big]+N-\frac{1}{2}\Big]\sqrt{(n+1)(n+2)}\,g^4\tau^4\Big] \\ &+\rho_{N=0}^{field}(n+2,n+3)\frac{N(N-1)}{2}(n+2)\sqrt{(n+1)(n+2)}\,g^4\tau^4\,,\end{aligned} \qquad (91\text{-}2)$$

$$\begin{aligned}\rho_N^{field}(n,n-2) &\approx \rho_{N=0}^{field}(n,n-2)\Big[1-\frac{1}{2}N(2n-2)g^2\tau^2 \\ &+ \Big[\frac{N}{24}(8n^2-16n+4)+\frac{1}{8}N(N-1)[4n^4-8n+4]g^4\tau^4\Big] \\ &+\rho_{N=0}^{field}(n+1,n-1)\Big[N\sqrt{(n-1)(n+1)}\,g^2\tau^2 \\ &-\Big[N\Big[n\Big(N-\frac{2}{3}\Big)-\frac{1}{2}(N-1)\Big]\sqrt{(n+1)(n-1)}\,g^4\tau^4\Big] \\ &+\rho_{N=0}^{field}(n+2,n)\frac{N(N-1)}{2}\sqrt{(n-1)(n+1)(n+2)}\,g^4\tau^4\end{aligned} \qquad (91\text{-}3)$$

$$\begin{aligned}\rho_N^{field}(n,n+2) &\approx \rho_{N=0}^{field}(n,n+2)\Big[1-\frac{1}{2}N(2n+2)g^2\tau^2 \\ &+ \Big[\frac{N}{24}(8n^2+16n+4)+\frac{1}{8}N(N-1)[4n^4+8n+4]g^4\tau^4\Big] \\ &+\rho_{N=0}^{field}(n+1,n+3)\Big[N\sqrt{(n+1)(n+3)}\,g^2\tau^2 \\ &-\Big[n\Big(N-\frac{2}{3}\Big)+\frac{3}{2}N-\frac{5}{9}\Big]\sqrt{(n+1)(n+3)}\,g^4\tau^4\Big]\end{aligned}$$

$$\rho^{field}_{N=0}\,(n+2,n+4)\,\frac{N(N-1)}{2}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\;g^4\tau^4$$

(۴-۹۱)

بدین سان، تا تقریب $g^4\tau^4$، روابط (۷۸) به شکل زیر در می‌آیند:

$$\langle\hat a^2\rangle_N \approx \langle\hat a^2\rangle_{N=0}(1-Ng^2\tau^2) + g^4\tau^4\Big[\frac{N}{6}\langle(2\hat a^+\hat a+1)\hat a^2\rangle_{N=0} + \frac{1}{2}N(N-1)\langle\hat a^2\rangle_{N=0}\Big]$$

(۱-۹۲)

$$\langle\hat a^{+2}\rangle_N \approx \langle\hat a^{+2}\rangle_{N=0}(1-Ng^2\tau^2) + g^4\tau^4\Big[\frac{N}{6}\langle(2\hat a^+\hat a+1)\hat a^{+2}\rangle_{N=0} + \frac{1}{2}N(N-1)\langle\hat a^{+2}\rangle_{N=0}\Big],$$

(۲-۹۲)

$$\langle\hat a^+\hat a\rangle_N \approx \langle\hat n\rangle_{N=0}(1-Ng^2\tau^2) + g^4\tau^4\Big[\frac{1}{3}N\langle\hat n\rangle_{N=0} + \frac{1}{2}N(N-1)\langle\hat n\rangle_{N=0}\Big],$$

(۳-۹۲)

$$\langle\hat a\rangle_N = \langle\hat a\rangle_{N=0}\Big(1-\frac{N}{2}g^2\tau^2\Big) + g^4\tau^4\Big[\frac{N}{24}\langle(4\hat a^+\hat a+1)\hat a\rangle_{N=0} + \frac{1}{8}N(N-1)\langle\hat a\rangle_{N=0}\Big],$$

(۴-۹۲)

$$\langle\hat a^+\rangle_N = \langle\hat a^+\rangle_{N=0}\Big(1-\frac{N}{2}g^2\tau^2\Big) + g^4\tau^4\Big[\frac{N}{24}\langle(4\hat a^+\hat a+1)\hat a^+\rangle_{N=0} + \frac{1}{8}N(N-1)\langle\hat a^+\rangle_{N=0}\Big]\cdot$$

(۵-۹۲)

اکنون، اگر حالت اولیهٔ تابش درون کاواک حالت همدوس باشد، با استفاده از (۸۴) چنین داریم:

$$\langle(2\hat a^+\hat a+1)\hat a^2\rangle_{N=0} = \langle\hat n\rangle_{N=0}(2\langle\hat n\rangle_{N=0}+1)e^{2i\theta},$$

(۱-۹۳)

$$\langle(2\hat a^+\hat a+1)\hat a^{+2}\rangle_{N=0} = \langle\hat n\rangle_{N=0}(2\langle\hat n\rangle_{N=0}+1)e^{-2i\theta},$$

(۲-۹۳)

$$\langle(4\hat a^+\hat a+1)\hat a\rangle_{N=0} = \sqrt{\langle\hat n\rangle_{N=0}}\,(4\langle\hat n\rangle_{N=0}+1)e^{i\theta},$$

(۳-۹۳)

$$\langle(4\hat a^+\hat a+1)\hat a^+\rangle_{N=0} = \sqrt{\langle\hat n\rangle_{N=0}}\,(4\langle\hat n\rangle_{N=0}+1)e^{-i\theta}\cdot$$

(۴-۹۳)

سرانجام، با ترکیب روابط (۹۲) ، (۹۳) و (۷۶)، عبارتهای زیر را برای واریانس دو مؤلفهٔ کوادراتری میدان تابشی درون کاواک، پس از عبور N اتم، و تا تقریب $g^4\tau^4$ به دست می‌آوریم،

$$(\Delta X_1)_N^2 \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{12}g^4\tau^4\langle\hat n\rangle_{N=0}N\cos[2(\theta-\Psi)],$$

(۱-۹۴)

$$(\Delta\hat X_2)_N^2 \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{12}g^4\tau^4\langle\hat n\rangle_{N=0}N\cos[2(\theta-\Psi)]\cdot$$

(۲-۹۴)

از روابط بالا آشکار است که میزان نوفهٔ کوانتومی تابش درون کاواک، وابسته به فاز است. اگر $\theta=\Psi$ یا $\Psi=\theta\pm\pi$ باشد، داریم،

$$(\Delta\hat X_1)_N^2 \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{12}g^4\tau^4\langle\hat n\rangle_{N=0}N < \frac{1}{4}, \quad (۱-۹۵)$$

$$(\Delta\hat X_2)_N^2 \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{12}g^4\tau^4\langle\hat n\rangle_{N=0}N > \frac{1}{4}\cdot \quad (۲-۹۵)$$

به عبارت دیگر، مؤلفهٔ $\hat X_1$ میدان چلانده است و این به بهای افزایش واریانس مؤلفهٔ دیگر $\hat X_2$ است. در عوض، اگر داشته باشیم $\Psi=\theta\pm\frac{\pi}{2}$، آنگاه:

$$(\Delta \hat{X}_1)^2_N \approx \frac{1}{4}+\frac{1}{12}g^4\tau^4 \langle \hat{n}\rangle_{N=0}\, N > \frac{1}{4}, \quad (۹۶-۱)$$

$$(\Delta \hat{X}_2)^2_N \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{12}g^4\tau^4 \langle \hat{n}\rangle_{N=0}\, N < \frac{1}{4}. \quad (۹۶-۲)$$

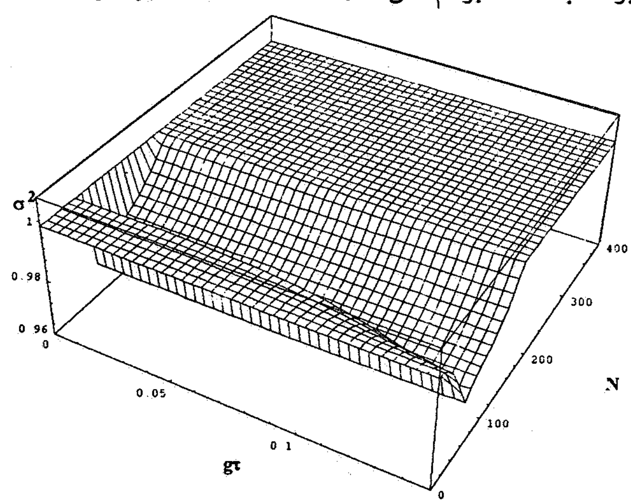
به عبارت دیگر، مؤلفهٔ $\hat{X}_2$ چلانده است. برای $\Psi=\theta\pm\frac{\pi}{4}$، داریم،

$$(\Delta \hat{X}_1)^2_N = (\Delta \hat{X}_2)^2_N \approx \frac{1}{4} \quad (۹۷)$$

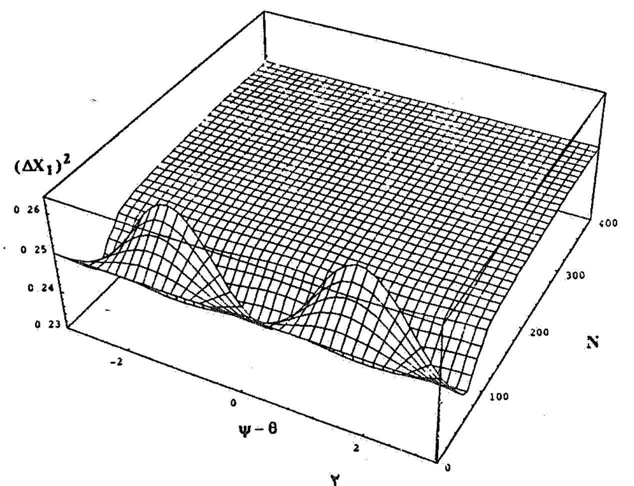
در این حالت، چلاندگی ظاهر نمی‌شود.

در اینجا، به این نکته اشاره می‌کنیم که وابستگی نوفهٔ کوانتومی به فاز یکی از ویژگیهای اساسی آن بوده و درحقیقت روشهای عملی آشکارسازی چلاندگی میدان تابشی مبتنی بر وابستگی فازی مزبور است [۱۴].

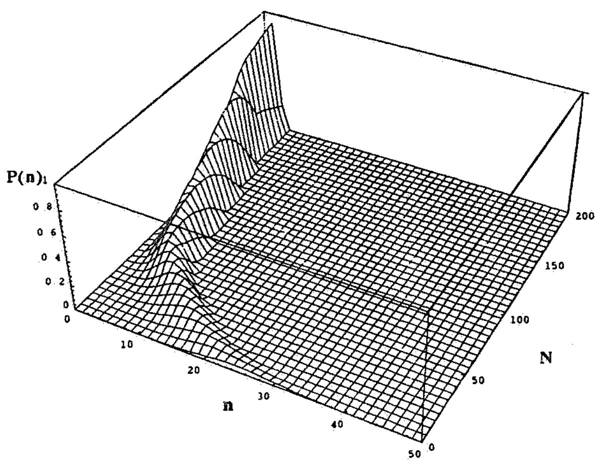
بدین ترتیب، تحت تقریبهای به‌کار گرفته شده (ضعیف بودن برهم‌کنش و اندک بودن شمار اتم‌های عبور کرده از درون کاواک) نشان داده شد که میدان درون کاواک از خود ویژگیهای غیرکلاسیکی نشان می‌دهد. به منظور بررسی دقیق رفتار میدان درون کاواک، در اینجا نتایج حاصل از تحلیل عددی مسئله را که مبتنی بر جوابهای دقیق معادلات (۵۴) و (۷۹) هستند ارائه می‌دهیم: در شکل ۳، نمودار تغییرات واریانس بهنجار شده به واحد شمار فوتونی، σ^2، برحسب شدت برهم‌کنش، $g\tau$، و شمار اتمهای عبور کرده از درون کاواک، N، با فرض اینکه میدان اولیه در حالت همدوس باشد ($\sigma_0^2=1$) رسم شده است. همانطور که دیده می‌شود، به ازای هر مقدار معین مخالف صفری از شدت برهم‌کنش، σ^2 در ابتدا نسبت به مقدار اولیهٔ خود کاهش می‌یابد (پدیدار شدن آمار زیرپواسونی) و پس از آن افزایش می‌یابد. این افزایش تا جایی است که σ^2 مجدداً به مقدار اولیهٔ خود رسیده و از آن پس بدون تغییر باقی می‌ماند (حالت ایستای میدان). علاوه بر این، با افزایش شدت برهم‌کنش کاهش واریانس زودتر اتفاق می‌افتد. در شکل ۴، نمودار تغییرات واریانس مؤلفهٔ کوادراتری $(\Delta\hat{X}_1)^2$ میدان برحسب فاز نسبی $\Psi-\theta$ و شمار اتمهای عبور کرده از درون کاواک، N، با فرض اینکه $g\tau=0/15$ و میدان اولیه در حالت همدوس ($(\Delta\hat{X}_1)^2_0=(\Delta\hat{X}_2)^2_0=0/25$) باشد رسم شده است. در اینجا نیز تغییر نوفهٔ کوانتومی نسبت به مقدار اولیه، در ابتدای برهم‌کنش اتفاق می‌افتد. به ازای برخی مقادیر فاز نسبی، واریانس $(\Delta\hat{X}_1)^2$ در ابتدا افزایش می‌یابد (متناظر با کاهش $(\Delta\hat{X}_2)^2$ و چلانده شدن آن) و سپس کاهش می‌یابد. در حالی که به ازای برخی مقادیر دیگر فاز نسبی، واریانس $(\Delta\hat{X}_1)^2$ در ابتدای برهم‌کنش کاهش می‌یابد (چلاندگی مؤلفهٔ کوادراتری X_1). پس از کاهش $(\Delta\hat{X}_1)^2$ تا مقدار معینی، نوفهٔ کوانتومی برای تمام مقادیر فاز نسبی افزایش یافته تا این که به مقدار اولیهٔ خود رسیده و از آن پس بدون تغییر باقی می‌ماند (حالت ایستای میدان). سرانجام، در شکل ۵ تغییرات تابع توزیع میدان درون کاواک، $P(n)$، برحسب شمار فوتونهای درون کاواک و شمار اتمهای عبور کرده از درون کاواک، N، رسم شده است. میدان اولیه و بزرگی شدت برهم‌کنش همانند مورد قبل است.



شکل ۳. واریانس بهنجار به واحد شمار فوتونی σ^2 بر حسب شدت برهم‌کنش $g\tau$ و شمار اتمهای عبور کرده از درون کاواک N. در اینجا فرض بر این است که حالت اولیهٔ میدان، حالت همدوس با شمار میانگین فوتونی $\langle n\rangle_{N=0}=25$ است.



شکل ۴. واریانس مؤلفهٔ کوادراتری $(\Delta\hat{X}_1)^2$ میدان بر حسب فاز نسبی $\Phi-\theta$ و شمار اتمهای عبور کرده از درون کاواک N. در اینجا فرض بر این است که حالت اولیهٔ میدان، حالت همدوس با شمار میانگین فوتونی $\langle n\rangle_{N=0}=25$ بوده و شدت برهم‌کنش $g\tau=0/15$ است.



شکل ۵. تابع توزیع احتمالی فوتون میدان بر حسب شمار فوتونهای درون کاواک و شمار اتمهای عبورکرده از درون کاواک N. در اینجا فرض بر این است که حالت اولیهٔ میدان، حالت همدوس با شمار میانگین فوتونی ۲۵ = $<n>_{N=0}$ بوده و شدت برهم‌کنش ۰/۱۵= $g\tau$ است.

همانطور که دیده می‌شود، پس از اینکه میدان از خود ویژگیهای غیرکلاسیکی نشان می‌دهد (کاهش پهنای منحنی تابع توزیع و پیروی از آمار زیرپواسونی، که همراه با چلاندگی است)، به سمت حالت خلأ الکترومغناطیسی تحول پیدا می‌کند. بدین سان، روشن می‌شود که حالت ایستای میدان، حالت خلأ الکترومغناطیسی است.

۵. نتیجه‌گیری

براساس یک دیدگاه میکروسکوپیکی، که در آن شمار اتمهای دمیده شده به درون کاواک بعنوان مقیاس زمانی تحول دستگاه برهم‌کنشی اتم – فوتون در نظر گرفته می‌شود. برهم‌کنش باریکه‌ای از اتمهای دو ترازی یکسان با تابش درون کاواک، در غیاب اتلاف و با فرض اینکه طول عمر ترازهای اتمی بسیار بزرگتر از زمان برهم‌کنش بوده و در هر لحظه از زمان تنها یک اتم درون کاواک وجود داشته باشد مورد بررسی قرار گرفت. در موردی که باریکهٔ اتمی دمشی در حالت برهم‌نهی همدوس از دو تراز اتمی بوده و میدان بین دو حالت به دام افتادهٔ متوالی محصور شده باشد، تابش درون کاواک به حالت ایستایی خواهد رسید که به حالت کتانژانت موسوم است. این حالت از خود ویژگیهای غیرکلاسیکی، مانند آمار زیرپواسونی، نشان می‌دهد. علاوه بر این، عمل لیزری بدون وارونی جمعیت نیز امکان‌پذیر است. در موردی دیگر، که حالت اولیهٔ تابش حالت خلاء الکترومغناطیسی است به شرط ضعیف بودن برهم‌کنش و تحت شرایط ایستا (عبور شمار بسیار زیادی اتم از درون کاواک) میدان به سمت حالت همدوس تحول می‌یابد. عمل لیزری بدون وارونی جمعیت و قفل‌شدگی فازی میدان، در این مورد، از جمله ویژگیهای تابش درون کاواک هستند. بررسی برهم‌کنش اتمهای دمیده شده در حالت پایه با تابش درون کاواک نشان می‌دهد که ویژگی‌های غیرکلاسیکی میدان، همانند چلاندگی، آمار زیرپواسونی و پادگروهه‌شدن فوتونی در ابتدای برهم‌کنش (پس از عبور شمار اندکی اتم از درون کاواک) نمایان‌می‌شوند و پس از آن میدان به سمت حالت خلأ الکترومغناطیسی (حالت کلاسیکی) میل می‌کند. علاوه بر این، رهیافت حاضر نقش دو جملهٔ $g^2\tau^2$ و $g^4\tau^4$ را در بروز حالتهای کلاسیکی و غیرکلاسیکی بخوبی مشخص می‌سازد، به طوری که می‌توان جملهٔ $g^2\tau^2$ را مسئول بروز ویژگیهای کلاسیکی و جملهٔ $g^4\tau^4$ را مسئول بروز برخی ویژگیهای غیرکلاسیکی دانست.

سپاسگزاری

از حوزهٔ معاونت پژوهشی دانشگاه اصفهان به خاطر فراهم آوردن تسهیلات لازم جهت انجام این پژوهش قدردانی می‌شود.

مرجعها

1. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc.IEEE* **51**, (1963) 89.
2. P. Mystre and M. S. Zubairy, *Phys. Lett*, **89A** (1982) 390.
3. P. Filipowicz, J. Javanaienen, and P. Meystre, *Phys. Rev*, **A34** (1986) 3077.
4. M. C. Teich and B. E. A. Saleh, *J. Opt. Soc. Am*, **B2** z(1985) 275.
5. P. Fillipowicz, J. Javanaienen, and P. Meystre, *J. Opt. Soc. Am*, **B3** (1986) 906.
6. J. J. Slosser and P. Meystre, *Phys. Rev*, **A41** (1990) 3867.
7. G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett*, **64** (1990) 2783.
8. N. Lu, *Phys. Lett*, **A143** (1990) 457.
9. S. Qamar, K. Zaheer, and M. S. Zubairy, *Opt. Commun* **78** (1990) 341.
10. Z. F. Luo and Z. Z. Xu, *Phys.Rev*, **A47** (1993) 1579.
11. M. Soltanolkotabi, M. H. Naderi, and A. A. Khakpoor, in *Iran. J. Sci. I. R. Iran*, Vol. 8, No 1, Winter 1997.
12. R. Loudon, *Quantum Theory of Light*(Clarendon Press, Oxford, 1982).
13. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence And Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995).
14. L.Mandel, *Phys. Rev. Lett*, **49** (1982) 136.