مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱، شمارهٔ ۳، زمستان ۱۳۷۶



# سالیتون‌های نسبیتی

**نعمت‌ا... ریاضی**

گروه فیزیک دانشگاه شیراز

و

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، فرمانیه، تهران

تاریخ دریافت ۲۲ اردیبهشت ۷۶

**چکیده**

*این مقاله، مروری است بر برخی از مهمترین مفاهیم و پدیده‌هائی که در طول چند دههٔ گذشته در زمینهٔ سالیتون‌های نسبیتی به دست آمده است. برای سهولت در انتقال مفاهیم به خواننده، بیشتر معادلهٔ سینوسی گوردون را ــ به عنوان یک معادلهٔ غیرخطی مشهور که واجد بسیاری از خواص مورد توجه در زمینهٔ سالیتون‌های نسبیتی و توپولوژیک است ــ به کار گرفته‌ایم. همچنین نتایج جدیدی دربارهٔ دینامیک جوابهای معادلات شبه سینوسی گوردون ارائه خواهیم داد. در انتها، دربارهٔ سالیتون‌ها در بیش از یک بعد فضائی بحث خواهد شد.*

## ۱. مقدمه

عده‌ای از فیزیکدانها هنوز امیدوارند که گونه‌ای از یک نظریهٔ میدان غیرخطی، نهایتاً به آرمان دیرین آنها در خصوص اتحاد میدان‌ها و ذرات مختلف، و تبیین ویژگی‌های هر کدام جامهٔ حقیقت بپوشاند (اسکیرم ۱۹۸۸). در این راستا، تلاش‌های مهمی صورت گرفته، که احتمالاً مهمترین آنها، ابداع سالیتون‌های تکدست است (اسکیرم ۱۹۶۱ و ۱۹۶۲).

در مدل اسکیرم، باریون‌ها، سالیتون‌های یک‌میدان غیرخطی مزونی هستند و عدد باریونی که کمیتی کوانتیده است، از یک جریان توپولوژیکی به دست می‌آید. با وجود آنکه مدل اسکیرم تنها قادر است ویژگی‌های باریون‌ها را با دقتی در حدود ۲۰ درصد پیش‌بینی نماید، اما همچنان در طول چهار دههٔ گذشته اهمیت خود را به عنوان یک الگوی تقریبی از کرومودینامیک کوانتومی، در حد تعداد رنگ‌های زیاد، حفظ نموده است.

در میدان‌های غیرخطی نسبیتی، سالیتون‌ها جوابهایی جایگزیده و پایدار از معادلات میدان هستند، که دارای ویژگی‌های ذره‌گون می‌باشند. خوشبختانه برخی از این خواص مورد بحث قرار گرفته است. با این وجود، بنظر می‌رسد که هنوز بسیاری از خواص این جواب‌ها، بعلت دشواری کار با معادلات غیرخطی در پشت پردهٔ ابهام قرار دارد. در این میان، بهره‌گیری از روش‌های عددی و محاسبات کامپیوتری ممکن است راهگشا باشد.

## ۲. معادلهٔ سینوسی گوردون

چگالی لاگرانژی

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\,\partial_{\mu}\phi-\frac{a}{b}[1-\cos(b\phi)] \qquad (1)$$

که در آن $\phi$ یک میدان نرده‌ای حقیقی است، به معادلهٔ دینامیکی زیر در ۱ + ۱ بعد (یک بعد مکان و یک بعد زمان) می‌انجامد ($c=1$ فرض شده است):

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=a\sin(b\phi)\,, \qquad (2)$$

این معادله به معادلهٔ سینوسی گوردون مشهور است. در حد

نوسانات بسیار کم‌دامنه، این معادله به معادلهٔ کلاین ــ گوردون برای یک میدان حقیقی میل می‌کند. به راحتی می‌توان نشان داد که یک پاسخ ایستای غیربدیهی این معادله به صورت زیر است:

$$\phi_{(x)}=\frac{4}{b}\tan^{-1} e^{\sqrt{ab}(x-x_{0})} \,. \qquad (۳)$$

جواب‌های تک سالیتونی (کینک) معادلهٔ سینوسی گوردون را می‌توان به روش مستقیم بدست آورد. این جوابها را با یک خیز لورنتسی می‌توان به سالیتون‌های متحرک تبدیل کرد:

$$\phi_{(x,t)}=\frac{4}{b}\tan^{-1} e^{\gamma\sqrt{ab}(x-x_{0}-vt)}+2n\pi\,, \qquad (۴)$$

که در آن، $v$ سرعت سالیتون، $\gamma=(1-v^{2})^{-1/2}$، $x_0$ مکان اولیهٔ سالیتون و $n$ یک عدد اختیاری صحیح است. جواب‌های تک سالیتونی و چند سالیتونی را با استفاده از تبدیلات بکلوند نیز می‌توان بدست آورد. ابتدا با معرفی متغیرهای جدید

$$\xi=\frac{1}{2}\sqrt{ab}(x-t), \qquad (۵)$$

$$\tau=\frac{1}{2}\sqrt{ab}(x+t), \qquad (۶)$$

$$\sigma=b\phi, \qquad (۷)$$

معادلهٔ سینوسی گوردون را به شکل

$$\sigma_{\xi\tau}=\sin\sigma \qquad (۸)$$

تبدیل می‌کنیم. به راحتی می‌توان نشان داد که معادلهٔ سینوسی گوردون تحت تبدیلات بکلوند

$$\sigma'_{\xi}=\sigma_{\xi}-2\beta\sin\left[\frac{\sigma+\sigma'}{2}\right], \qquad (۹)$$

$$\sigma'_{\tau}=-\sigma_{\tau}+\frac{2}{\beta}\sin\left[\frac{\sigma-\sigma'}{2}\right], \qquad (۱۰)$$

$$\xi'=\xi, \qquad (۱۱)$$

$$\tau'=\tau, \qquad (۱۲)$$

ناوردا است. به عبارت دیگر، معادلهٔ سینوسی گوردون بر $\sigma$ و $\sigma'$ حاکم است. در این تبدیلات $\beta$ که پارامتر بکلوند نامیده می‌شود، کمیتی ثابت و اختیاری است که با سرعت سالیتون‌ها ارتباط دارد. با استفاده از این تبدیلات می‌توان جواب‌های چند سالیتونی را از روی جواب‌هایی با تعداد سالیتون کمتر بطور متوالی به دست آورد. قضیه جایگشت پذیری، استخراج جواب‌های سالیتونی را، صرفاً به طریق جبری، امکان‌پذیر می‌کند:

### قضیهٔ جایگشت‌پذیری

چنانچه $\sigma_{n-1}$ جواب معادلهٔ سینوسی گوردون باشد و $\sigma_n'$ و $\sigma_n''$ دو جواب دیگر مستخرج از $\sigma_{n-1}$ با پارامترهای بکلوند $\beta'$ و $\beta''$ باشند، جوابی از مرتبهٔ بالاتر وجود دارد که از رابطهٔ زیر بدست می‌آید،

$$\sigma_{n+1}=4\tan^{-1}\left\{\frac{\beta'+\beta''}{\beta'-\beta''}\tan\left(\frac{\sigma_n'-\sigma_n''}{4}\right)\right\}+\sigma_{n-1} \qquad (۱۳)$$

## ۲. برهمکنش سالیتون‌ها

دو سالیتون، هنگام نزدیک شدن به یکدیگر، بعلت وجود اثرات غیرخطی با یکدیگر بر همکنش می‌کنند. سالیتون‌ها پس از برخورد با یکدیگر از هم جدا شده و با حفظ شکل اولیهٔ خود از یکدیگر دور می‌شوند. چنانچه مدل مورد نظر انتگرال‌پذیر باشد، وجود بینهایت کمیت پایسته، موجب احیای شکل اولیهٔ سالیتون‌ها و عدم پخش انرژی در محیط می‌گردد. معادلهٔ سینوسی گوردون یکی از اینگونه مدل‌هاست. در مقابل، مدل $\phi^4$ با چگالی لاگرانژی زیر:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\,\partial_{\mu}\phi-\lambda\left(\phi^{2}-\phi_{0}^{2}\right)^{2}, \qquad (۱۴)$$

علیرغم داشتن جوابهای انفرادی پایدار، فاقد این ویژگی مهم است. نیروی بین دو سالیتون را هم به طریق عددی و هم در تقریب فواصل زیاد می‌توان به روش تحلیلی محاسبه کرد. می‌توان نشان داد که در تقریب فواصل زیاد، سالیتون‌های معادلهٔ سینوسی گوردون، یک نیروی نمایی کاهش‌یابنده بر یکدیگر وارد می‌کنند، که معادل با تقریب بورن در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی است، و از طریق تبادل ذرات واسط سنگین بوجود می‌آید.

سالیتون‌های معادلهٔ سینوسی گوردون در مواجهه با یک میدان نیروی خارجی چگونه رفتار می‌کنند؟ در پاسخ به این سؤال نیز می‌توان از رهیافت‌های تحلیلی و عددی سود جست. چنانچه در معادلهٔ سینوسی گوردون یکی از پارامترهای $a$ و $b$ ، یا هر دوی آنها، توابع بسیار کندی از موقعیت باشند، جوابهای تک سالیتونی با یک پتانسیل مؤثر مواجه خواهند بود که از رابطهٔ

$$U_{(x)} = 8\frac{a_\circ^{1/2}}{b_\circ^{3/2}}\left(\frac{a(x)^{1/2}b_\circ^{3/2}}{b(x)^{3/2}a_\circ^{1/2}} - 1\right) \tag{15}$$

بدست می‌آید ($a_\circ$ و $b_\circ$) مقدار پارامترها در یک موقعیت مرجع است). برای استخراج این پتانسیل مؤثر از رابطهٔ

$$E = E_\circ + T + U \tag{16}$$

استفاده شده است. در این رابطه $E$ انرژی کل سالیتون، $E_\circ$ انرژی سکون، $T$ انرژی جنبشی و $U$ پتانسیل مؤثر است. در برخورد با پتانسیل $U$، سالیتون بسیار شبیه یک ذرهٔ کلاسیک رفتار می‌کند. مثلاً حرکت خود را تا جایی که $T$ به ازای آن صفر است ادامه می‌دهد (نقطهٔ بازگشت). سپس برگشته و سرعت اولیهٔ خود را در جهت عکس بازمی‌یابد. محاسبات عددی، ضمن تأئید این مطلب، نشان می‌دهند که تقریب یاد شده حتی در صورت تغییرات سریع پتانسیل به قوت خود باقی است. علیرغم همهٔ این شباهتها، دو اختلاف مهم با رفتار یک ذرهٔ کلاسیک وجود دارد:

۱. سالیتون‌های پرانرژی در مواجهه با پتانسیل خارجی مقداری از انرژی خود را به صورت نوسانات کم‌دامنهٔ پاشنده، یا به صورت اغتشاشات غیرخطی (مثل زوجهای سالیتون ـ پادسالیتون یا بریدرها *breathers*) از دست می‌دهند.
۲. یک سالیتون، در مواجهه با یک سد پتانسیل کم ضخامت قادر است از آن عبور نماید، حتی اگر $T$ کمتر از $U_\circ$، ارتفاع سد پتانسیل باشد. این پدیده در مورد سالیتون‌های معادلهٔ غیرخطی شرودینگر نیز گزارش شده است. (نوگامی و تویاما ۱۹۹۴) تفاوت این پدیده تونل‌زنی کلاسیک با مشابه کوانتومی خود در آن است که برخلاف حالت کوانتومی، احتمال عبور، صفر یا یک است و احتمال دیگری ($1 > P > 0$) مشاهده نمی‌شود.

## ۳. تعمیمی از معادلهٔ سینوسی گوردون

با واردکردن یک ضریب توانی در لاگرانژی معادلهٔ سینوسی گوردون

$$\mathcal{L} = \phi^n\left\{\frac{(n+2)^2}{8}\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi - (1-\cos\phi)\right\} \tag{17}$$

به معادلهٔ شبه سینوسی گوردون می‌رسیم:

$$\Box\ \psi = \frac{\partial U}{\partial\psi}, \tag{18}$$

$$\psi = \phi^{\frac{n}{2}+1}, \tag{19}$$

$$U(\psi) = 2\psi^{\frac{2n}{n+2}}\sin^2\left(\frac{1}{2}\psi^{\frac{2}{n+2}}\right)\ . \tag{20}$$

این معادله دارای جوابهای منفردی به صورت

$$\phi_{(x,t)} = \pm 4\tan^{-1}e^{\frac{2\gamma(x-vt)}{n+2}} + 4m\pi; \qquad m\in Z, \tag{21}$$

است، که انرژی سکون آنها از رابطهٔ

$$E_m = \int_{\psi_m}^{\psi_{m\neq 1}}\sqrt{2U(\psi)}\,d\psi; \qquad (v=0), \tag{22}$$

بدست می‌آید. مقدار حدی انرژی سکون (جرم) این جوابها در حد $m$های بزرگ

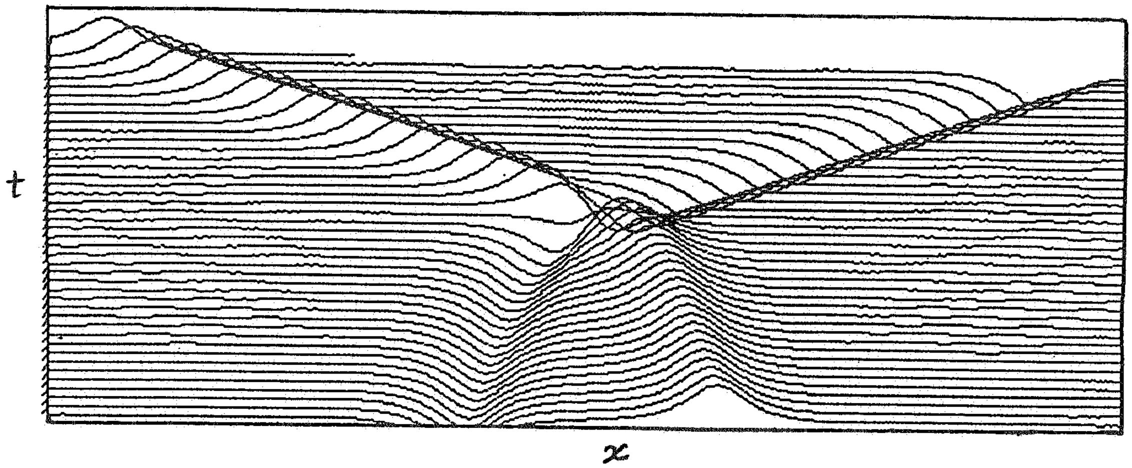
$$E_m \approx 8(4m\pi)^{\frac{n}{n+2}} \tag{23}$$

است. جواب‌های یاد شده دارای ویژگی‌های زیر هستند که آنها را از سالیتون‌های معادلهٔ سینوسی گوردون متمایز می‌کند:

۱. جواب‌های مربوط به سکتورهای مختلف ($m$های متفاوت) جرم متفاوت دارند. بنابراین واگنی جرمی یعنی آنچه در مورد سالیتون‌های معادلهٔ سینوسی گوردون وجود دارد، برداشته می‌شود.
۲. شرایط مرزی متمایز (($\phi$ ($x \to \pm\infty$)) ایجاب می‌کند که یک موج منفرد از سکتور $m_1$ نتواند از موج منفردی از سکتور $m_2$ عبور کند.
۳. جوابها، در حالت کلی، موجهای انفرادی را تشکیل می‌دهند که علیرغم ثبات دینامیکی، در برخورد با پادموج خود از بین می‌روند. این نتیجه از حل عددی معادلهٔ دینامیکی بدست آمده است.

شکل دیگری از تعمیم معادلهٔ سینوسی گوردون، تغییر دادن پتانسیل خود بر همکنش به صورت زیر است،

$$\cdot\ ^{a}\frac{\cdot}{-a}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\,\varepsilon_{abc}\phi_a\,\partial_\alpha\phi_b\,\partial_\beta\phi_c \tag{24}$$




**شکل ۱.** برخورد یک زوج سالیتون ـ پاد سالیتون با جرم سکون زیاد منجر به تولید یک زوج با جرم کمتر می‌شود، که با سرعت بیشتری محیط برهمکنش را ترک می‌کند (معادلهٔ شبه‌سینوسی گوردون از نوع دوم). در این آزمایش عددی، $V_1 = -V_2 = ۰/۱۲$ ، $a_1 = ۱$ و $a_2 = ۰/۰۰۰۲$.

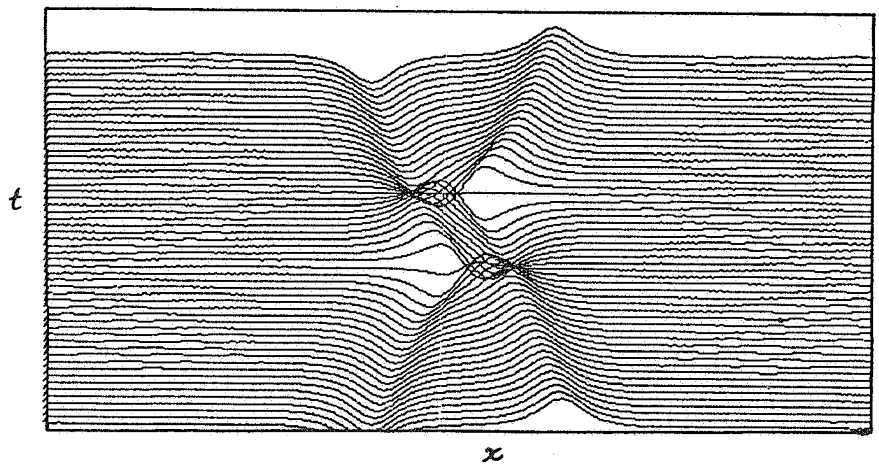
(۲۵) اگر $\phi \geq ۰$، $a = a_1$

و

(۲۶) اگر $\phi < ۰$، $a = a_2$

معادلهٔ دینامیکی و تانسور انرژی - تکانه برای این پتانسیل اساساً مشابه معادلهٔ سینوسی گوردون است، با این تفاوت که پارامتر مربوطه برای دامنه‌های مختلفی از تغییرات میدان، متفاوت است.

انتخاب پتانسیل به صورت فوق، باعث ایجاد سالیتون‌هائی با دو جرم متفاوت می‌شود. یک زوج سالیتون - پادسالیتون با جرم زیاد در برخورد با یکدیگر به یک زوج با جرم کمتر تبدیل می‌شوند (شکل ۱). در حالیکه برخورد یک زوج کم جرم به پراکندگی آنها می‌انجامد، مگر اینکه انرژی مرکز جرم آنها به اندازهٔ کافی زیاد باشد، که در اینصورت، یک زوج وزین و مقید برای مدت کوتاهی (بسته به انرژی زوج اولیه) تشکیل می‌شود که دوباره از بین رفته، زوجی مشابه زوج اولیه تولید می‌کند (شکل ۲). با انتخاب مناسب پارامترهای لاگرانژی، می‌توان به سالیتون‌هائی دست یافت که جرم سکون آنها بسیار کم باشد. این امر باعث می‌شود که بر اثر اضمحلال یک زوج وزین، زوج تقریباً بدون جرمی بوجود آید که با سرعت نزدیک به سرعت نور محل بر همکنش را ترک می‌کند (شکل ۱).




**شکل ۲.** در صورتی که انرژی یک زوج سالیتون ـ پاد سالیتون مربوط به معادلهٔ شبه سینوسی گوردون (از نوع دوم) به اندازهٔ کافی باشد، بطور موقت ایجاد یک زوج وزین و مقید می‌نماید که پس از مدت کوتاهی از بین رفته و زوجی مشابه زوج اولیه ایجاد می‌کند. در این آزمایش عدد $V_1 = -V_2 = ۰/۱۲$ ، $a_1 = ۱$ و $a_2 = ۱/۱$ .

## ۴. مدل $O(3)$ غیرخطی

چگالی لاگرانژی

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi_a\partial_{\mu}\phi_a;\qquad a=1,2,3 \tag{۲۷}$$

که در آن $\phi_a$ یک میدان نرده‌ای سه مؤلفه‌ای است، منجر به یک معادلهٔ دینامیکی خطی با تقارن $O(3)$ می‌شود. اعمال قید

$$\phi_a\phi_a=1 \tag{۲۸}$$

بین مؤلفه‌های میدان با حفظ تقارن یاد شده، مدل را به یک مدل غیرخطی تبدیل می‌کند (راجارامان ۱۹۸۲). این قید از طریق منظور کردن یک ضریب لاگرانژی وارد کنش می‌شود. در اینصورت، معادلهٔ میدان به صورت زیر درخواهد آمد (جمع روی اندیس‌های تکراری):

$$\Box\phi_a-(\phi_b\Box\phi_b)\phi_a=0 \tag{۲۹}$$

این میدان در دو بعد فضائی از ویژگی‌های جالبی برخوردار است. انرژی کل سیستم مطابق معمول از انتگرال مؤلفه زمانگونه تانسور انرژی – تکانه محاسبه می‌گردد. بنابراین برای جوابهای ساکن:

$$E=\frac{1}{2}\int\partial_i\phi_a\partial_i\phi_a d^2x \tag{۳۰}$$

خلأهای کلاسیکی این سیستم از شرط $\partial_i\phi_a=0$ (یا $\phi_a=\phi_a^{(0)}$) و بنابراین $E=0$) به دست می‌آیند. این شرط بر روی یک نقطه از کره $\phi_a\phi_a=1$ در فضای درونی تحقق می‌یابد (شکست خودبخودی تقارن).

جوابهای جایگزیده این مدل که دارای انرژی محدود هستند،

از شرط زیر تبعیت می‌کنند:

$$r|\nabla\phi_a|\rightarrow 0 \qquad \text{اگر } r\rightarrow\infty, \tag{۳۱}$$

و یا

$$\lim_{r\rightarrow\infty}\phi_a=\phi_a^{(0)}\,. \tag{۳۲}$$

با توجه به اینکه بردار میدان در فاصله‌های بسیار دور از مبدأ ثابت است، تا آنجاکه به دینامیک میدان مورد نظر مربوط می‌شود، کلیهٔ این نقاط را در بینهایت، می‌توان معادل با یک نقطه گرفت.

در این صورت می‌توان با یک نگاشت استریوگرافیک، فضای مکانی $R^2$ را به یک کره دوبعدی ($S^2$) تصویر کرد. در این صورت بین کره $S^2$ خلأ میدان و کره فضای مکانی یک گروه هموتوپی $\pi_2$ برقرار است،

$$\pi_2(S^2)=Z\,. \tag{۳۳}$$

این گروه با گروه اعداد صحیح تحت عمل جمع ایزومورف است (استین‌راد ۱۹۵۱). با تعریف چگالی جریان به صورت:

$$J^{\mu}=\frac{1}{8\pi}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\varepsilon_{abc}\phi_a\partial_{\alpha}\phi_b\partial_{\beta}\phi_c\,, \tag{۳۴}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که این جریان پایسته است،

$$\partial_{\mu}J^{\mu}=\frac{1}{8\pi}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\varepsilon_{abc}\partial_{\mu}\phi_a\partial_{\alpha}\phi_b\partial_{\beta}\phi_c\,\alpha\det\left|\frac{\partial\phi_a}{\partial x^{\mu}}\right|$$
$$=0 \tag{۳۵}$$

نتیجه‌گیری آخر از آنجا حاصل می‌شود که سه مؤلفهٔ $\phi_a$ مستقل نیستند. همچنین نتیجه می‌شود که بار کل مربوط به این جریان کوانتیده است:

$$\begin{aligned}Q&=\int J^0 d^2x\,,\\ &=\frac{1}{8\pi}\int\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{abc}\phi_a\frac{\partial\phi_b}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\phi_c}{\partial x^{\nu}}d^2x\,,\\ &=\frac{1}{8\pi}\int\varepsilon_{rs}\varepsilon_{abc}\frac{\partial\phi_b}{\partial\xi_r}\frac{\partial\phi_c}{\partial\xi_s}d^2\xi\,,\\ &=\frac{1}{4\pi}\int ds^{(\mathrm{int})}=n\,.\end{aligned} \tag{۳۶}$$

در این روابط، متغیرهای $\xi_1$ و $\xi_2$ مختصات زاویه‌ای مشخص‌کننده یک نقطه از سطح کرهٔ $S^2$ در فضای داخلی می‌باشند. می‌توان نشان داد که جوابهای ساکن با بار مثبت دلخواه از رابطهٔ زیر بدست می‌آیند (راجارامان ۱۹۸۲)،

$$\omega(z)=\left(\frac{z-z_0}{\lambda}\right)^n, \tag{۳۷}$$

که در آن

$$\omega=\omega_1+i\omega_2, \tag{۳۸}$$

$$\omega_1=\frac{2\phi_1}{1-\phi_3}, \tag{۳۹}$$

$$\omega_2 = \frac{2\phi_2}{1-\phi_3}, \tag{40}$$

$$z = x + iy, \tag{41}$$

همچنین $\lambda$ یک عدد حقیقی دلخواه است و $n$ یک عدد صحیح مثبت است که انرژی کل و بار کل با آن متناسب می‌باشند.

## ۵. مدل اسکیرم

اسکیرم (۱۹۶۱) نشان داد که می‌توان از یک میدان بوزونی غیرخطی تکدست شروع کرد، و به فرمیون‌هائی رسید که در واقع سالیتون‌های مدل می‌باشند. این مدل که از لاگرانژی زیر حاصل می‌شود، تعمیمی از مدل سیگمای غیرخطی است:

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{16} Tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} Tr\left\{[U^+\partial_\mu U, U^+\partial_\nu U][U^+\partial^\mu U, U^+\partial^\nu U]\right\} \tag{42}$$

در این لاگرانژی، $U$ عضوی از گروه $SU(2)$ است:

$$U = e^{\frac{2i}{F_\pi}\tau_a\pi_a} = \phi_0 + i\tau_a\phi_a, \tag{43}$$

$$\phi_0 = \cos\frac{2\pi}{F_\pi}, \tag{44}$$

$$\phi_a = \hat{\pi}_a \sin\left(\frac{2\pi}{F_\pi}\right) \tag{45}$$

و $\phi_0$ و $\phi_a$ مؤلفه‌های یک میدان نرده‌ای هستند که یک کرهٔ $S^3$ را در فضای میدان جارو می‌کند. در این روابط $\pi = (\pi_a \pi_a)^{1/2}$ و $\hat{\pi}_a = \pi_a/\pi$، و ثابت واپاشی پایون، $F_\pi = 186\ MeV$، است. در اینجا نیز، با توجه به اینکه در فواصل بسیار دور، میدان به سمت یک مقدار ثابت میل می‌کند، کلیهٔ نقاط را در بینهایت می‌توان به یک نقطه تصویر کرد. بنابراین با نگاشتی مثل نگاشت استریوگرافیک، می‌توان فضای سه بعدی مکانی را به یک کره $S^3$ تقلیل داد. اکنون هر جواب از معادلات میدان را می‌توان نگاشتی از $S^3$ مکانی به $S^3$ درونی (فضای میدان) قلمداد کرد.

مجموعهٔ چنین نگاشتهائی یک گروه هموتوپی $\pi_3$ را تشکیل می‌دهند که هومورف با گروه اعداد صحیح تحت عمل جمع است. در اینجا، جریان توپولوژیک

$$B^\mu = \frac{1}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Tr\left[(U^+\partial_\nu U)(U^+\partial_\alpha U)(U^+\partial_\beta U)\right], \tag{46}$$

بطور موضعی پایسته است،

$$\partial_\mu B^\mu = 0 \tag{47}$$

و بار مربوط به آن که کوانتیده است، براساس فرض اسکیرم نشان‌دهندهٔ عدد باریونی سیستم است:

$$B = \int B^0 d^3x \tag{48}$$

با کوانتیده کردن این مدل از طریق استفاده از مختصات جمعی (ادکینز ۱۹۸۷) می‌توان پاره‌ای از خواص فیزیکی باریون‌ها (مثل جرم، اسپین، ایزواسپین و ممان دوقطبی مغناطیسی) را با دقتی در حدود ۲۰٪ استخراج کرد.

## ۶. مدل ایزوبرداری الکترودینامیک

در این مدل (واشقانی و ریاضی ۱۹۹۶) از یک لاگرانژی که دارای خواص زیر باشد کار خود را آغاز می‌کنیم:

۱. ناوردائی نسبیتی،
۲. شکست خودبخودی تقارن $O(3)$،
۳. پایداری جوابهای انفرادی
۴. تبعیت چگالی هامیلتونی از شرایط انرژی. به عنوان مثال، لاگرانژی

$$\mathcal{L} = -\lambda(\partial^\mu\phi_a\partial_\mu\phi_a)^2 - b_0\left(1 - 2\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2 \tag{49}$$

می‌تواند به عنوان یک مدل آزمایشی مورد بررسی قرار گیرد. در این لاگرانژی، $\phi_a$ یک میدان ایزوبرداری است (مؤلفه‌ها شبه نرده‌ای هستند) و $\lambda$، $b_0$ و $\phi_0$ ضرایبی ثابت، حقیقی و مثبت هستند.

جوابهای انفرادی این مدل با انتخاب خارپشتی

$$\phi_a = \phi_{(r)}\frac{x^a}{r} \tag{50}$$

و جانشانی در معادلات دینامیکی، به دست می‌آیند. از آنجا که پیچیدگی معادلات غیرخطی در سه بعد مانع از استخراج جواب‌های

تحلیلی است، می‌توان به طریق وردشی جوابهای مورد نظر را بدست آورد. جوابهای حدی به صورت زیر است،

$$\phi_{(r)} \approx \phi_\circ \left(1 - \frac{8\phi_\circ^4}{b_\circ r^4} + \cdots\right) \qquad \text{اگر } r \to \infty، \quad (۵۱)$$

و

$$\phi_{(r)} \approx k\frac{r}{r_\circ} - \frac{1}{10k^2}\left(\frac{r}{r_\circ}\right)^2 + \cdots \qquad \text{اگر } r \to 0، \quad (۵۲)$$

$K$ ضریب ثابتی است که مقدار آن از سازگاری جوابهای حدی بدست می‌آید.

انرژی کل که به طریق عددی محاسبه شده است، چنین است

$$E = 4.05 \times 4^{3/4}\pi b_\circ^{1/4}\phi_\circ^3$$

پایداری دینامیکی جواب انفرادی را از طریق وارد کردن اختلالات کم‌دامنه و بررسی تغییرات انرژی، می‌توان اثبات نمود.

اکنون با استفاده از تعریف زیر برای تانسور پاد متقارن $F^{\mu\nu}$،

$$F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abc}\phi_a\partial_\alpha\phi_b\partial_\beta\phi_c \qquad (۵۳)$$

می‌توان نشان داد که به معادلاتی شبیه به معادلات ماکسول می‌رسیم:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu, \qquad (۵۴)$$

$$J^\nu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abc}\partial_\mu\phi_a\partial_\alpha\phi_b\partial_\beta\phi_c. \qquad (۵۵)$$

در این رابطه، $J^\nu$ چاربردار جریان است، که پایسته است،

$$\partial_\gamma J^\nu = 0 \qquad (۵۶)$$

همچنین با تعریف تانسور همزاد $\tilde{F}^{\mu\nu}$ به صورت معمول،

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \qquad (۵۷)$$

به راحتی نشان داده می‌شود که این تانسور از رابطهٔ زیر تبعیت می‌کند،

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\tilde{J}^\nu. \qquad (۵۸)$$

در این رابطه، $\tilde{J}^\nu$ چگالی جریان مغناطیسی است، که آن نیز پایسته است. برای حذف جریان مغناطیسی (به دلیل عدم مشاهدهٔ تک‌قطبی‌های مغناطیسی) می‌توان از یک میدان برداریِ کمکی استفاده کرد (واشقانی و ریاضی ۱۹۹۶). براساس این مدل، می‌توان کوانتیده بودن بار الکتریکی را از طریق استفاده از گروه هموتوپی $\pi_2$ توجیه کرد. در پایان، باید اشاره کنیم که مدل حاضر، به شعاعی در حدود شعاع کلاسیک برای ذرات باردار می‌انجامد. همچنین کوانتیده کردن جوابهای انفرادی از طریق مختصات جمعی به دلیل بینهایت شدن ممان اینرسی امکان‌پذیر نیست (داوودی ۱۳۷۵).

**قدردانی**

لازم می‌دانم که از بحث‌های سودمند با همکاران گرامی در مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، حمایت این مرکز، و نیز حمایت دانشگاه شیراز تشکر و قدردانی نمایم. آقای عبدالرسول قرائتی جهرمی در بررسی معادلات شبه سینوسی گوردون همکاری داشته‌اند.

## مراجع

G. S. Adkins, in *Static Properties of Skyrmions*, Ed. K. Liu, World Scien. Pub. Co., Singapore (1987).

M. Davoodi, *MSc. Thesis*, Shiraz University (1997).

Y. Nogami and F. M. Toyama, *Phys. Lett.*, **A184** (1994) 245.

R. Rajaraman, 1982., *Solitons and Instantons*, North Holland Pub. Co., Amsterdam (1982).

N. Riazi, *Int. J. Theor. Phys.*, **32** (1993) 2155.

T. H. R. Skyrme, T. H. R., *Proc. Roy. Soc.*, **A260** (1961) 127.

T. H. R. Skyrme, T. H. R., *Nucl. Phys.*, **31** (1962) 556.

T. H. R. Skyrme, T. H. R., *Int. J. Mod. Phys.*, **A3**, No 12 (1988) 2745.

N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1951).

A. Vasheghani, and N. Riazi, *Int. J. Theor. Phys.*, **35** (1996) 587.